ПРИМИТИВНЫЕ ИДЕАЛЫ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ЛИСТЫ КВАНТОВЫХ МАТРИЦ (ЧАСТЬ 2)

В. Г. Мосин [1]

Вычеслены размерности симплектических листов в пуассоновой структуре, ассоциированной с квантовыми $m \times n$ - матрицами.

Мотивировка. Настоящая работа является прямым продолжением [4], где нами было установлено взаимно однозначное соответствие между примитивными идеалами в алгебре регулярных функций на квантовых $m \times n$ - матрицах и симплектическими листами в ассоциированной пуассоновой структуре [4, теорема 3.9].

1. Предварительные предложения

Пусть $\mathcal{V}$ — множество комплексных $m \times n$ - матриц $(m \le n)$, невырожденных в том смысле, что все их миноры максимального порядка отличны от нуля, $\mathbf{C}[\mathcal{V}]$ — алгебра регулярных функций на $\mathcal{V}$, $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$ — ее квантовый аналог.

Будем обозначать C_I^J квантовый минор (q-минор) в $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$, построенный на строках с номерами из мультииндекса $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ и на столбцах с номерами из $J = \{j_1 \dots, j_k\}$. Все мультииндексы предполагаются упорядоченными, $E_k = \{1, \dots, k\}$. Для подстановки y обозначим $y(I)$ мультииндекс с компонентами $y(i_1), \dots, y(i_k)$. Пару подстановок w_+, w_- из S_m будем обозначать w. Пусть

$$P^+_{w_+} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{C_K^{E_i} | K >_{lex} w_+^{-1}(E_i)\}, \quad P^-_{w_-} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{C_K^{E_n \setminus E_{n-i}} | K <_{lex} w_-^{-1}(E_m \setminus E_{m-i})\},$$
$$S^+_{w_+} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{C^{E_i}_{w_+^{-1}(E_i)}\}, \quad S^-_{w_-} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{C^{E_n \setminus E_{n-i}}_{w_-^{-1}(E_m \setminus E_{m-i})}\},$$
$$S^0 = \{C^{E_m}_{E_m}, C^{\{2,3,\dots,m+1\}}_{E_m}, \dots, C^{E_n \setminus E_m}_{E_m}\},$$

$P_w = P^+_{w_+} \cup P^-_{w_-}$, $S_w = S^+_{w_+} \cup S^0 \cup S^-_{w_-}$, $\widetilde{S}_w$ — множество всех главных q-миноров всех q-миноров из S_w. Обозначим $\mathcal{P}_w$ левый идеал алгебры $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$, порожденный P_w, $\mathcal{S}_w$, $\widetilde{\mathcal{S}}_w$ — мультипликативные множества в $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$, порожденные S_w и $\widetilde{S}_w$ соответственно. Заметим, что идеал $\mathcal{P}_w$ на самом деле является двусторонним ([4, предл. 1.4]). Положим

$$\operatorname{Prim}_w \mathbf{C}_q[\mathcal{V}] = \{\mathcal{P} \in \operatorname{Prim} \mathbf{C}_q[\mathcal{V}] \mid \mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_w, \mathcal{P} \bigcap \mathcal{T}_w = \emptyset\}.$$

[1] Мосин Владимир Геннадьевич, кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета

Предложение 1.1 [4, теорема 2.10]. *Множества* $\operatorname{Prim}\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$ *и* $\operatorname{Symp}\mathcal{V}$ *примитивных идеалов в* $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$ *и симплектических листов в* $\mathcal{V}$ *разбиваются на непересекающиеся классы, классы нумеруются парами подстановок из* $S_m \times S_m$*:*

$$\operatorname{Prim}\mathbf{C}_q[\mathcal{V}] = \bigsqcup_{w\in S_m\times S_m} \operatorname{Prim}_w \mathbf{C}_q[\mathcal{V}], \quad \operatorname{Symp}\mathcal{V} = \bigsqcup_{w\in S_m\times S_m} \operatorname{Symp}_w \mathcal{V}.$$

Предложение 1.2 *Изучение* $\operatorname{Prim}_w \mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$ *равносильно изучению примитивных идеалов локализованной фактор-алгебры* $\widetilde{\mathcal{A}}_w = \left(\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]/\mathcal{P}_w\right)_{\widetilde{\mathcal{S}}_w}$, *где* $\widetilde{\mathcal{S}}_w$ *— мультипликативное множество в* $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$, *порожденное* $\widetilde{S}_w$*.*

Предложение 1.3 [4, предл 3.1]. *Алгебра* $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ *является скрученной лорановской алгеброй, порожденной* q*-минорами из* $\widetilde{S}_w$*.*

2. Центральные элементы алгебры $\widetilde{\mathcal{A}}_w$

В соответствии с предложением 1.3 всякий центральный моном алгебры $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ есть моном от q-миноров из $\widetilde{S}_w$. Мы покажем, что всякий центральный моном этой алгебры зависит только от q-миноров из S_w и не зависит от остальных образующих, то есть записывается в виде

$$z_w = C^+_{w_+} C^0 C^-_{w_-},$$

где $C^\pm_{w_\pm}$, C^0 — мономы от q-миноров из $S^\pm_{w_\pm}$ и S^0 соответственно. Для этого мы применим индукцию по цепочке алгебр $\widetilde{\mathcal{A}}_e, \ldots, \widetilde{\mathcal{A}}_w$, которую нам доставляет лемма [4, 3.1].

Лемма 2.1 *Пусть* $e = (e, e)$ *— пара единичных подстановок из* $S_m \times S_m$*. Тогда всякий центральный моном* z_w *из* $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ *имеет вид*

$$z_e = C^+_e C^0 C^-_e.$$

Доказательство получается аналогично [5, теорема 2.8].

Лемма 2.2 *Пусть* v_+, w_+, j_0 *из леммы* [4, 3.1], $z_{(v_+,w_-)}$, z_w *— центральные мономы алгебр* $\widetilde{\mathcal{A}}_{(v_+,w_-)}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ *соответственно. Тогда если* $z_{(v_+,w_-)} = C^+_{v_+} C^0 C^-_{w_-}$, *то*

$$z_w = \left(C^{E_{j_0}}_{v_+^{-1}(E_{j_0})}\right)^{k_+} C^+_{w_+} C^0 C^-_{w_-}, \quad k_+ \in \mathbf{Z}.$$

Доказательство. Алгебра $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ получается из $\widetilde{\mathcal{A}}_{(v_+,w_-)}$ присоединением одной лорановской переменной:

$$\widetilde{\mathcal{A}}_w = \widetilde{\mathcal{A}}_{(v_+,w_-)}\left[\left(C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\right)^{\pm 1}\right]$$

(см. [4, леммы 3.3, 3.6]). Так как $z_w \in \operatorname{Center}\widetilde{\mathcal{A}}_w$, то $z_w \in \operatorname{Center}\widetilde{\mathcal{A}}_{(v_+,w_-)}$. Следовательно, в записи z_w не могут участвовать q-миноры из

$$\{\widetilde{S}^+_{v_+} \cup \widetilde{S}^0 \cup \widetilde{S}^-_{w_-}\} \setminus \{S^+_{v_+} \cup S^0 \cup S^-_{w_-},\}$$

и, значит,

$$z_w = \left(C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\right)^{k_+} C^+_{v_+} C^0 C^-_{w_-}.$$

Заметим, что моном $C^+_{v_+}$ есть произведение целых степеней q-миноров $C^{E_j}_{v_+^{-1}(E_j)}$, причем $v_+^{-1}(E_j) = w_+^{-1}(E_j)$ $\forall j \neq j_0$. Обозначая k_+ показатель при $C^{E_j}_{v_+^{-1}(E_j)}$, получим требуемое.

Лемма 2.3 *Пусть v_-, w_-, i_0 из леммы* [4, 3.1], *$z_{(w_+,v_-)}$, z_w — центральные мономы алгебр $\widetilde{\mathcal{A}}_{(w_+,v_-)}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ соответственно. Тогда, если $z_{(w_+,v_-)} = C^+_{w_+}C^0C^-_{v_-}$, то*

$$z_w = \left(C^{E_n\setminus E_{n-i_0}}_{v_-^{-1}(E_n\setminus E_{n-i_0})}\right)^{k_-} C^+_{w_+}C^0C^-_{w_-}, \quad k_- \in \mathbf{Z}.$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

Лемма 2.4 *Пусть v_+, w_+, j_0 из леммы* [4, 3.1]. *Обозначим*

$$A_+ = C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})} x^{j_0+1}_{w_+^{-1}(j_0+1)}, \quad B_+ = C^{E_{j_0+1}}_{w_+^{-1}(E_{j_0+1})}.$$

Тогда

$$A_+C^+_{w_+} = C^+_{w_+}A_+, \quad A_+C^{E_{j_0}}_{v_+^{-1}(E_{j_0})} = q^2 C^{E_{j_0}}_{v_+^{-1}(E_{j_0})}A_+,$$
$$B_+C^+_{w_+} = C^+_{w_+}B_+, \quad B_+C^{E_{j_0}}_{v_+^{-1}(E_{j_0})} = C^{E_{j_0}}_{v_+^{-1}(E_{j_0})}B_+.$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Остальные доказываются аналогично. Покажем сначала, что $C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}C^+_{w_+} = C^+_{w_+}C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}$. Напомним, что $C^+_{w_+}$ — это произведение q-миноров $C^{E_j}_{w_+^{-1}(E_j)}$. Если $j \leq j_0$, то $E_j \subseteq E_{j_0}$ и $w_+^{-1}(E_j) \subseteq w_+^{-1}(E_{j_0})$. Если же $j > j_0$, то $E_j \supseteq E_{j_0}$ и $w_+^{-1}(E_j) \supseteq w_+^{-1}(E_{j_0})$. И в том, и в другом случае из формул [4, лемма 1.1] вытекает, что

$$C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}C^+_{w_+} = C^+_{w_+}C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})} \quad \forall j.$$

Покажем теперь, что $x^{j_0+1}_{w_+^{-1}(j_0+1)}C^{E_j}_{w_+^{-1}(E_j)} = C^{E_j}_{w_+^{-1}(E_j)}x^{j_0+1}_{w_+^{-1}(j_0+1)}$. Согласно [4, лемма 2.6], имеет место соотношение:

$$x^{j_0+1}_{w_+^{-1}(j_0+1)}C^{E_j}_{w_+^{-1}(E_j)} = q^d C^{E_j}_{w_+^{-1}(E_j)}x^{j_0+1}_{w_+^{-1}(j_0+1)}, \quad d = \delta_{w_+^{-1}(E_j),w_+^{-1}(j_0+1)} - \delta_{E_j,j_0+1}.$$

Если $j \leq j_0$, то $w_+^{-1}(j_0+1) \notin w_+^{-1}(E_j)$ и $j_0 \notin E_j$. Поэтому

$$\delta_{w_+^{-1}(E_j),w_+^{-1}(j_0+1)} = 0, \quad \delta_{E_j,j_0+1} = 0.$$

Следовательно, $d = 0$. Если же $j > j_0$, то $w_+^{-1}(j_0+1) \in w_+^{-1}(E_j)$ и $j_0 \in E_j$. В этом случае

$$\delta_{w_+^{-1}(E_j),w_+^{-1}(j_0+1)} = 1, \quad \delta_{E_j,j_0+1} = 1$$

и $d = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2.5 *Пусть v_-, w_-, i_0 из леммы* [4, 3.1]. *Обозначим*

$$A_- = C^{E_n\setminus E_{n-i_0}}_{w_-^{-1}(E_n\setminus E_{n-i_0})} x^{j_0+1}_{w_+^{-1}(j_0+1)}, \quad B_- = C^{E_n\setminus E_{n-i_0-1}}_{w_-^{-1}(E_n\setminus E_{n-i_0-1})}.$$

Тогда

$$A_-C^-_{w_-} = C^-_{w_-}A_-, \quad A_-C^{E_n\setminus E_{n-i_0}}_{v_-^{-1}(E_n\setminus E_{n-i_0})} = q^{-2}C^{E_n\setminus E_{n-i_0}}_{v_-^{-1}(E_n\setminus E_{n-i_0})}A_-,$$
$$B_-C^-_{w_-} = C^-_{w_-}B_-, \quad B_-C^{E_n\setminus E_{n-i_0}}_{v_-^{-1}(E_n\setminus E_{n-i_0})} = C^{E_n\setminus E_{n-i_0}}_{v_-^{-1}(E_n\setminus E_{n-i_0})}B_-.$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

Лемма 2.6 *Пусть* v_+, w_+, j_0 *из леммы* [4, 3.1], $z_{(v_+,w_-)}$, z_w — *центральные мономы алгебр* $\widetilde{\mathcal{A}}_{(v_+,w_-)}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ *соответственно. Тогда, если* $z_{(v_+,w_-)} = C^+_{v_+}C^0C^-_{w_-}$, *то* $z_w = C^+_{w_+}C^0C^-_{w_-}$.

Доказательство. Так как алгебра $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ является скрученной [4, предл. 3.1], то существуют целые показатели α_0, α_-, β_0, β_- такие, что

$$\begin{array}{ll} A_+C^0 = q^{\alpha_0}C_0A_+, & A_+C^-_{w_-} = q^{\alpha_-}C^-_{w_-}A_+, \\ B_+C^0 = q^{\beta_0}C_0B_+, & B_+C^-_{w_-} = q^{\beta_-}C^-_{w_-}B_+. \end{array}$$

Покажем сначала, что $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_- = \beta_-$. Действительно, пусть C_I^J —нормальный q-минор в $\widetilde{\mathcal{A}}_w$. Тогда

$$A_+C_I^J = C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}x^{j_0+1}_{w_+^{-1}(j_0+1)}C_I^J = q^{a+d}C_I^JC^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}x^{j_0+1}_{w_+^{-1}(j_0+1)} = q^{a+d}C_I^JA_+,$$

где $a = \sum_{i=1}^{j_0}(\delta_{I,w_+^{-1}(i)} - \delta_{J,i})$, $d = \delta_{I,w_+^{-1}(j_0+1)} - \delta_{J,j_0+1}$. С другой стороны,

$$B_+C_I^J = C^{E_{j_0+1}}_{w_+^{-1}(E_{j_0+1})}C_I^J = q^bC_I^JC^{E_{j_0+1}}_{w_+^{-1}(E_{j_0+1})} = q^bC_I^JB_+,$$

где $b = \sum_{i=1}^{j_0+1}(\delta_{I,w_+^{-1}(i)} - \delta_{J,i})$. Понятно, что $a + d = b$. Все q-миноры, входящие в запись мономов C^0 и $C^-_{w_-}$, являются нормальными, что доказывает равенства $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_- = \beta_-$.

Если центральный моном $z_{(v_+,w_-)}$ из $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ имеет вид $z_{(v_+,w_-)} = C^+_{v_+}C^0C^-_{w_-}$, то согласно лемме 2.2, центральный моном z_w из $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ имеет вид $z_w = \left(C^{E_{j_0}}_{v_+^{-1}(E_{j_0})}\right)^{k_+}C^+_{w_+}C^0C^-_{w_-}$, $k_+ \in \mathbf{Z}$. Нам достаточно показать, что $k_+ = 0$. Заметим, что по лемме 2.4

$$\begin{array}{rcl} A_+z_w & = & A_+\left(C^{E_{j_0}}_{v_+^{-1}(E_{j_0})}\right)^{k_+}C^+_{w_+}C^0C^-_{w_-} = \\ & = & q^{2k_++\alpha_0+\alpha_-}\left(C^{E_{j_0}}_{v_+^{-1}(E_{j_0})}\right)^{k_+}C^+_{w_+}C^0C^-_{w_-}A_+ = q^{2k_++\alpha_0+\alpha_-}z_wA_+, \\ B_+z_w & = & B_+\left(C^{E_{j_0}}_{v_+^{-1}(E_{j_0})}\right)^{k_+}C^+_{w_+}C^0C^-_{w_-} = \\ & = & q^{\beta_0+\beta_-}\left(C^{E_{j_0}}_{v_+^{-1}(E_{j_0})}\right)^{k_+}C^+_{w_+}C^0C^-_{w_-}B_+ = q^{\beta_0+\beta_-}z_wB_+. \end{array}$$

Так как моном z_w централен в $\widetilde{\mathcal{A}}_w$, то $\left\{\begin{array}{rcl} 2k_+ + \alpha_0 + \alpha_- & = & 0, \\ \beta_0 + \beta_- & = & 0. \end{array}\right.$ Отсюда $k_+ = 0$, и лемма доказана.

Лемма 2.7 *Пусть* v_-, w_-, i_0 *из леммы* [4, 3.1], $z_{(w_+,v_-)}$ z_w — *центральные мономы алгебр* $\widetilde{\mathcal{A}}_{(w_+,v_-)}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ *соответственно. Тогда, если* $z_{(w_+,v_-)} = C^+_{w_+}C^0C^-_{v_-}$, *то* $z_w = C^+_{w_+}C^0C^-_{w_-}$.

Доказательство получается аналогично доказательству предыдущей леммы. Леммы 2.1, 2.6 и 2.7 индукцией по цепочке алгебр $\widetilde{\mathcal{A}}_e, \ldots \widetilde{\mathcal{A}}_w$ доказывают следующее предложение.

Предложение 2.8 *Центральный моном любой из алгебр* $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ *зависит только от* q-*миноров из* S_w *и не зависит от остальных образующих.*

3. Размерность центра

Обозначим

$$
\begin{gathered}
C^{E_1}_{w_+^{-1}(E_1)} = F_1, \quad C^{E_1}_{w_+^{-1}(E_2)} = F_2, \quad \dots \quad , C^{E_{m-1}}_{w_+^{-1}(E_{m-1})} = F_{m-1}, \\
C^{E_m}_{E_m} = F_m, \quad C^{E_{m+1}\setminus E_1}_{E_m} = F_{m+1}, \quad \dots \quad , C^{E_n\setminus E_{n-m}}_{E_m} = F_n, \\
C^{E_n\setminus E_{n-m+1}}_{w_-^{-1}(E_m\setminus E_1)} = F_{n+1}, \quad C^{E_n\setminus E_{n-m+2}}_{w_-^{-1}(E_m\setminus E_2)} = F_{n+2}, \quad \dots \quad , C^{E_n\setminus E_{n-1}}_{w_-^{-1}(E_m\setminus E_{m-1})} = F_{n+m-1}, \\
1 = F_{n+m}.
\end{gathered}
$$

В соответствии с предложением 2.8 любой центральный моном z_w из $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ имеет вид

$$z_w = F_1^{\alpha_1} \dots F_{n+m}^{\alpha_{n+m}}$$

для некоторого набора целых показателей $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+m}$.

Лемма 3.1 *Если $z_w \in \operatorname{Center} \widetilde{\mathcal{A}}_w$, то $\alpha_i = -\alpha_{i+m}$ $\forall 1 \le i \le n$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что элементы x_1^1, $x_2^2, \dots, x_m^m, x_m^{n+1}, \dots, x_m^n$ обратимы в $\widetilde{\mathcal{A}}_w$. Для $i \le m$ обозначим $u_i = x_i^i (x_i^{i+1})^{-1}$. Тогда из соотношений в $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ (см. [4, лемма 1.1]) вытекает:

$$F_i u_i = q u_i F_i, \quad F_{i+m} u_i = q u_i F_j, \qquad F_j u_i = u_i F_j, \quad \forall j \ne i, i+m.$$

Следовательно,

$$z_w u_i = F_1^{\alpha_1} \dots F_{n+m}^{\alpha_{n+m}} u_i = q^{\alpha_i + \alpha_{i+m}} u_i F_1^{\alpha_1} \dots F_{n+m}^{\alpha_{n+m}} = q^{\alpha_i + \alpha_{i+m}} u_i z_w.$$

Так как z_w централен, то $\alpha_i + \alpha_{i+m} = 0$. Если же $i \ge m$, то положим $u_i = x_m^i (x_m^{i+1})^{-1}$, откуда так же, как и выше получим требуемое. Лемма доказана.

Пусть p — частное, а r — остаток от деления n на m. Обозначим

$$
G_j = \begin{cases} F_j F_{j+m}^{-1} \dots F_{j+(p+1)m}^{(-1)^{p+1}} & \text{для} \quad i \le r, \\ F_j F_{j+m}^{-1} \dots F_{j+pm}^{(-1)^p} & \text{для} \quad i > r. \end{cases}
$$

Тогда в соответствии с леммой 3.1 всякий центральный моном z_w из $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ записывается в виде:

$$z_w = G_1^{\beta_1} \dots G_m^{\beta_m}.$$

Лемма 3.2 *Справедливы следующие соотношения: $x_i^k G_j = q^{\varphi_{ij}} G_j x_i^k$, где*

$$
\varphi_{ij} = \begin{cases} \delta_{w_+^{-1}(E_j),i} + (-1)^{p+1} \delta_{w_-^{-1}(E_{m+j-r}),i} + \frac{(-1)^p - 1}{2} & \textit{для} \quad j \le r, \\ \delta_{w_+^{-1}(E_j),i} + (-1)^{p} \delta_{w_-^{-1}(E_{j-r}),i} + \frac{(-1)^{p+1} - 1}{2} & \textit{для} \quad j > r. \end{cases}
$$

Доказательство. Рассмотрим случай $j \le r$. В этом случае

$$x_i^k G_j = x_i^k (F_j)(F_{j+m}^{-1} \dots F_{j+pm}^{(-1)^p})(F_{j+(p+1)m}^{(-1)^{p+1}}) = q^{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3} G_j x_i^k,$$

где показатели ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 определяются из условий:

$$
\begin{gathered}
x_i^k F_j = q^{\epsilon_1} F_j x_i^k, \quad x_i^k F_{j+m}^{-1} \dots F_{j+pm}^{(-1)^p} = q^{\epsilon_2} F_{j+m}^{-1} \dots F_{j+pm}^{(-1)^p} x_i^k, \\
x_i^k F_{j+(p+1)m}^{(-1)^{p+1}} = q^{\epsilon_3} F_{j+(p+1)m}^{(-1)^{p+1}} x_i^k.
\end{gathered}
$$

Вычислим явно $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Заметим, что $x_i^k F_j = x_i^k C^{E_j}_{w_+^{-1}(E_j)} = q^{\epsilon_1} C^{E_j}_{w_+^{-1}(E_j)} x_i^k$. Поэтому, согласно формулам [4, лемма 2.6], $\epsilon_1 = \delta_{w_+^{-1}(E_j),i} - \delta_{E_j,i}$. Вычислим ϵ_2. Пусть сначала $k \leq j$. В этом случае

$$\epsilon_2 = 1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^p = \begin{cases} 0, & \text{если } p \text{ четно}, \\ 1, & \text{если } p \text{ нечетно} \end{cases} = \frac{(-1)^p + 1}{2}.$$

Пусть $j < k \leq mp + j$. Существует l такое, что $1 \leq l \leq p$ и $j + (l-1)m < k \leq j + lm$. Тогда

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= -1 + 1 - \ldots (-1)^{l-1} - ((-1)^{l+1} + \ldots + (-1)^p) \\ &= \begin{cases} -1 - \begin{cases} -1, & \text{если } p \text{ нечетно}, \\ 0, & \text{если } p \text{ четно}. \end{cases} & \text{для четного } l, \\ 0 - \begin{cases} 0, & \text{если } p \text{ нечетно}, \\ 1, & \text{если } p \text{ четно}. \end{cases} & \text{для нечетного } l, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } p \text{ нечетно}, \\ -1, & \text{если } p \text{ четно}. \end{cases} = \frac{(-1)^{p+1} - 1}{2}. \end{aligned}$$

Наконец, если $mp + j < k$, то

$$\epsilon_3 = -1 + 1 - \ldots + (-1)^p = \begin{cases} -1, & \text{если } p \text{ нечетно}, \\ 0, & \text{если } p \text{ четно}. \end{cases} = \frac{(-1)^p - 1}{2}.$$

Вычислим ϵ_3.

$$\begin{aligned} x_i^k \big(F_{j+(p+1)m}\big)^{(-1)^{p+1}} &= x_i^k \big(F_{n+(m+j-r)}\big)^{(-1)^{p+1}} = x_i^k \big(C^{E_n \setminus E_{n+j-r}}_{w_-^{-1}(E_m \setminus E_{m+j-r})}\big)^{(-1)^{p+1}} = \\ &= q^{\epsilon_3} \big(C^{E_n \setminus E_{n+j-r}}_{w_-^{-1}(E_m \setminus E_{m+j-r})}\big)^{(-1)^{p+1}} x_i^k. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \epsilon_3 &= (-1)^{p+1}(\delta_{E_n \setminus E_{n+j-r},k} - \delta_{w_-^{-1}(E_m \setminus E_{m+j-r}),i}) = \\ &= (-1)^{p+1}((\delta_{E_n,k} - \delta_{E_{n+j-r},k}) - (\delta_{E_m,i} - \delta_{w_-^{-1}(E_{m+j-r}),i})) = \\ &= (-1)^{p+1}(1 - \delta_{E_{n+j-r},k} - 1 + \delta_{w_-^{-1}(E_{m+j-r}),i}) = \\ &= (-1)^{p+1}\delta_{w_-^{-1}(E_{m+j-r}),i} + (-1)^p \delta_{E_{n+j-r},k}. \end{aligned}$$

Теперь легко вычисляется сумма $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$. Если $k \leq j$, то $k \in E_j$, $k \in E_{n+j-r}$. Значит,

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \\ &= \delta_{w_+^{-1}(E_j),i} - \delta_{E_j,k} + \frac{(-1)^{p+1} + 1}{2} + (-1)^{p+1}\delta_{w_-^{-1}(E_{m+j-r}),i} + (-1)^p \delta_{E_{n+j-r},k} = \\ &= \delta_{w_+^{-1}(E_j),i} + (-1)^{p+1}\delta_{w_-^{-1}(E_{m+j-r}),i} + (-1)^p - 1 + \frac{(-1)^{p+1} + 1}{2} = \\ &= \delta_{w_+^{-1}(E_j),i} + (-1)^{p+1}\delta_{w_-^{-1}(E_{m+j-r}),i} + \frac{(-1)^p - 1}{2}. \end{aligned}$$

Если $j < k \leq mp + j$, то $k \notin E_j$ и $k \in E_{n+j-r}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \\ &= \delta_{w_+^{-1}(E_j),i} - \delta_{E_j,k} + \frac{(-1)^{p+1} + 1}{2} + (-1)^{p+1}\delta_{w_-^{-1}(E_{m+j-r}),i} + (-1)^p \delta_{E_{n+j-r},k} = \\ &= \delta_{w_+^{-1}(E_j),i} + (-1)^{p+1}\delta_{w_-^{-1}(E_{m+j-r}),i} + (-1)^p + \frac{(-1)^{p+1} - 1}{2} = \\ &= \delta_{w_+^{-1}(E_j),i} + (-1)^{p+1}\delta_{w_-^{-1}(E_{m+j-r}),i} + \frac{(-1)^p - 1}{2}. \end{aligned}$$

Наконец, если $mp+j>k$, то $k\notin E_j$, $k\notin E_{n+j-r}$, и

$$\begin{aligned}\varphi_{ij} &= \epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3=\\ &= \delta_{w_+^{-1}(E_j),i}-\delta_{E_j,k}+\frac{(-1)^{p+1}+1}{2}+(-1)^{p+1}\delta_{w_-^{-1}(E_{m+j-r}),i}+(-1)^p\delta_{E_{n+j-r},k}=\\ &= \delta_{w_+^{-1}(E_j),i}+(-1)^{p+1}\delta_{w_-^{-1}(E_{m+j-r}),i}+\frac{(-1)^p-1}{2}.\end{aligned}$$

Случай $j\le r$ доказан. Случай $j>r$ доказывается аналогично. Прямое вычисление показывает, что справедлива следующая лемма.

Лемма 3.3 *Пусть* $\varPhi=(\varphi_{ij})_{i,j=1}^m$, $\varPhi'=(\varphi'_{ij})_{i,j=1}^m$, $\varPhi''=(\varphi''_{ij})_{i,j=1}^m$, *где*

$$\varphi'_{ij}=2\delta_{i,w_+^{-1}(E_j)}-1,\qquad \varphi''_{ij}=\begin{cases}-2\delta_{i,w_-^{-1}(E_{m+j-r})}+1 & \text{для } j\le r,\\ 2\delta_{i,w_-^{-1}(E_{j-r})}-1 & \text{для } j>r.\end{cases}$$

Тогда

$$2\varPhi=\varPhi'+(-1)^p\varPhi''.$$

Предложение 3.4 *Пусть* e_j *— единичная матрица порядка* j,

$$\omega_r=\begin{pmatrix}0 & e_{m-r}\\ e_r & 0\end{pmatrix},\qquad \varepsilon_r=\begin{pmatrix}-e_r & 0\\ 0 & e_{m-r}\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathrm{rk}\,\varPhi=\mathrm{rk}\,(w_+w_-^{-1}\omega_r+(-1)^p\varepsilon_r).$$

Докажем прежде такую лемму.

Лемма 3.5 *Пусть* $f_1,\dots,f_m$ *— базис комплексного векторного пространства, в котором действуют операторы* $\varPhi$, $\varPhi'$, $\varPhi''$, ω_r, ε_r, w_+, w_-. *Тогда*

$$\begin{gathered}\varPhi'(f_k)=w_+^{-1}(f_1+\ldots+f_k-f_{k+1}-\ldots-f_m),\\ \varPhi''(f_k)=w_-^{-1}\omega_r\varepsilon_r(f_1+\ldots+f_k-f_{k+1}-\ldots-f_m).\end{gathered}$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Пусть

$$\varPhi'(f_k)=a',\quad w_+^{-1}(f_1+\ldots f_k-f_{k+1}-\ldots-f_m)=b'.$$

Тогда

$$a'_i=2\delta_{i,w_+^{-1}(E_k)}-1=\begin{cases}1, & \text{если } i\in w_+^{-1}(E_k),\\ -1, & \text{если } i\notin w_+^{-1}(E_k).\end{cases}$$

С другой стороны,

$$w_+^{-1}(f_1+\ldots f_k-f_{k+1}-\ldots-f_m)=f_{w_+^{-1}(1)}+\ldots+f_{w_+^{-1}(k)}-f_{w_+^{-1}(k+1)}-\ldots-f_{w_+^{-1}(m)},$$

и, значит,

$$b'_i=\begin{cases}1, & \text{если } i\in\{w_+^{-1}(1),\dots,w_+^{-1}(k)\},\\ -1, & \text{если } i\in\{w_+^{-1}(k+1),\dots,w_+^{-1}(m)\},\end{cases}=\begin{cases}1, & \text{если } i\in w_+^{-1}(E_k),\\ -1, & \text{если } i\notin w_+^{-1}(E_k),\end{cases}=a'_i$$

Первое равенство доказано. Докажем второе равенство в случае, когда $k\le r$ (случай $k>r$ доказывается аналогично). Пусть

$$\varPhi''(f_k)=a'',\quad w_-^{-1}\omega_r\varepsilon_r(f_1+\ldots f_k-f_{k+1}-\ldots-f_m)=b''.$$

Тогда, так как $k \le r$, то

$$a_i'' = -2\delta_{i,w_-^{-1}(E_{m+k-r})} + 1 = \begin{cases} -1, & \text{если } i \in w_-^{-1}(E_{m+k-1}), \\ 1, & \text{если } i \notin w_-^{-1}(E_{m+k-r}). \end{cases}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} b'' &= w_-^{-1}\omega_r\epsilon_r(f_1 + \ldots + f_k - f_{k+1} - \ldots - f_m) = \\ &= w_-^{-1}\omega_r(-f_1 - \ldots - f_k + f_{k+1} + \ldots + f_r - f_{r+1} - \ldots - f_m) = \\ &= -f_{w_-^{-1}\omega_r(1)} - \ldots - f_{w_-^{-1}\omega_r(k)} + f_{w_-^{-1}\omega_r(k+1)} + \ldots + f_{w_-^{-1}\omega_r(r)} - \\ &\quad -f_{w_-^{-1}\omega_r(r+1)} - \ldots - f_{w_-^{-1}\omega_r(m)}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\omega_r(1) = m - r + 1, \ldots, \omega_r(k) = m - r + k, \omega_r(k+1) = m - r + k + 1, \ldots, \omega_r(r) = m,$$
$$\omega_r(r+1) = 1, \ldots, \omega_r(m) = m - r.$$

Поэтому

$$b'' = -f_{w_-^{-1}(1)} - \ldots - f_{w_-^{-1}(m-r+k)} + f_{w_-^{-1}(m-r+k+1)} + \ldots + f_{w_-^{-1}(m)},$$

и, значит,

$$\begin{aligned} b_i'' &= \begin{cases} -1, & \text{если } i \in \{w_-^{-1}(1), \ldots, w_-^{-1}(m-r+k)\}, \\ 1, & \text{если } i \in \{w_+^{-1}(m-r+k+1), \ldots, w_+^{-1}(m)\}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} -1, & \text{если } i \in w_+^{-1}(E_{m+k-r}), \\ 1, & \text{если } i \notin w_+^{-1}(E_{m+k-r}), \end{cases} = a_i''. \end{aligned}$$

Доказательство предложения 3.4

$$\begin{aligned} \operatorname{rk}\Phi &= \operatorname{rk}(2\Phi) = \operatorname{rk}(\Phi' + (-1)^p\Phi'') = \operatorname{rk}(w_+^{-1} + (-1)^p w_-^{-1}\omega_r\varepsilon_r) = \\ &= \operatorname{rk} w_+^{-1}(\varepsilon_r + (-1)^p w_+ w_-^{-1}\omega_r)\varepsilon_r = \operatorname{rk}(w_+ w_-^{-1}\omega_r + (-1)^p\varepsilon_r). \end{aligned}$$

Предложение доказано. Непосредственным следствием из него служит следующая теорема.

Теорема 3.6 *Размерность симплектического листа $\mathcal{L}_w$ из $\mathrm{Symp}_w\mathcal{V}$ вычисляется по формуле:*

$$\dim\mathcal{L}_w = m(n-m) + l(w) + \operatorname{rk}(w_+ w_-^{-1}\omega_r + (-1)^p\varepsilon_r),$$

где $l(w)$ означает сумму чисел инверсий в подстановках w_+, w_-.

Доказательство. Согласно [4],

$$\dim\mathcal{L}_w = \mathrm{GKdim}\,\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]/\mathcal{P}, \qquad \mathcal{P} \in \mathrm{Prim}_w\mathbf{C}_q[\mathcal{V}].$$

При этом $\mathcal{P}$ имеет вид $\mathcal{P} = \mathcal{P}_w + \widetilde{\mathcal{P}}_w$, где идеал $\widetilde{\mathcal{P}}_w$ порожден максимальным идеалом алгебры Center $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ (см [4, предл. 3.1], [6, 2.3]). Следовательно

$$\begin{aligned} \dim\mathcal{L}_w &= mn - (m^2 - m - l(w)) - (m - \operatorname{rk}(w_+ w_-^{-1}\omega_r + (-1)^p\varepsilon_r)) = \\ &= m(n-m) + l(w) + \operatorname{rk}(w_+ w_-^{-1}\omega_r + (-1)^p\varepsilon_r). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В заключение отметим, что в [1, 2, 3] изучались примитивные идеалы на квантовых группах и их связь с симплектическими листами. В частности, на группе симплектический лист типа w имеет размерность $l(w) + \mathrm{rk}\,(w_+ w_-^{-1} - Id)$ (см., например, [1, теорема A.3.2]). Полагая в теореме 3.6 $m = n$, нетрудно убедиться в согласованности наших результатов с результатами [1, 2, 3].

Слова благодарности. Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю Александру Николаевичу Панову за внимание и поддержку, а также господам Левассье и Жозефу за то, что они прислали ему оттиски своих работ.

Литература

[1] T. J. Hodges and T. Levassuer. Primitive ideals of $\mathbf{C}_q[SL(3)]$, Comm. Math. Phys., 156(1993). P. 581-605.

[2] T. J. Hodges and T. Levassuer. Primitive ideals of $\mathbf{C}_q[SL(n)]$, J. Algebra, 168(1994). P. 455-468.

[3] A. Joseph. On the Prime and Primitive Spectra of the Algebra of Functions on a Quantum Group, J. Algebra, 169(1994). P. 441-511.

[4] В. Г. Мосин. Примитивные идеалы и симплектические листы квантовых матриц // Вестник СамГУ. N 3(6). 1997.

[5] В. Г. Мосин, А. Н. Панов. Тела частных и центральные элементы многопараметрических квантований. Мат. сборник. 1995. Т.187. N 6. С. 53-72.

[6] K. P. Goodearl, E. S. Letzter. Prime Idiels in Skew and q-Skew Polinomial Rings, Mem. Amer. Soc., N 521, 1994.

PRIMITIVE IDEALS AND SYMPLECTIC LEAVES OF QUANTUM MATRIXES (PART 2)

V. G. Mosin[2]

The dimensions of symplectic leaves on Poisson structure associated with quantum $m \times n$-matrixes are calculated.

[2]Mosin Vladimir G., dept. of math. Samara state university