БИРАЦИОНАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АРИФМЕТИКА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП, III

В.Е.Воскресенский[1]

Первые главы опубликованы в выпусках Вестника СамГУ N2 и N4 за 1997 год. В данной третьей части работы подробно излагается конструкция знаменитой меры Тамагавы в адельных группах. Проведено вычисление чисел Тамагавы в ряде важных случаев. Выведена формула Зигеля в форме Тамагавы, показано ее применение на ряде классических примеров. Проведен тщательный расчет локальных p-адических объемов, которые необходимы при получении точных формул.

Содержание

Глава V. ЧИСЛА ТАМАГАВЫ

Пусть G – связная линейная алгебраическая группа, определенная над полем алгебраических чисел k, A – кольцо аделей поля k. Поскольку адельная группа $G(A)$ локально-компактна в адельной топологии, то на ней существует левоинвариантная мера Хаара, которая определена однозначно с точностью до положительного множителя. Как известно, на группах Ли мера Хаара может быть построена исходя из левоинвариантной ненулевой дифференциальной формы максимальной степени. Удивительно, что такой прием, примененный к группе $G(A)$, приводит к мере Хаара, не зависящей от выбора исходной дифференциальной формы. Это привело к открытию так называемой меры Тамагавы, позволившей еще глубже проникнуть в тайны арифметики алгебраических групп. Теперь об этом более подробно.

[1]Воскресенский Валентин Евгеньевич. Кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета

§14. МЕРА ХААРА НА АДЕЛЬНОЙ ГРУППЕ

14.1. Произведение локальных мер. Нормируем меру Хаара $(dx)_v$ полного поля k_v следующим образом:

если $k_v = \mathbf{R}$, то $(dx)_v$ – обычная мера Лебега,

если $k_v = \mathbf{C}$, то $(dx)_v = idz \wedge d\bar{z} = 2dx \wedge dy$ – удвоенная мера Лебега на плоскости,

если $k_v = k_\wp$, то мера $(dx)_\wp$ нормирована так, чтобы объем $(dx)_\wp(O_\wp) = 1$.

Задание меры Хаара на k_v однозначно определяет меру Хаара и на пространстве k_v^n. Пусть теперь G – связная линейная алгебраическая группа над числовым полем k и ω – левоинвариантная ненулевая дифференциальная k-форма максимальной степени на G, $\dim G = n$. Форма ω называется инвариантной плотностью или калибровочной формой. Две такие формы отличаются множителем $\lambda \in k^*$. Форма ω определяет меру ω_v на группе $G(k_v)$ следующим образом. Для каждой точки $g \in G(k_v)$ имеется окрестность U этой точки и гомеоморфизм $\varphi : V \to U$ открытой области V из k_v^n такой, что форма $\varphi^*(\omega)$ представима на V в виде

$$\varphi^*(\omega) = h(x)dx_1 \wedge .. \wedge dx_n,$$

где $x_1, .., x_n$ – координаты в k_v^n, а $h(x)$ – степенной ряд от $x_1, .., x_n$, сходящийся в V. Для любой непрерывной вещественной функции f на $G(k_v)$ с компактным носителем в U полагаем

$$\omega_v(f) = \int\limits_V f(\varphi(x))|h(x)|_v (dx_1 \wedge .. \wedge dx_n)_v.$$

Хорошо известно, А.Вейль [2], что $\omega_v(f)$ не зависит от выбора локальных координат и мы стандартным образом получаем меру Хаара ω_v на $G(k_v)$. Теперь удобно работать с целой формой группы G. Будем просто считать, что G есть O-групповая схема, где O – кольцо целых элементов в поле k, в §11 показано, что такие целые формы всегда существуют. Пусть $m_\wp$ – объем компактной группы $G(O_\wp)$ относительно меры $\omega_\wp$. Бесконечное произведение $\prod_\wp m_\wp$ может быть и расходящимся. В этом случае можно найти последовательность положительных чисел $\{c_\wp\}$ такую, что произведение $\prod_\wp c_\wp m_\wp$ абсолютно сходится. Последовательность $\{c_\wp\}$ называется системой множителей сходимости. Имея множители сходимости $c_\wp$, можно определить меру Хаара на $G(A)$ как произведение локальных мер

$$\mu = \prod_{v|\infty} \omega_v \prod_\wp c_\wp \omega_\wp.$$

Замечательное свойство меры μ заключается в том, что μ не зависит от выбора инвариантной плотности ω. В самом деле, если заменить ω на $\lambda\omega$, где $\lambda \in k^*$, то $(\lambda\omega)_v = |\lambda|_v \omega_v$, а $\prod_v |\lambda|_v = 1$ в силу формулы произведения. Второй замечательный факт. Оказывается, систему множителей сходимости можно выбрать вполне каноническим способом, используя свойства L-функции Артина.

14.2. Вычисление локальных объемов. Для любого $r \geq 0$ и каждого простого $\wp$ имеем конечное фактор-кольцо $O/\wp^r = O_\wp/\wp^r$ и эпиморфизмы

$$O_\wp \to O_\wp/\wp^r, \ O_\wp/\wp^{r+1} \to O_\wp/\wp^r.$$

Поэтому имеем систему конгруэнц-подгрупп

$$G^{(r)}(O_\wp) = \mathrm{Ker}\,[G(O_\wp) \to G(O_\wp/\wp^r)], \ G^{(r+1)}(O_\wp) \subset G^{(r)}(O_\wp), \ G^{(0)}(O_\wp) = G(O_\wp).$$

Группы $G^{(r)}(O_\wp)$ являются нормальными подгруппами в $G(O_\wp)$ и образуют систему окрестностей единицы группы $G(k_\wp)$, т.е. определяют $\wp$-адическую топологию группы $G(k_\wp)$. Если групповая $O_\wp$-схема $G_\wp = G \otimes_O O_\wp$ является гладкой над $O_\wp$, то отображение $G(O_\wp) \to G(O_\wp/\wp^r)$ является эпиморфизмом для любого $r \geq 0$. Будем считать, что G содержится в $GL_O(n) = \operatorname{Spec} O[g_{11},..,g_{nn},\ \det(g_{ij})^{-1}]$. Пусть $\mathbf{gl}(n,k)$ – алгебра Ли группы $GL_k(n)$, выбор координат g_{ij} позволяет выбрать базис левоинвариантных векторных полей X_{ij} в $\mathbf{gl}(n,k)$ по правилу

$$(X_{ij})_E(g_{\alpha\beta}) = \begin{cases} 1, \ \textit{если} & (i,j) = (\alpha,\beta), \\ 0, \ \textit{если} & (i,j) \neq (\alpha,\beta), \end{cases}$$

где E – единица в $GL(n,k)$. Отображение $X_{i,j} \to (X_{i,j})_E$ позволяет отождествить алгебру Ли $\mathbf{gl}(n,k)$ с алгеброй квадратных матриц $M(n,k)$ и мы постоянно будем пользоваться этим отождествлением. Пусть $\mathbf{gl}(n,O)$ – решетка в $\mathbf{gl}(n,k)$, натянутая на базис $X_{i,j}$. Для каждого $\wp$ имеем аналогичную решетку $\mathbf{gl}(n,O_\wp) = \mathbf{gl}(n,O) \otimes O_\wp$, содержащую $\mathbf{gl}(n,O)$. Имеем убывающую цепочку $O_\wp$-модулей

$$\mathbf{gl}(n,O_\wp) \supset \mathbf{gl}(n,\wp) \supset \mathbf{gl}(n,\wp^2) \supset ..,$$

где $\mathbf{gl}(n,\wp^a) = \wp^a\mathbf{gl}(n,O_\wp)$. Пусть $\mathbf{g}(k)$ – алгебра Ли группы $G(k) \subset GL(n,k)$, тогда $\mathbf{g}(k)$ есть подалгебра в $\mathbf{gl}(n,k)$. Положим

$$\mathbf{g}(O) = \mathbf{g}(k) \cap \mathbf{gl}(n,O),\ \mathbf{g}(O_\wp) = \mathbf{g}(k_\wp) \cap \mathbf{gl}(n,O_\wp).$$

Будем считать, что $\mathbf{g}(O)$ имеет базис $Y_1,..,Y_m,\ m = \dim G$. Если это не так, вместо кольца O нужно взять кольцо $O_S \supset O$ с достаточно большим конечным множеством S, тогда $\mathbf{g}(O_S)$ имеет базис. Положим, далее $\mathbf{g}^{(r)}(O_\wp) = \mathbf{g}(O_\wp) \cap \mathbf{gl}(n,\wp^r)$. Введем теперь канонические координаты в группах $G(k_\wp)$ для $\wp$ вне S. Рассмотрим переменное векторное поле

$$Y = t_1Y_1 + .. + t_mY_m,$$

где t_i – независимые переменные. Формальный ряд

$$\exp Y = \sum_{a=0}^{\infty} Y^a/a!$$

сходится в некоторой окрестности нуля алгебры $\mathbf{g}(k_\wp)$ и определяет аналитический гомеоморфизм множеств $\mathbf{g}^{(r)}(O_\wp)$ и $G^{(r)}(O_\wp)$ для всех $r \geq r_0$, номер r_0 зависит от $\wp$ и $r_0 = 1$ почти для всех $\wp$. Выберем теперь в пространстве левоинвариантных дифференциальных форм на группе G базис $\omega_1,..,\omega_m$, дуальный к базису $Y_1,..,Y_m$, а в качестве инвариантной плотности возьмем форму $\omega = \omega_1 \wedge .. \wedge \omega_m$. Пусть

$$\varphi(t_1,..,t_m) = \exp(t_1Y_1 + .. + t_mY_m).$$

Тогда φ есть гомеоморфное отображение

$$(\wp^r)^m = \wp^r \times .. \times \wp^r \to G^{(r)}(O_\wp),\ \wp \notin S.$$

В координатах $t_1,..,t_m$ форма ω имеет вид

$$\varphi^*(\omega) = \det(\sum_{a=0}^{\infty} B^a/(a+1)!)dt_1 \wedge .. \wedge dt_m,\ B = adY.$$

Для достаточно большого r

$$v_\wp(\det(\sum_{a=0}^{\infty} B^a/(a+1)!)) = 1 \tag{1}$$

и, по определению меры Хаара $\omega_\wp$, имеем

$$\omega_\wp(G^{(r)}(O_\wp)) = \int\limits_{\wp^r\times..\times\wp^r} |\varphi^*(\omega)|_\wp = \int\limits_{\wp^r\times..\times\wp^r} (dt_1\wedge..\wedge dt_m)_\wp = (N\wp)^{-mr}.$$

Теорема. Пусть ω – инвариантная плотность группы G, определенная над полем k. Тогда почти для всех $\wp$ имеем равенство

$$\omega_\wp(G(O_\wp)) = |G(\mathbf{F}_\wp)|(N\wp)^{-m},\ m = \dim G.$$

Доказательство следует из формулы (1), инвариантности меры $\omega_\wp$, разбиения на классы

$$G(O_\wp) = \cup_{i=1}^{N_r} a_i G^{(r)}(O_\wp),\ N_r = |G(O_\wp/\wp^r)|,$$

и того факта, что почти для всех $\wp$ число r можно взять равным 1. $\triangle$

Таким образом, для любой связной алгебраической группы G над полем k можно поставить вопрос об абсолютной сходимости бесконечного произведения

$$\prod_{\wp\notin S} |G(\mathbf{F}_\wp)|(N\wp)^{-m},\ m = \dim G. \tag{2}$$

Мы условились считать, что G определена над O. Впрочем, для выяснения вопроса абсолютной сходимости произведения (2) выбор конечного множества S не имеет значения. Будем говорить, что группа G имеет тип I , если бесконечное произведение (2) абсолютно сходится для некоторого S. В этом случае произведение

$$\prod_{v|\infty}\omega_v \prod_{\wp}\omega_\wp$$

определяет меру Хаара на $G(A)$.

14.3. Канонические множители сходимости. Рассмотрим сначала три частных, но важных случая. Пусть G – связная унипотентная группа над k. Многообразие G изоморфно аффинному пространству $\mathbf{A}_k^n$. Отсюда $|G(\mathbf{F}_\wp)| = (N\wp)^n$ почти для всех $\wp$, поэтому $|G(\mathbf{F}_\wp)|(N\wp)^{-n} = 1$ для таких $\wp$. Имеем первый результат.

Теорема 1. Всякая связная унипотентная группа имеет тип (I), причем бесконечное произведение (2) равно 1. $\triangle$

Пусть теперь G – связная полупростая группа над полем k, $\bar{G}_\wp$ – ее гладкая редукция по простому модулю. В работе Р.Стейнберга [1] показано, что для связной полупростой группы $\bar{G}_\wp$, определенной над конечным полем $\mathbf{F}_\wp$,справедлива оценка

$$q^N\prod_{i=1}^{l}(q^{a_i}-1) \le |\bar{G}_\wp(\mathbf{F}_\wp)| \le q^N\prod_{i=1}^{l}(q^{a_i}+1),$$

где $q = N\wp = |\mathbf{F}_\wp|$, l – ранг группы $\bar{G}_\wp$, т.е. размерность максимального тора, a_i – степени однородных инвариантов группы Вейля W, действующей отражениями в вещественном линейном пространстве V размерности l и в алгебре полиномов на

V, $N=\sum_{i=1}^{l}(a_i-1)$ – число положительных корней. Поскольку $n=\dim G=2N+l$, то

$$\prod_{i=1}^{l}(1-q^{-a_i})\leq |G_{\wp}(\mathbf{F}_{\wp})|q^{-n}\leq \prod_{i=1}^{l}(1+q^{-a_i}).$$

Далее, числа $a_i\geq 2$. Это следует из достаточно тонкого результата, связывающего числа Бетти b_i максимальной компактной подгруппы в комплексной группе $G(\mathbf{C})$ и числа a_i. А именно, справедлива формула

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i=\prod_{i=1}^{l}(1+t^{2a_i-1}).$$

Поскольку $b_1=b_2=0$, то $a_i\geq 2$. Но в этом случае произведение

$$\prod_{q}(1\pm q^{-a_i})$$

абсолютно сходится для каждого i, $1\leq i\leq l$. Итак, имеем второй результат.

Теорема 2. Всякая связная полупростая группа имеет тип I . $\triangle$

Пусть теперь T – алгебраический тор, определенный над полем k и разложимый над конечным расширением Галуа L с группой П. Пусть X – каноническая целая форма тора T, символ $T(\mathbf{F}_{\wp})$ будет обозначать $X(\mathbf{F}_{\wp})$. По теореме 9.3 имеем

$$|T(\mathbf{F}_{\wp})|=\det(qE-h(\sigma_{\wp}))$$

в точках очень хорошей редукции, h – представление группы П, определяемое решеткой $\hat{T}$, $\sigma_{\wp}$ – автоморфизм Фробениуса. Отсюда

$$|T(\mathbf{F}_{\wp})|q^{-m}=\det(E-h(\sigma_{\wp})(N_{\wp})^{-1})=L_{\wp}(1,\ \chi_T,\ L/k)^{-1},$$

где χ_T – характер представления h.

Теорема 3. Пусть T – алгебраический k-тор. Тогда

$$|T(\mathbf{F}_{\wp})|q^{-m}=L_{\wp}(1,\ \chi_T,\ L/k)^{-1}$$

для идеалов $\wp$ неразветвленных в поле разложения. Произведение (2) расходится, если $\hat{T}\neq(0)$. Тор не принадлежит типу I . $\triangle$

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть G – связная линейная алгебраическая k-группа размерности n, она распадается в полупрямое произведение k-групп $G=UR$, где U – унипотентна, а R – редуктивна. Почти для всех $\wp$ имеем прямое произведение групп точек со значениями в конечном поле

$$G(\mathbf{F}_{\wp})=U(\mathbf{F}_{\wp})R(\mathbf{F}_{\wp}).$$

Как мы видели, для унипотентной группы $|U(\mathbf{F}_{\wp})|(N\wp)^{-r}=1$, $r=\dim U$, поэтому

$$|G(\mathbf{F}_{\wp})|(N\wp)^{-n}=|R(\mathbf{F}_{\wp})|(N\wp)^{-m},\ m=\dim R.$$

Далее, редуктивная группа R изогенна над полем k прямому произведению подгрупп $T\times S$, где T – тор, S – полупростая группа. Поскольку связные изогенные группы, определенные над конечным полем $\mathbf{F}_{\wp}$, имеют одинаковое количество $\mathbf{F}_{\wp}$-точек, то $|R(\mathbf{F}_{\wp})|=|T(\mathbf{F}_{\wp})||S(\mathbf{F}_{\wp})|$ почти для всех $\wp$.

Приведенные выше теоремы 2 и 3 показывают, что сходимость произведения (2) зависит от наличия в R вышеуказанного тора T. Тор T есть связная компонента центра группы R, пересечение $T(\bar{k}) \cap S(\bar{k})$ конечно. Вложение T в R определяет вложение $\alpha : \hat{R} \to \hat{T}$, причем $\alpha(\hat{R})$ имеет конечный индекс в $\hat{T}$. Отсюда

Теорема 4. Группа G имеет тип I тогда и только тогда, когда $\hat{G} = (0)$ или эквивалентно $G = US$. $\triangle$

14.4. Мера Тамагавы. Теорема 3 показывает, что, если $\hat{G} \neq (0)$ и ω – калибровочная форма на G, то

$$\prod_{v|\infty} \omega_v \prod_{\wp} L_{\wp}(1,\ \chi_G)\omega_{\wp}$$

есть мера Хаара на $G(A)$. Здесь χ_G – характер представления группы Галуа расширения $\bar{k}/k$ на решетке $\hat{G}$. Пусть $L(s,\ \chi_G) = \prod_{\wp} L_{\wp}(s,\ \chi_G)$ – L-функция Артина, по предложению 2 п.13.2 функция $L(s,\ \chi_G)$ имеет полюс порядка r при $s = 1$, где r – ранг подрешетки $(\hat{G})_k$ характеров, определенных над полем k. Положим

$$\rho(G) = \lim_{s \to 1} (s-1)^r L(s,\ \chi_G).$$

Заметим, что $\rho(G) > 0$. Пусть далее Δ_k – дискриминант расширения $k/\mathbf{Q}$. Мера

$$\tau = \rho(G)^{-1} |\Delta_k|^{-\frac{\dim G}{2}} \prod_{v|\infty} \omega_v \prod_{\wp} L_{\wp}(1,\ \chi_G)\omega_{\wp} \tag{1}$$

называется мерой Тамагавы, она не зависит от выбора формы ω.

Модулем локально-компактной адельной группы $G(A)$ называется гомоморфизм $a \to ||(\det \circ Ad)(a)||^{-1}$ группы $G(A)$ в $\mathbf{R}_+$. Из этого следует, что группа $G(A)$ унимодулярна, если G редуктивна, либо коммутативна, либо унипотентна, поскольку в этих случаях характер $\det \circ Ad$ тривиален.

Всякий рациональный характер $\xi \in (\hat{G})_k$ определяет гомоморфное отображение группы $G(A)$ в группу иделей I_k поля k, пусть

$$G^1(A) = \{a \in G(A) \mid ||\xi(a)|| = 1\ \forall \xi \in (\hat{G})_k\}.$$

Фактор-группа $G(A)/G^1(A)$ изоморфна прямому произведению групп $(\mathbf{R}_+)^r$. Группа $G^1(A)$ всегда унимодулярна. Пусть α – каноническая форма объема

$$\frac{dt_1..dt_r}{t_1..t_r}$$

на $(\mathbf{R}_+)^r$ и β – мера на $G(A)/G^1(A)$, полученная переносом меры α. Определим меру τ на $G^1(A)$ по формуле $\tau_1 = \tau/\beta$. Группа $G(k)$ вкладывается в $G^1(A)$ в силу формулы произведения, $G(k)$ – дискретна в $G^1(A)$. Поскольку группа $G^1(A)$ унимодулярна, то на фактор-пространстве $G^1(A)/G(k)$ существует мера, инвариантная относительно группы $G^1(A)$ и являющаяся фактор-мерой меры τ_1 по мере на $G(k)$, приписывающей каждой точке из $G(k)$ значение 1. Обозначим эту фактор-меру снова τ_1. По известной теореме А.Бореля и Хариш-Чандры [1], объем фактора $G^1(A)/G(k)$ относительно меры τ_1 конечен. Это число и называется числом Тамагавы $\tau(G)$ группы G. Заметим, если $(\hat{G})_k = (0)$, то $G^1(A) = G(A)$ и $\tau_1 = \tau$. Число Тамагавы является важной арифметической характеристикой группы G, его изучению посвящено и посвящается много работ. Как оказалось, это число всегда рационально, но, к сожалению, мы не имеем пока прямого простого способа его вычисления. К примеру, доказательство соотношения $\tau(G) = 1$ для односвязных полупростых групп представляет собой весьма серьезное самостоятельное предприятие. Важнейшие результаты по вычислению чисел Тамагавы содержатся в работах А.Вейля [2], Оно [1-3], Ленглендса [1], Остерле [1], Коттвица [1], Черноусова [1], Сансюка [1]. Назрела необходимость обстоятельного изложения всех имеющихся результатов о числах Тамагавы в специальной монографии. Ведь эти результаты содержатся только в журнальных статьях. Мы приведем несколько примеров вычисления чисел Тамагавы, в которых будут видны и их роль и связь с классическими задачами. Поучительно рассмотреть числа Тамагавы в простейших случаях.

Теорема 1. $\tau(\mathbf{G}_{a,k}) = 1$.

Доказательство. Пусть dx – калибровочная форма на $\mathbf{G}_a$, группа G_a – унипотентна,

$$\tau_1 = \tau = |\Delta_k|^{-\frac{1}{2}} \prod_{v|\infty} (dx)_v \prod_{\wp} (dx)_{\wp}, \ \mathbf{G}_a(A_k) = A_k = A.$$

Пусть $e_1, .., e_n$ – базис кольца целых O поля k и $\sigma_i : k \to \mathbf{C}$ – различные погружения поля k в поле комплексных чисел, $1 \leq i \leq n$, $n = (k : \mathbf{Q})$, $n = r_1 + 2r_2$, r_1 – количество вещественных погружений, $2r_2$ – мнимых

$$A/k \cong A^{\infty}/O = (\prod_{v|\infty} k_v)/O \times \prod_{\wp} O_{\wp}.$$

Поскольку $(dx)_{\wp}(O_{\wp}) = 1$, то

$$\tau(\mathbf{G}_{a,k}) = \tau(A/k) = \tau((\prod_{v|\infty} k_v)/O).$$

Кольцо O погружается в $\prod_{v|\infty} k_v$ диагональным образом:

$$e_j \to (\sigma_i(e_j)) = \bar{e}_j, \ 1 \leq i \leq r_1 + r_2, \ 1 \leq j \leq n.$$

В пространстве $\prod_{v|\infty} k_v$ введем вещественные координаты $\sum_{j=1}^{n} t_j \bar{e}_j$. Точки пространства $\prod_{v|\infty} k_v$, у которых $0 \leq t_j < 1$, образуют фундаментальную область F для группы O, поэтому

$$\tau(A/k) = |\Delta_k|^{-\frac{1}{2}} \int\limits_F \prod_{i=1}^{r_1} dz_i \prod_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} 2dx_i dy_i = |\Delta_k|^{-\frac{1}{2}} |\det(\sigma_i(e_j))| \int\limits_F dt_1..dt_n = 1,$$

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} t_i \sigma_i(e_j), \ 1 \leq i \leq n. \ \triangle$$

Теорема 2. $\tau(\mathbf{G}_{m,k}) = 1$.

Доказательство. В качестве инвариантной формы на группе $\mathbf{G}_m$ возьмем форму $\omega = dx/x$, $G_m(A_k) = I_k$ – группа иделей. В данном случае в формуле (1) L-функция есть дзета-функция Дедекинда $\zeta_k(s)$, множители сходимости для каждого $\wp$ имеют вид $(1 - (N\wp)^{-1})^{-1}$ и

$$\rho(G_{m,k}) = \lim_{s \to 1} (s-1)\zeta_k(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} hR}{w_k \sqrt{|\Delta_k|}},$$

где $n = (k : \mathbf{Q})$, h – число классов идеалов поля k, R – регулятор, w_k – число корней из единицы в поле k.

$$\tau = \rho(G_{m,k})^{-1} |\Delta_k|^{-\frac{1}{2}} \prod_{v|\infty} \omega_v \prod_{\wp} \left(1 - \frac{1}{N\wp}\right)^{-1} \omega_{\wp}.$$

Для любой функции F, интегрируемой на $\mathbf{R}_+$, имеем соотношение

$$\int\limits_{I_k/k^*} F(\|a\|)d\tau(a) = \int\limits_{\mathbf{R}_+} \frac{dt}{t} \int\limits_{I_k^1/k^*} F(\|ab\|)d\tau_1(b) = \tau(\mathbf{G}_{m,k}) \int\limits_0^\infty \frac{F(t)dt}{t}. \qquad (2)$$

В качестве функции $F(t)$ удобно взять $2te^{-\pi^2 t}$, тогда

$$\int\limits_0^\infty F(t)\frac{dt}{t} = \int\limits_0^\infty 2e^{-\pi t^2}dt = 1$$

и мы получаем из (2) соотношение

$$\tau(\mathbf{G}_{m,k}) = \int\limits_{I_k/k^*} F(\|a\|)d\tau(a).$$

Далее, из эпиморфизма $I_k \to H(k)$, где $H(k)$ – группа классов идеалов поля k, следует разложение на смежные классы

$$I_k = \cup_{i=1}^h a_i I_k^\infty k^*.$$

Представители a_i могут быть взяты из I_k^1, из инвариантности меры Тамагавы тогда следует равенство

$$\tau(\mathbf{G}_{m,k}) = h \int\limits_{I_k^\infty k^*/k^*} F(\|a\|)d\tau(a). \qquad (3)$$

Имеются следующие очевидные топологические изоморфизмы

$$I_k^\infty k^*/k^* \cong I_k^\infty/E(k) \cong \left(\prod_{v|\infty} k_v^*\right)/E(k) \times \prod_{\wp} O_\wp^*.$$

Отсюда

$$\int\limits_{I_k^\infty k^*/k^*} F(\|a\|)d\tau(a) = \rho(G_{m,k})^{-1}|\Delta_k|^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{(\prod_{v|\infty} k_v^*)/E(k)} F(\|a\|)d\omega_\infty(\tilde{a}), \qquad (4)$$

где $\omega_\infty = \prod_{v|\infty}\omega_v$, $\tilde{a}$ – проекция иделя $a \in I_k^\infty$ на $\prod_{v|\infty} k_v^*$. Пусть

$$\prod_{v|\infty} k_v = \mathbf{R}^{r_1} \times \mathbf{C}^{r_2},\ \mathbf{C} = \mathbf{R}_+ \times S,\ S = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\} -$$

окружность

$$\prod_{v|\infty} k_v^* = \mathbf{R}_+^{r_1+r_2} \times \mu_2^{r_1} \times S^{r_2},\ \mu_2 = \{1, -1\}.$$

Группа $E(k)$ есть прямое произведение свободной группы $E^1(k)$ ранга $r_1 + r_2 - 1$ и группы $W(k)$ корней из 1, $w_k = |W(k)|$. Мера $(d\omega)_v$ на $k_v^* = \mathbf{R}^*$ равна dx/x, мера

$(d\omega)_v$ на $\mathbf{C}^*$ равна $dzd\bar{z}/z\bar{z} = 2dxdy/(x^2+y^2)$. В полярных координатах t, φ имеем равенство $dxdy = tdtd\varphi$, поэтому

$$\int\limits_{(\prod_{v|\infty} k_v^*)/E(k)} F(||\tilde{a}||)d\omega_\infty(a) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{w_k} \int\limits_{\mathbf{R}_+^r/E^1(k)} F(t_1,..,t_r)\frac{dt_1..dt_r}{t_1..t_r}, \tag{5}$$

где

$$t_i = v_i(a_i),\ ||\tilde{a}|| = \prod_{i=1}^r v_i(a_i),\ \tilde{a} = (a_1,..,a_r),\ a_i \in k_{v_i},\ r = r_1 + r_2.$$

Напомним, что $v_i(z) = z\bar{z} = |z|^2$, если v_i – мнимая точка. Если $a \in E(k)$, то $||\tilde{a}|| = |N_{k/Q(a)}| = 1$. Рассмотрим гомоморфизм $\mathbf{R}_+^r \to \mathbf{R}_+$, определяемый отображением $(t_1,..,t_r) \to t_1..t_r = y$. Ядром служит группа, изоморфная $\mathbf{R}_+^{r-1}$. Учитывая, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{F(y)dy}{y} = 1,$$

мы имеем равенство

$$\int\limits_{\mathbf{R}_+^r/E^1(k)} F(t_1,..,t_r)\frac{dt_1..dt_r}{t_1..t_r} = \int\limits_{\mathbf{R}_+^{r-1}/E^1(k)} \frac{dt_1..dt_{r-1}}{t_1..t_{r-1}}.$$

Последний же интеграл, используя логарифмический изоморфизм $t_i \to \ln t_i$, равен регулятору R поля k. Таким образом, интеграл (5) равен $2^r\pi^{r_2}Rw_k^{-1}$ и, используя равенства (3) и (4), имеем $\tau(\mathbf{G}_{m,k}) = 1$. $\triangle$

Для полноты картины вычислим и $\rho(\mathbf{G}_{m,k}) = \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_k(s)$. Имеем $\zeta_k(s) = \sum_{\mathbf{a}}(N\mathbf{a})^{-s}$, где $\mathbf{a}$ пробегает все целые идеалы поля k, отличные от нуля. Для $s > 1$ ряд абсолютно сходится, поэтому $\zeta_k(s) = \sum_{i=1}^h \zeta_k(s, C_i)$, где $\zeta_k(s, C_i) = \sum (N\mathbf{a})^{-s}$, $\mathbf{a}$ пробегает все целые идеалы из фиксированного класса идеалов C_i. Пусть $\mathbf{a}_i$ – целый идеал в классе C_i^{-1}. Тогда для любого идеала $\mathbf{a}$ из класса C_i произведение $\mathbf{a}\mathbf{a}_i$ будет главным идеалом (α), $\alpha \in k^*$. Отображение $\mathbf{a} \to (\alpha)$ определяет взаимно-однозначное отображение между целыми идеалами класса C_i и главными идеалами, делящимися на $\mathbf{a}_i$. Отсюда

$$\zeta_k(s, C_i) = N(\mathbf{a}_i)^s \sum_{\alpha \in \mathbf{a}_i} |N(\alpha)|^{-s},\ \alpha \neq 0. \tag{6}$$

Представляя числа поля k точками в вещественном пространстве $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \otimes_Q k$, где $n = (k : \mathbf{Q})$, можно ряд (6) записать в виде ряда по точкам решетки в $\mathbf{R}^n$, которые содержатся в некотором конусе X

$$\zeta_k(s, C_i) = (N\mathbf{a}_i)^s \sum_{x \in M_i \cap X} |N(x)|^{-s}. \tag{7}$$

Здесь M_i – решетка в $\mathbf{R}^n$, представляющая числа из $\mathbf{a}_i$, X – конус в $\mathbf{R}^n$ без вершины, представляющий собой фундаментальную область группы единиц $E(k)$ поля k, действующей линейно умножениями в $\mathbf{R}^n$. Приведем замечательную теорему Дирихле, подробное доказательство которой имеется в книге Боревича и Шафаревича [1].

Теорема 3. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^n$ задан конус X с вершиной в начале координат, на котором определена вещественная положительная функция F, вершина $(0,..,0)$ не лежит в X. Пусть, далее

1) $F(tx) = t^n F(x),\ \forall x \in X,\ t > 0$,

2) тело T, состоящее из тех точек $x \in X$, для которых $F(x) \leq 1$, ограничено и имеет отличный от нуля n-мерный объем $v(T)$. Тогда для любой решетки M в $\mathbf{R}^n$ ряд

$$f(s) = \sum_{x \in M \cap X} \frac{1}{F(x)^s}$$

сходится при $s > 1$ и

$$\lim_{s \to 1+0} (s-1) f(s) = \frac{v(T)}{\Delta}, \tag{8}$$

где Δ – объем основного параллелепипеда решетки M. $\triangle$

Известно, что в представлении $\alpha \to 1 \otimes \alpha$ поля k в $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} k$ целые числа образуют решетку с объемом основного параллелепипеда равным $2^{-r_2}|\Delta_k|^{1/2}$. Для идеала $\mathbf{a}_i$ объем основного параллелепипеда равен $2^{-r_2}|\Delta_k|^{1/2}N(\mathbf{a}_i)$. Подобные вычисления были проделаны при доказательстве теоремы 1. Поэтому из (7) и (8) следует, что

$$\lim_{s \to 1+0} (s-1)\zeta_k(s, C_i) = \frac{2^{r_2} v(T)}{|\Delta_k|^{1/2}}. \tag{9}$$

Формула (9) показывает, что данный предел не зависит от класса C_i, поэтому

$$\lim_{s \to 1+0} (s-1)\zeta_k(s) = \frac{2^{r_2} v(T) h}{|\Delta_k|^{1/2}}. \tag{10}$$

Аналогичные вычисления показывают, что $v(T) = 2^{r_1}\pi^{r_2} R/w_k$. Этим заканчивается вычисление вычета функции $\zeta_k(s)$ при $s = 1$.

14.5. Свойства чисел Тамагавы. Теоремы 1 и 2 показывают разумность введения множителей $\rho(G)^{-1}$ и $|\Delta_k|^{-\dim G/2}$ в определение меры Тамагава (1). Можно только поразиться проницательности создателей этой теории, ибо этих множителей оказалось достаточным для того, чтобы вся картина стала обозримой. Сопоставление $G \to \tau_k(G)$ определяет τ_k как функтор на категории связных алгебраических k-групп G со значениями в вещественных положительных числах.

Теорема. Числа Тамагавы $\tau(G)$ обладают следующими свойствами:

1) $\tau(G_{m,k}) = \tau(G_{a,k}) = 1$,

2) $\tau(G_1 \times_k G_2) = \tau(G_1)\tau(G_2)$,

3) $\tau_k(R_{F/k}(G)) = \tau_F(G)$,

4) $\tau(T) = 1$, если П-модуль $\hat{T}$ проективен.

Свойство 1) уже проверено. Свойства 2) и 3) проверяются прямыми вычислениями с использованием свойств функтора Вейля $R_{F/k}$. Докажем 4). Пусть сначала $\hat{T}$ – пермутационный П-модуль, T – соответствующий квазиразложимый тор. Свойства 1) и 3) показывают тогда, что $\tau(T) = 1$. Если $\hat{T}$ – проективен, то он имеет конечный порядок в группе проективных классов, т.е. существует натуральное число n такое, что $(n\hat{T}) \oplus \hat{X} = \hat{Y}$, где $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ – свободные П-модули, а $n\hat{T}$ – прямая сумма. Отсюда получаем изоморфизм торов $T^n \times_k X = Y$. Свойство 2) показывает тогда, что $\tau(T^n) = 1$, и поскольку группа $\mathbf{R}_+$ не имеет кручения, то $\tau(T) = 1$. $\triangle$

14.6. Числа Тамагавы алгебраических торов. Рассмотрим точную последовательность торов над полем k алгебраических чисел

$$1 \to T' \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} T'' \to 1. \tag{E}$$

Пусть L – общее нормальное поле разложения конечной степени последовательности (E).

Лемма. Если A – кольцо аделей поля k, то индуцированное отображение $\beta: T(A) \to T''(A)$ открыто и индекс $[T''(A) : \beta(T(A))T''(k)]$ конечен.

Доказательство. Пусть S – конечное множество нормирований, содержащее все бесконечные и все разветвленные нормирования в L. Тогда $H^1(\Pi_v, T(O_w)) = 0$ для $w|v$, $v \notin S$ и группы $H^1(k_v, T)$ конечны для всех v. Поэтому $\beta(T(A))$ содержит подмножество вида $B_S \times \prod_{v\notin S} T(O_v)$, B_S имеет конечный индекс в $\prod_{v\in S} T(k_v)$, сверх того, группа $T''(A)/T''(k)T''(A^S)$ – конечна. $\triangle$

Обозначим через $\tau(E)$ следующее отношение:

$$\tau(E) = \frac{\tau(T')\tau(T'')}{\tau(T)}.$$

Т.Оно [2] провел сложные вычисления, в результате обнаружена неожиданно простая связь числа $\tau(E)$ с ранее введенными характеристиками тора T.

Вычисление $\tau(E)$**.** Пусть r – ранг группы $\hat{T}^{\Pi} = (\hat{T})_k$, выберем базис $\chi_1, .., \chi_r$ группы $(\hat{T})_k$ и пусть

$$\Phi : T(A) \to \mathbf{R}_+^r \; -$$

гомоморфизм, определяемый модулями характеров $|\chi_i|$. Отображение Φ определяет изоморфизм

$$T(A)/T^1(A) \cong \mathbf{R}_+^r.$$

Пусть $F(t)$ – интегрируемая функция на $\mathbf{R}_+^r$ относительно канонической меры

$$dt = \frac{dt_1 \wedge .. \wedge dt_r}{t_1..t_r}$$

на $\mathbf{R}_+^r$. Число Тамагавы $\tau(T)$ может быть вычислено из стандартной формулы интегрирования

$$\int\limits_{T(A)/T(k)} F(\Phi(x))dx = \int\limits_{T(A)/T^1(A)} dy \int\limits_{T^1(A)/T(k)} F(\Phi(xz))dz = \tau(T) \int\limits_{\mathbf{R}_+^r} F(t)dt,$$

где dx – мера Тамагавы, dy и dz – согласованные меры на факторах. В качестве функции $F(t)$ удобно взять функцию

$$P(t) = P(t_1, .., t_r) = \prod_{i=1}^{r} 2t_i e^{-\pi t_i^2}.$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathbf{R}_+^r} P(t)dt = 1$$

и мы имеем

$$\tau(T) = \int\limits_{T(A)/T(k)} P(\Phi(x))dT,$$

где dT – мера Тамагавы группы T. Пусть $r,\ r',\ r''$ – ранги групп $(\hat{T})_k,\ (\hat{T}')_k,\ (\hat{T}'')_k$ соответственно, $r = r' + r''$. Отношение $\tau(E)$ принимает вид

$$\tau(E) = \frac{\int\limits_{T'(A)/T'(k)} P'(\Phi_1(x'))dT' \cdot \int\limits_{T''(A)/T''(k)} P''(\Phi_2(x''))dT''}{\int\limits_{T(A)/T(k)} P(\Phi(x))dT}. \tag{1}$$

Последовательность (E) определяет точную последовательность

$$0 \ \to T'(A)/T'(k) \to T(A)T(k) \to \beta(T(A))/\beta(T(k)) \to \ 0$$

и $\beta(T(A))$ открыта в $T''(A)$ по лемме п.14.5. Поэтому имеем

$$\int\limits_{T(A)/T(k)} P(\Phi(x))dT = \int\limits_{\beta(T(A))/\beta(T(k))} dT'' \int\limits_{T'(A)/T'(k)} P(\Phi(xx'))dT'. \tag{2}$$

Точная последовательность (E) определяет точную последовательность П-модулей рациональных характеров

$$0 \ \to \hat{T}'' \xrightarrow{\hat{\beta}} \hat{T} \xrightarrow{\hat{\alpha}} \hat{T}' \to \ 0$$

и гомологическую последовательность

$$0 \ \to (\hat{T}'')_k \to (\hat{T})_k \xrightarrow{\hat{\alpha}} (\hat{T}')_k \to H^1(\Pi, T'').$$

Выберем базисы $\{\chi'_1, .., \chi'_{r'}\},\ \{\chi_1, .., \chi_r\},\ \{\chi''_1, .., \chi''_{r''}\}$ групп $(\hat{T}')_k,\ (\hat{T})_k,\ (\hat{T}'')_k$ таким образом, чтобы $\chi_i = \hat{\beta}(\chi''_i)$ для $1 \le i \le r''$. Тогда

$$\hat{\alpha}(\chi_i) = \sum_{j=1}^{r'} c_{ij}\chi'_j,\ r'' + 1 \le i \le r,$$

и $|\det(c_{ij})| = m$ равен индексу погруппы $\hat{\alpha}[(\hat{T})_k]$ в $(\hat{T}')_k$. Производя теперь вычисления с заменой переменных в формуле (2), получаем

$$\int\limits_{T(A)/T(k)} P(\Phi(x))dT = \frac{\tau(T')}{m} \int\limits_{\beta(T(A))/\beta(T(k))} P_2(\Phi_2(\beta x))dT''$$

и

$$\tau(E) = m\frac{\int\limits_{T''(A)/T''(k)} P_2(\Phi_2(x''))dT''}{\int\limits_{\beta(T(A))/\beta(T(k))} P_2(\Phi_2(\beta x))dT''}.$$

Пусть $\mu : \beta(T(A))/\beta(T(k)) \to T''(A)/T''(k)$. Тогда $\mathrm{Ker}\,(\mu)$ и $Cok(\mu)$ конечны. Стандартные формулы интегрирования дают равенство

$$\int\limits_{\beta(T(A))/\beta(T(k))} P_2(\Phi_2(\beta x))dT'' = \frac{m_1}{m_2} \int\limits_{T''(A)/T''(k)} P_2(\Phi_2(x''))dT'' = \frac{m_1}{m_2}\tau(T''),$$

где $m_1 = |\mathrm{Ker}\,(\mu)|,\ m_2 = |Cok(\mu)|$. Таким образом,

$$\tau(E) = m\frac{m_2}{m_1}. \tag{3}$$

Займемся числами m_1 и m_2. Пусть

$$\varphi_1 : T(A)/T(k) \to T''(A)/T''(k) -$$

гомоморфизм, определяемый отображением $\beta : T(A) \to T''(A)$. Имеем точную последовательность

$$0 \ \to \mathrm{Ker}\,(\varphi_1) \to T(A)T(k) \to T''(A)/T''(k) \to Cok(\varphi_1) \to \ 0.$$

Вычисляя индексы, получаем $m_1 = |Cok(V)|$, $m_2 = |Cok(\varphi_1)|$, где $V : T'(A) \to \mathrm{Ker}\,(\varphi_1)$. Используя последовательность (4) п.11.3, запишем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & T(A)/T(k) & \to C_L(T)^{\Pi} & \to & Ш(T) & \to & 0 \\ & & \downarrow \varphi_1 & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \\ 0 & \to & T''(A)/T''(k) & \to C_L(T'')^{\Pi} & \to & Ш(T'') & \to & 0 \end{array}.$$

Из нее имеем точную последовательность гомологической алгебры

$$0 \ \to \mathrm{Ker}\,(\varphi_1) \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{Ker}\,(\varphi_2) \to \mathrm{Ker}\,(\varphi_3) \to Cok(\varphi_1) \to Cok(\varphi_2) \to Cok(\varphi_3) \to \ 0$$

или

$$0 \ \to Cok(\varepsilon) \to \mathrm{Ker}\,(\varphi_3) \to Cok(\varphi_1) \to Cok(\varphi_2) \to Cok(\varphi_3) \to \ 0.$$

Все группы в этой последовательности конечны и их порядки тогда связаны соотношением

$$|Cok(\varepsilon)||Cok(\varphi_1)||Cok(\varphi_3)| = |\mathrm{Ker}\,(\varphi_3)||Cok(\varphi_2)|.$$

Заметим теперь, что $\mathrm{Ker}\,(\varphi_2) = C_L(T')^{\Pi}$. Имеем коммутативную диаграмму с точной строкой

$$\begin{array}{ccccccc} T'(A) & \xrightarrow{\delta} & C_L(T')^{\Pi} & \to & Ш(T') & \to & 0 \\ & \searrow \nu & \uparrow \varepsilon & & & & \\ & & \mathrm{Ker}\,(\varphi_1) & & & & \end{array}.$$

Легко видеть, что $\delta = \varepsilon \cdot \nu$. Так как $Cok(\delta)$ конечен и ε – мономорфизм, то $Cok(\nu)$ и $Cok(\varepsilon)$ также конечны и имеется равенство

$$|Ш(T')| = |Cok(\delta)| = |Cok(\varepsilon)||Cok(v)| = |Cok(\varepsilon)|m_1.$$

Формула (3) принимает вид

$$\tau(E) = \frac{m|Ш(T)||Cok(\varphi_2)|}{|Ш(T')||Ш(T'')|}.$$

Если ввести обозначение

$$|Ш(E)| = \frac{|Ш(T')||Ш(T'')|}{|Ш(T)|},$$

то

$$\tau(E) = \frac{m|Cok(\varphi_2)|}{|Ш(E)|}.$$

Гомоморфизм $\varphi_2 : C_L(T)^{\Pi} \to C_L(T'')^{\Pi}$ есть часть длинной точной последовательности

$$C_L(T)^{\Pi} \to C_L(T'')^{\Pi} \to H^1(\Pi, C_L(T')) \xrightarrow{\gamma} H^1(\Pi, C_L(T)),$$

откуда $Cok(\varphi_2) = \mathrm{Ker}\,(\gamma)$. С другой стороны, имеем точную последовательность

$$(\hat{T})_k \xrightarrow{\hat{\alpha}} (\hat{T}')_k \to H^1(\Pi, \hat{T}'') \xrightarrow{\gamma_1} H^1(\Pi, \hat{T}) \xrightarrow{\gamma_2} H^1(\Pi, \hat{T}'),$$

из которой, во-первых, следует, что $Cok(\hat{\alpha}) = \mathrm{Ker}\,(\gamma_1)$, а, во-вторых, что $\mathrm{Ker}\,(\gamma) = Cok(\gamma_2)$ по двойственности Тейта-Накаямы. Так как $m = |Cok(\hat{\alpha})|$, то

$$m|Cok(\varphi_2)| = |\mathrm{Ker}\,(\gamma_1)||Cok(\gamma_2)| = \frac{|H^1(\Pi, \hat{T}')||H^1(\Pi, \hat{T}'')|}{|H^1(\Pi, \hat{T})|} = |H(E)|.$$

Получаем замечательное соотношение, открытое Т.Оно.

Теорема 1.

$$\tau(E) = \frac{|H(E)|}{|Ш(E)|}. \quad \triangle \tag{4}$$

Замечание. Эта же формула справедлива и в функциональном случае, хотя имеется некоторая разница в рассуждениях, вызванная отсутствием архимедовых точек. Подробности в статье самого Т.Оно [2]. Соотношение (4) вскрыло существование совершенно новых, неизвестных ранее закономерностей в арифметике алгебраических групп.

Для любого k-тора T пусть

$$\varphi(T) = \varphi(\hat{T}) = \frac{\tau(T)|Ш(T)|}{|H^1(k, \hat{T})|}.$$

Тогда для любой точной последовательности k-торов

$$1 \to T' \to T \to T'' \to 1$$

справедливо равенство

$$\varphi(T) = \varphi(T')\varphi(T'').$$

Это означает, что φ есть гомоморфизм группы Гротендика Gr категории $C(k)$ алгебраических k-торов или категории $\mathcal{G}$-модулей конечного ранга без кручения в группу $\mathbf{R}_+$, $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}\,(k_s/k)$. Переход от модуля $\hat{T}$ к векторному пространству $\mathbf{Q} \otimes \hat{T}$ определяет гомоморфизм $\psi : Gr \to Gr^{\mathbf{Q}}$ группы Gr в группу Гротендика $Gr^{\mathbf{Q}}$ рациональных представлений группы $\mathcal{G}$. По теореме Суона [1] группа $\mathrm{Ker}\,(\psi)$ конечна. Так как группа $\mathbf{R}_+$ не имеет кручения, то φ обращается в 1 на элементах из $\mathrm{Ker}\,(\psi)$. Если k-торы T и T' изогенны, то $\mathbf{Q} \otimes \hat{T} \simeq \mathbf{Q} \otimes \hat{T}'$ и, следовательно, $\varphi(T) = \varphi(T')$. Пусть χ_T – характер представления группы $\mathcal{G}$, определяемый модулем $\hat{T}$. Так как χ_T принимает целые значения, то по теореме Артина об индуцированных характерах имеем соотношение

$$\chi_T = \sum q_i \chi_i,$$

где $q_i \in \mathbf{Q}$, χ_i – характеры, индуцированные тривиальными характерами циклических подгрупп группы $\Pi = \mathcal{G}/\mathcal{G}_0$, где $\mathcal{G}_0$ – максимальная подгруппа, тривиально действующая на $\hat{T}$. Приводя написанное равенство к общему знаменателю, получаем соотношение

$$m\chi_T + \sum m_i \chi_i = \sum m_j \chi_j,$$

где m, m_i, m_j – натуральные числа. Каждый характер вида χ_s определяет пермутационное представление группы Π, а, следовательно, и тор $R_{F/k}(\mathbf{G}_m)$ с точностью до изогении. Получаем изогению торов над полем k

$$T^m \times_k \prod_i R_{F_i/k}(\mathbf{G}_m)^{m_i} \to \prod_j R_{F_j/k}(\mathbf{G}_m)^{m_j}.$$

Поскольку $\varphi(R_{F/k}(\mathbf{G}_m)) = 1$, то $\varphi(T) = 1$. Получаем еще одну знаменитую теорему Т.Оно.

Теорема 2. Пусть k – глобальное поле, T – алгебраический k-тор. Тогда

$$\tau(T) = \frac{|H^1(k, \hat{T})|}{|Ш(T)|}. \qquad \triangle \tag{5}$$

Еще одно важное замечание. Мы видели в §4, что группа $H^1(k, \hat{T})$ изоморфна группе $\operatorname{Pic} T$. Поэтому соотношение (5) может быть переписано в форме

$$\tau(T) = \frac{|\operatorname{Pic} T|}{|Ш(T)|}. \tag{6}$$

Правая часть формулы (6) определена для любых линейных алгебраических групп G. Заманчивая гипотеза о справедливости равенства (6) для любых связных линейных алгебраических групп оказалось верной. Это показал Сансюк [1].

Теорема 2 показывает, что $\tau(T)$ – рациональное число и Оно построил пример тора T, для которого число $\tau(T)$ не является целым, см. пример ниже. Исходя из такого примера, ему удалось построить первый пример полупростой группы G, для которой число $\tau(G)$ не является целым, Оно [2]. Этим была опровергнута одна гипотеза о числах Тамагавы полупростых групп. Вид формулы (6) показывает, что число $\tau(T)$ наверняка целое и равно $|\operatorname{Pic} T|$, если $Ш(T) = 0$. Теорема п.11.6 утверждает, что это так, если $H^1(k, p(T)) = 0$. Отсюда получаем

Следствие. Пусть T – тор, расщепляющийся над метациклическим расширением L/k. Тогда

$$\tau(T) = |H^1(\Pi, \hat{T})| = |\operatorname{Pic} T|. \ \triangle$$

Пример (конструкция тора, для которого число $\tau(T)$ не является целым). Пусть $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$ – нечетные простые числа такие, что

$$p_i \equiv 1 (\operatorname{mod} 4),\ i \le i \le 4,\ \left(\frac{p_i}{p_j}\right) = 1,\ i \ne j, \tag{7}$$

где $\left(\frac{p}{q}\right)$ – символ Лежандра. Такие числа существуют, например, 5, 29, 103, 281. Пусть $L = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1},\ \sqrt{p_2},\ \sqrt{p_3},\ \sqrt{p_4})$. Тогда группа Галуа Π расширения L/Q – абелева, типа (2,2,2,2). Рассмотрим тор $T = R^{(1)}_{L/Q}(\mathbf{G}_m)$. Из точной последовательности

$$0 \ \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}[\Pi] \to \hat{T} \to \ 0$$

следует, что

$$H^1(\Pi, \hat{T}) = H^2(\Pi, \mathbf{Z}) \cong \Pi.$$

Отсюда $|H^1(\Pi, \hat{T})| = 2^4$. Далее, по теореме 1 п.4.8

$$H^1(k, p(T)) = H^3(\Pi, \mathbf{Z}).$$

По формуле Линдона $H^3(\Pi, \mathbf{Z}) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^6$. Условия (7) показывают, что в поле L разветвлены только числа $p_i,\ 1 \le i \le 4$, и все группы разложения этих точек имеют порядок 2. По теореме п.11.5 тогда $A(T) = 0$ и, следовательно, $Ш(T) = H^3(\Pi, \mathbf{Z})$. Отсюда $|Ш(T)| = 2^6$ и $\tau(T) = \frac{1}{4}$.

14.7. Группа Φ. Пусть P – глобальное поле, P_s – его сепарабельное замыкание. Зафиксируем P_s и будем рассматривать все глобальные поля, лежащие в P_s.

Пусть Φ – множество всех функторов f, каждый из которых сопоставляет всякому глобальному полю $k \subset P_s$ функцию f_k с положительными значениями на категории торов $C(k)$, причем выполняются условия:

1) $f_k(T) = 1$, если Π-модуль $\hat{T}$ является проективным,
2) $f_k(T \times_k T') = f_k(T) f_k(T')$,
3) $f_F(R_{k/F}(T)) = f_k(T)$, если $F \subset k$ и расширение k/F сепарабельно.

Множество Φ образует группу по умножению, определенному по формуле

$$(fg)_k(T) = f_k(T) g_k(T).$$

Ясно, что Φ – группа без кручения. Множество Φ не пусто, мы видели, что функции $\tau,\ |Ш|,\ |H^1(k, \hat{T})| = h(T)$ лежат в Φ. Вот еще две функции из Φ. Это

$$f_k(T) = |A(T)|$$

и

$$g_k(T) = |H^1(k, p(T))|.$$

Функции $\tau,\ |Ш|,\ h,\ f,\ g$ связаны соотношениями

$$\tau \cdot |Ш| = h,\ |Ш| \cdot f = g.$$

Больше о строении группы Φ автору ничего не известно. Имеет ли группа Φ конечное число образующих?

14.8. Развитие метода. Методы Т.Оно развил Сансюк [1]. Он получил обобщение формулы (4) на любые связные редуктивные k-группы. Это привело к формуле

$$\frac{\tau(G)}{\tau(\tilde{G}')} = \frac{|\mathrm{Pic}\, G|}{|Ш(G)|}, \tag{1}$$

где $\tilde{G}'$ – универсальная накрывающая полупростой части G' группы G. К настоящему времени доказано, что $\tau(\tilde{G}) = 1$ для связных односвязных полупростых групп $\tilde{G}$ (гипотеза А.Вейля). Эту гипотезу высказал А.Вейль в конце пятидесятых годов, он проверил ее в ряде случаев для групп классического типа, Вейль [2]. Ряд авторов: Марс [1], Ленглендс [1], Лэй [1] добились существенных продвижений в доказательстве этой гипотезы. Наконец, Коттвиц [1], основываясь на результатах Ленглендса и Лэя, проверил гипотезу Вейля для всех односвязных групп кроме групп типа E_8. Результат Черноусова [1] снял это последнее ограничение. Таким образом,

$$\tau(G) = \frac{|\mathrm{Pic}\, G|}{|Ш(G)|} \tag{2}$$

для всех связных алгебраических групп. Метод Сансюка для полупростых групп дает только отношение (1) и ничего не говорит о числе Тамагавы односвязной группы. Для односвязных групп основой служит метод Ленглендса, вычисливший числа Тамагавы разложимых полупростых групп (групп Шевалле). Рассмотрим метод Ленглендса более подробно, поскольку им применены соображения, совершенно отличные от всех, использованных нами ранее. Вычисление числа Тамагавы для групп Шевалле можно считать красивым введением в гармонический анализ на полупростых группах.

14.9. Групповые Z-схемы Шевалле. Вернемся к параграфу 3. Пусть G – $\mathbf{Z}$-схема Шевалле полупростая и односвязная, схема G является гладкой и редукция

$G \otimes (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ неприводима и имеет тот же тип, что и G для простого p. Пусть R – система корней, S – подсистема простых корней,

$$\{H_\alpha,\ \alpha \in S;\ X_\alpha,\ \alpha \in R\} -$$

базис Шевалле алгебры Ли $\mathbf{g}$ группы G. В качестве инвариантной формы объема ω на G выберем форму, принимающую на векторе $\wedge H_\alpha \wedge X_\beta$ значение $\pm 1,\ \alpha \in S,\ \beta \in R$. Формулы п.14.2 показывают, что

$$\omega_p(G(\mathbf{Z}_p)) = |G(\mathbf{F}_p)| p^{-n},\ n = \dim \mathbf{g}.$$

Числа $|G(\mathbf{F}_p)|$ известны, Стейнберг [1]. Методика их вычисления следующая. Пусть $L = \mathbf{C}[\mathbf{h}]$ – алгебра полиномиальных функций на алгебре Картана $\mathbf{h}$, группа Вейля W, линейно действующая на $\mathbf{h}$, естественно действует и на L. Пусть L^W – алгебра инвариантов, $I_1, .., I_l$ – однородные образующие алгебры L^W, $l = \dim \mathbf{h}$, a_i – степень многочлена I_i, $a_i \geq 2$. Тогда

$$|G(\mathbf{F}_p)| = p^N \prod_{i=1}^{l} (p^{a_i} - 1),\ N = \sum_{i=1}^{l} (a_i - 1) -$$

число положительных корней, $n = 2N + l$. В группе аделей $G(A)$ рассмотрим подгруппу $G(A^\infty) = G(\mathbf{R}) \times \prod_p G(\mathbf{Z}_p)$. Поскольку G односвязна и разложима, то в группе $G(A)$ справедлив принцип сильной аппроксимации, Платонов-Рапинчук [1], поэтому $G(A) = G(\mathbf{Q})G(A^\infty)$. Далее $G(\mathbf{Q}) \cap G(A^\infty) = G(\mathbf{Z})$. Группа $G(\mathbf{Z})$ действует диагональным образом на $G(A^\infty)$, пусть F_∞ – фундаментальная область группы $G(\mathbf{Z})$ в $G(\mathbf{R})$. Тогда $F = F_\infty \times \prod_p G(\mathbf{Z}_p)$ есть фундаментальная область группы $G(\mathbf{Z})$ в $G(A^\infty)$, F есть также фундаментальная область группы $G(\mathbf{Q})$ в $G(A)$. Поэтому

$$\tau(G) = \omega_\infty(F_\infty) \prod_p \omega_p(G(\mathbf{Z}_p)) = \omega_\infty(F_\infty) \prod_{i=1}^{l} \prod_p (1 - p^{-a_i}) =$$

$$= \omega_\infty(G(\mathbf{Z}) \setminus G(\mathbf{R})) \prod_{i=1}^{l} \zeta(a_i)^{-1}, \qquad (1)$$

где $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ – дзета-функция Римана. Формула (1) показывает, что число Тамагавы $\tau(G)$ будет известно, если удастся независимо вычислить объем фактора $G(\mathbf{Z}) \setminus G(\mathbf{R})$ с плотностью ω_∞. Именно это и было проделано Ленглендсом в своей известной работе [1]. Проследим ход его рассуждений.

14.10. Интегралы Гиндикина-Карпелевича. Выбранный нами базис Шевалле в алгебре Ли $\mathbf{g}$ определяет максимальный тор T и максимальные унипотентные подгруппы N, $\bar{N}$ в группе G, $\bar{N}$ – оппозиционная подгруппа для N. Инвариантная плотность dn на группе N определяется по правилу $(dn)_E(\wedge_{\alpha>0} X_\alpha) = \pm 1$, аналогично строится плотность $d\bar{n}$ на $\bar{N}$. На T выбираем меру da, $(da)_E = \omega_1 \wedge .. \wedge \omega_l$, где ω_i – фундаментальные веса системы R, т.е. формы ω_i составляют базис, дуальный базису H_α, $\alpha \in S$. Меру Хаара ω_∞ на $G(\mathbf{R})$ обозначим через $[dg]$. Интегральные формулы замены переменных, см. Хелгасон [1], показывают, что

$$\int_{G(\mathbf{R})} f(g)[dg] = \int_{N \times T \times \bar{N}} f(na\bar{n})\ |\det Ad(a)|^{-1} dn da d\bar{n}$$

для любой интегрируемой функции на $G(\mathbf{R})$. Напомним, что $NT\bar{N}$ – открытая по Зарисскому область в G и отображение $N \times T \times \bar{N} \to NT\bar{N}$ бирегулярно. Обозначим $\det(Ad(a))$ через $\xi(a)$, ξ – характер тора T. Группа $T(\mathbf{R})$ представима в виде прямого произведения $T(\mathbf{R}) = AM$, где A – связная компонента единицы, M – конечная группа,

$$T(\mathbf{R}) = (\mathbf{R}^*)^l,\ A = R_+^l,\ M = \mu_2^l,\ A = \exp \eta_{\mathbf{R}},\ \eta_{\mathbf{R}} = Q(R^V) \otimes \mathbf{R}.$$

Пусть K – максимальная компактная подгруппа в $G(\mathbf{R})$, ассоциированная с $\mathbf{R}$-формой алгебры $\mathbf{g}$, натянутой на элементы

$$X_\alpha - X_{-\alpha},\ i(X_\alpha + X_{-\alpha}),\ iH_\alpha,\ \alpha \in R.$$

Для краткости иногда будем писать G вместо $G(\mathbf{R})$. Имеем разложение Ивасавы $G = NAK$. Заметим еще, что элементы $m_\alpha = \mu_\alpha(m)$, определенные в п.3.8, порождают группу Вейля и сверх того $m_\alpha \in K$. Поэтому всегда можно взять в качестве представителя $m \in \omega \in W$ элемент $m \in K$. Выберем на K инвариантную меру dk таким образом, чтобы мера всей группы K равнялась 1. Тогда можно записать

$$\int\limits_G f(g)[dg] = c \int\limits_{N\times A\times K} f(nak)\ |\xi(a)|^{-1} dndadk = c \int\limits_G f(g)dg, \tag{1}$$

где c – некоторая положительная константа. Для ее вычисления выберем функцию f на G так, чтобы $f(gk) = f(g)$ для всех $k \in K$, $g \in G$. Поскольку $M \subset K$, то $f(gm) = f(g)$, $m \in M$. Тогда

$$\int\limits_G f(g)[dg] = c \int\limits_{N\times A\times K} f(nak)\ |\xi(a)|^{-1} dndadk = c \int\limits_{N\times A} f(na)\ |\xi(a)|^{-1} dnda.$$

С другой стороны, $\bar{n} = n(\bar{n})a(\bar{n})k(\bar{n})$ и

$$\int\limits_G f(g)[dg] = \int\limits_{N\times T\times \bar{N}} f(na\bar{n})\ |\xi(a)|^{-1} dndad\bar{n} = \int\limits_{N\times T\times \bar{N}} f(nan(\bar{n})a(\bar{n}))\ |\xi(a)|^{-1} dndad\bar{n} =$$

$$= \int\limits_{N\times T\times \bar{N}} |\xi(aa(\bar{n}))|^{-1} |\xi(a(\bar{n}))| f(naa(\bar{n})) dndad\bar{n} = \int\limits_{\bar{N}} \xi(a(\bar{n}))d\bar{n} \int\limits_{N\times T} f(na)|\xi(a)|^{-1} dnda =$$

$$= |M| \int\limits_{\bar{N}} \xi(a(\bar{n}))d\bar{n} \int\limits_G f(g)dg.$$

Таким образом, $c = |M| \int\limits_{\bar{N}} \xi(a(\bar{n}))d\bar{n}$. Выразим характер ξ в более явном виде. Пусть $a \in A$, существует единственный элемент $H \in \mathbf{h}_{\mathbf{R}}$ такой, что $a = \exp H$. Будем иногда пользоваться и обратным отображением $H = \log a$. Тогда

$$\xi(a) = \det(Ad(\exp H)) = \det(\exp(adH)) = \exp(tr(adH)) = \exp \sum_{\alpha > 0} \alpha(H).$$

Пусть, как обычно, ρ – полусумма положительных корней. Имеем равенства

$$\xi(a) = \xi(\exp H) = \exp(2\rho(H)) = \exp(2\rho(\log a)).$$

Поскольку отображение $\exp : \mathbf{h}_{\mathbf{R}} \to A$ является аналитическим изоморфизмом групп, мы можем каждому линейному отображению $\lambda : \mathbf{h}_{\mathbf{R}} \to \mathbf{C}$ поставить в соответствие однозначно определенный характер $a_\lambda : A \to \mathbf{C}^*$ по правилу: $a_\lambda(a) = \exp(\lambda(\log a))$. Значение $a_\lambda(a)$ удобно записывать в виде a^λ. Таким образом, $\xi(a) = a^{2\rho} > 0$. Конечно, не всякий характер a^λ продолжается до голоморфного характера χ тора T. Характер a^λ однозначно продолжается до гладкой функции на $G(\mathbf{R})$ по правилу:

$$a_\lambda(nak) = a_\lambda(a),\ n \in N,\ a \in A,\ k \in K,$$

но для удобства интегрирования вводят несколько иные обозначения. Пусть $E(\lambda)$ – множество всех функций Φ с комплексными значениями на $G(\mathbf{R})$ и со свойствами

1) $\Phi(ngk) = \Phi(g),\ n \in N,\ k \in K$;

2) $\Phi(ag) = a^{\lambda+\rho}\Phi(g),\ a \in A$.

Функция Φ определяется своим значением $\Phi(1)$, поэтому множество $E(\lambda)$ представляет собой одномерное комплексное пространство. Обозначим через Φ_λ базисную функцию в $E(\lambda)$, $\Phi_\lambda(1) = 1$, $\Phi_\lambda(a) = a^{\lambda+\rho}$. Интеграл $\int\limits_{\bar N} \xi(a(\bar n))d\bar n$ принимает вид

$$\int\limits_{\bar N} \xi(a(\bar n))d\bar n = \int\limits_{\bar N} a(\bar n)^{2\rho} d\bar n = \int\limits_{\bar N} \Phi_\rho(\bar n)d\bar n.$$

Интегралы Гиндикина-Карпелевича

$$\int\limits_{\bar N} \Phi(\bar n)d\bar n$$

вычисляются индуктивно, поэтому рассмотрим более детально нильпотентные алгебры

$$n = n^+ = \bigoplus_{\alpha>0} \mathbf{g}^\alpha_{\mathbf{R}} \quad u \quad \bar n = \bigoplus_{\alpha<0} \mathbf{g}^\alpha_{\mathbf{R}}.$$

Положим

$$R(\omega) = \{\alpha \in R^+ \mid \omega\alpha < 0\},\ R'(\omega) = \{\alpha \in R^+ \mid \omega\alpha > 0\},\ R^+ = R(\omega) \cup R'(\omega).$$

Пусть, далее

$$n_\omega = \bigoplus_{\alpha \in R(\omega)} \mathbf{g}^\alpha_{\mathbf{R}},\ n'_\omega = \bigoplus_{\alpha \in R'(\omega)} \mathbf{g}^\alpha_{\mathbf{R}}.$$

Пространства n_ω и n'_ω являются подалгебрами в n и $n = n_\omega \oplus n'_\omega$. Пусть N_ω и N'_ω – группы Ли в $G(\mathbf{R})$ с алгебрами Ли n_ω и n'_ω, соответственно. Тогда

$$N = N_\omega N'_\omega,\ N_\omega \cap N'_\omega = (1),\ N_\omega = N \cap \omega^{-1}\bar N\omega,\ N'_\omega = N \cap \omega^{-1}N\omega.$$

Пусть ω_0 – элемент из W такой, что $\omega_0 R^+ = R^-$. Тогда $\bar N = \omega_0 N \omega_0$, $\omega_0 n = \bar n$. Символ $\bar N_\omega$ будет обозначать оппозиционную группу к группе N_ω, $\bar N_\omega = \omega_0 N_\omega \omega_0 = \bar N \cap \omega^{-1} N \omega$, Желобенко [1], Хелгасон [2].

Лемма 1. Пусть $\Phi \in E(\lambda)$, $\omega \in W$, $m \in \omega$. Тогда функция $g \to \int\limits_{N_\omega} \Phi(mng)dn$ принадлежит $E(\omega^{-1}\lambda)$ при условии сходимости интеграла.

Доказательство. Пусть $\Psi(g) = \int\limits_{N_\omega} \Phi(mng)dn$.

1) Ясно, что $\Psi(gk) = \Psi(g),\ k \in K$.

2) Пусть $n_0 \in N$,

$$\Psi(n_0 g) = \int\limits_{N_\omega} \Phi(mnn_0 g)dn = \int\limits_{N_\omega} \Phi(mnn_1 n_2 g)dn = \int\limits_{N_\omega} \Phi(mnn_2 g)dn =$$

$$= \int\limits_{N_\omega} \Phi(mn_3 n_4 g)dn = \int\limits_{N_\omega} \Phi(mn_3 m^{-1} mn_4 g)dn = \int\limits_{N_\omega} \Phi(mn_4 g)dn,$$

$$n_0 = n_1,\ n_2,\ n_1 \in N_\omega,\ n_2 \in N'_\omega; nn_2 = n_3 n_4,\ n_3 \in N'_\omega,\ n_4 \in N_\omega.$$

Отображение $n \to n_4$ является диффеоморфным отображением $N_\omega \to N_\omega$, сохраняющим меру, поэтому

$$\int\limits_{N_\omega} \Phi(mn_4 g)dn = \int\limits_{N_\omega} \Phi(mng)dn = \Psi(g).$$

3) Пусть $a \in A$,

$$\Psi(ag) = \int\limits_{N_\omega} \Phi(mnag)dn = \int\limits_{N_\omega} \Phi(mam^{-1}ma^{-1}nag)dn =$$

$$= \tilde{a}^{\lambda+\rho} \int\limits_{N_\omega} \Phi(m(a^{-1}na)g)dn = \tilde{a}^{\lambda+\rho} a^{\rho_\omega} \int\limits_{N_\omega} \Phi(mng)dn,$$

$$\tilde{a} = mam^{-1},\ \tilde{a}^{\lambda+\rho} = a_{\lambda+\rho}(mam^{-1}) = a^{\omega^{-1}(\lambda+\rho)},$$

$$\Phi(ag) = a^{\omega^{-1}(\lambda+\rho)+\rho_\omega} \Psi(g),\ \rho_\omega = \sum_{\alpha \in R(\omega)} \alpha.$$

Покажем, что $\omega^{-1}\rho + \rho_\omega = \rho$. В самом деле,

$$\omega^{-1}\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \omega^{-1}\alpha = \frac{1}{2}\sum_{\omega\beta>0} \beta = \frac{1}{2}\sum_{\beta>0,\ \omega\beta>0} \beta + \frac{1}{2}\sum_{\beta<0,\ \omega\beta>0} \beta =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\beta>0,\ \omega\beta>0} \beta - \frac{1}{2}\sum_{\beta>0,\ \omega\beta<0} \beta,$$

$$\rho_\omega = \sum_{\alpha>0,\ \omega\alpha<0} \alpha,\ \omega^{-1}\rho + \rho_\omega = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \alpha = \rho.$$

Итак, $\Psi(ag) = a^{\omega^{-1}\lambda+\rho}\ \Psi(\omega)$. $\triangle$

Отображение $M(m,\ \lambda) : E(\lambda) \to E(\omega^{-1}\lambda)$, определенное формулой

$$(M(m,\lambda)\Phi)(g) = \int\limits_{N_\omega} \Phi(mng)dn,\ m \in \omega,$$

является линейным оператором. Поскольку $\dim E(\lambda) = 1$, то этот оператор есть умножение на число, которое мы снова обозначим $M(m,\lambda)$. Число $M(m,\lambda)$ вычислим на базисных функциях

$$\int\limits_{N_\omega} \Phi(mng)dn = M(m,\lambda)\Phi_{\omega^{-1}\lambda}(g).$$

Учитывая, что $\Phi_\lambda(e)=1$, имеем

$$M(m,\lambda)=\int\limits_{N_\omega}\Phi_\lambda(mn)dn=\int\limits_{\bar{N}_{\omega^{-1}}}\Phi_\lambda(nm)dn=\int\limits_{\bar{N}_{\omega^{-1}}}\Phi_\lambda(n)dn,$$

ибо $m\in K$. Видим, что оператор $M(m,\lambda)$ не зависит от выбора m, обозначим его $M(\omega,\lambda)$. Каждый элемент $\omega\in W$ имеет приведенное разложение $\omega=\omega_1..\omega_p$, где $\omega_i=\omega_{\alpha_i},\ \alpha_i\in S,\ p$ – минимально, p называют длиной элемента $\omega,\ p=l(\omega),\ l(\omega)=|R(\omega)|=|R(\omega^{-1})|$. Следующее свойство мультипликативности операторов $M(\omega,\lambda)$ позволяет вычислить число $M(\omega,\lambda)$ по индукции.

Лемма 2. Пусть $l(\omega_1\omega_2)=l(\omega_1)+l(\omega_2)$, тогда $M(\omega_1\omega_2,\lambda)=M(\omega_1,\lambda)M(\omega_2,\omega_1^{-1}\lambda)$.

Доказательство. В условиях $\omega=\omega_1\omega_2$ и $l(\omega)=l(\omega_1)+l(\omega_2)$ имеем разложение

$$N_\omega=\tilde{N}_1N_2,\ \tilde{N}_1\cap N_2=(1),\ \tilde{N}_1=\omega_2^{-1}N_{\omega_1\omega_2},\ N_2=N_{\omega_2},\ N_1+N_{\omega_1}.$$

Пусть $m_1m_2=m$, тогда

$$M(\omega,\lambda)=\int\limits_{N_\omega}\Phi_\lambda(mn)dn=\int\limits_{\tilde{N}_1\times N_2}\Phi_\lambda(m_1m_2\tilde{n}_1n_2)d\tilde{n}_1dn_2=$$

$$=\int\limits_{N_{\omega_1}\times N_{\omega_2}}\Phi_\lambda(m_1n_1m_2n_2)dn_1dn_2=M(\omega_1,\lambda)\int\limits_{N_{\omega_1}}\Phi_{\omega^{-1}\lambda}(m_2n_2)dn_2=$$

$$=M(\omega_1,\lambda)M(\omega_2,\omega_1^{-1}\lambda).$$

Сделана замена $\tilde{n}_1=m_2^{-1}n_1m_2$. $\triangle$

Пусть теперь $\omega=\omega_1..\omega_r$ – приведенное разложение, $\omega=\omega_1\tilde{\omega},\ \tilde{\omega}=\omega_2..\omega_r$. Имеем

$$M(\omega,\lambda)=M(\omega_1,\lambda)M(\tilde{\omega},\omega_1^{-1}\lambda),\ \omega_1^{-1}=\omega_1.$$

Вычислим

$$M(\omega_1,\lambda)=\int\limits_{\bar{N}_1}\Phi_\lambda(\bar{n})d\bar{n},\ N_1=N_{\alpha_1}=\exp tX_{\alpha_1}.$$

Рассмотрим канонический мономорфизм $\mu_{\alpha_1}:SL(2,\mathbf{R})\to G(\mathbf{R})$, при котором группа $\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$ отображается на $\bar{N}_1$. Из разложения

$$\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n'\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

следует, что $a=(1+n^2)^{-1/2}$. Матрица $a(\bar{n})$ имеет вид $\exp tH_{\alpha_1}$, где $t=\ln a$. Поэтому

$$\Phi_\lambda(\bar{n})=a(\bar{n})^{\lambda+\rho}=\exp(t(\lambda+\rho)H_{\alpha_1})=\exp(t(\lambda(H_{\alpha_1})+1)).$$

Отсюда

$$M(\omega_1,\lambda)=\int\limits_{\bar{N}_1}\Phi_\lambda(\bar{n})d\bar{n}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+n^2)^{-\frac{\lambda(H_1)+1}{2}}dn=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda(H_1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda(H_1)+1}{2}\right)}. \qquad (2)$$

Теорема 1.

$$\int\limits_{\bar N_\omega} \Phi_\lambda(n)dn = \prod_{\alpha\in R(\omega)} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\lambda(H_\alpha)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda(H_\alpha)+1}{2}\right)}.$$

Доказательство. Формула (2) и лемма 2 позволяют проводить индукцию. Пусть ω_2 – отражение вдоль α_2, тогда

$$M(\omega_2, \omega_1^{-1}\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\lambda(H_{\omega_1\alpha_2})}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda(H_{\omega_1\alpha_2})+1}{2}\right)}.$$

Пусть $\beta_1 = \alpha_1,\ \beta_2 = \omega_1\alpha_2, .., \beta_r = \omega_1..\omega_{r-1}\alpha_r$. Система $\{\beta_1, .., \beta_r\}$ есть $R(\omega^{-1})$, Стейнберг [1]. Получаем

$$M(\omega,\lambda) = \int\limits_{N_\omega} \Phi_\lambda(mn)dn = \prod_{\beta\in R(\omega^{-1})} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\lambda(H_\beta)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda(H_\beta)+1}{2}\right)}.$$

Поскольку $\int\limits_{N_\omega} \Phi_\lambda(mn)dn = \int\limits_{\bar N_{\omega^{-1}}} \Phi_\lambda(n)dn$, то это и завершает доказательство. $\triangle$

Следствие. Постоянная c в формуле (1) имеет вид

$$c = |M| \prod_{\alpha>0} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\rho(H_\alpha)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho(H_\alpha)+1}{2}\right)}. \tag{3}$$

14.11. Метод Ленглендса вычисления чисел Тамагавы. Напомним, что G – связная полупростая односвязная $\mathbf{Z}$-схема Шевалле, ω – каноническая форма объема, ω_∞ – мера Хаара на $G(\mathbf{R})$, ассоциированная с ω, ω_∞ обозначается также $[dg]$. Для всякой функции, интегрируемой на $G(\mathbf{R})$, имеем формулу (1) п.14.10:

$$\int\limits_G f(g)[dg] = c\int\limits_G f(g)dg,$$

где мера Хаара dg определяется по формуле

$$\int\limits_G f(g)dg = \int\limits_{N\times A\times K} f(nak)a^{-2\rho}dndadk,$$

а c – константа (3) п.14.10.

Пусть $v(\Gamma\setminus G)$ – объем фактора $\Gamma\setminus G(\mathbf{R})$ по мере dg, $\Gamma = G(\mathbf{Z})$. Этот объем отличается от искомого константой c, но мера dg позволяет использовать тонкие приемы гармонического анализа. Пусть (f,h) – скалярное произведение в пространстве $L^2(\Gamma\setminus G, dg)$, определенное по правилу $(f,h) = \int\limits_{\Gamma\setminus G} f(g)\bar h(g)dg$. Ясно, что

$$v(\Gamma\setminus G) = (1,1),\ (f,1)(1,h) = (1,1)(pf,ph), \tag{1}$$

где p – ортогональная проекция на пространство констант. Ленглендсу удалось подобрать функции f и h таким образом, что все три интеграла $(f,1),\ (1,h),\ (pf,ph)$

оказались достаточно обозримыми, что и дало значение $(1, 1)$. Техника здесь очень интересная, я постараюсь достаточно детально это изложить.

Для всякого локально компактного пространства X символ $C_c(X)$ будет означать пространство комплексных непрерывных функций с компактным носителем. Пусть $\varphi \in C_c(N \setminus G)$, φ будем всегда отождествлять с функцией φ на G, удовлетворяющей условиям $\varphi(ng) = \varphi(g)$, $\forall n \in N$. Пусть $\Gamma_N = \Gamma \cap N$. Положим

$$(\Theta\varphi)(g) = \sum_{\gamma \in \Gamma_N \setminus \Gamma} \varphi(\gamma g).$$

Задача 1. Показать, что Θ отображает пространство $C_c(N \setminus G)$ в $C_c(\Gamma \setminus G)$.

Функция $\Theta\varphi$ называется тэта-рядом. Теперь рассмотрим отображение Θ^0, сопоставляющее функциям из $L^2(\Gamma \setminus G, dg)$ функции из $L^2(N \setminus G)$ по правилу

$$(\Theta^0 f)(y) = \int_{\Gamma_N \setminus N} f(ny) dn.$$

Поскольку инвариантные меры dg и dn согласованы, то при условии абсолютной сходимости чисто формальные вычисления показывают, что

$$(\Theta\varphi, f)_{\Gamma \setminus G} = (\varphi, \Theta^0 f)_{N \setminus G}. \tag{2}$$

Задача 2. Провести все необходимые выкладки.

Из (2) следует, что

$$(\Theta\varphi, \Theta_\Psi)_{\Gamma \setminus G} = (\varphi, \Theta^0 \Theta_\Psi)_{N \setminus G}. \tag{3}$$

Выбор функции f и h для формулы (1) осуществляется следующим образом. Пусть φ – гладкая функция с компактным носителем на факторе $N \setminus G$, причем $\varphi(gk) = \varphi(g)$, $k \in K$, т.е., по сути, φ – гладкая функция на A с компактным носителем. Рассмотрим ее преобразование Меллина

$$\Phi(\lambda) = \int_A a^{-\lambda-\rho} \varphi(a) da.$$

Функция $\Phi(\lambda)$ голоморфна и принадлежит пространству Пэли-Винера, $\lambda \in \mathbf{h}^*_{\mathbf{C}}$. Обратное преобразование имеет вид

$$\varphi(a) = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_{Re\ \lambda = \sigma^0} a^{\lambda+\rho} \Phi(\lambda) |d\lambda|,\ \lambda(H_j) = \sigma_j + it_j,\ |d\lambda| = dt_1 \wedge .. \wedge dt_l.$$

Интеграл справа не зависит от выбора σ^0. Далее,

$$(\Theta\varphi)(g) = \frac{1}{(2\pi)^l} \sum_{\gamma \in \Gamma_N \setminus \Gamma} \int_{Re\ \lambda = \sigma^0} \Phi(\lambda) a(\gamma g)^{\lambda+\rho} |d\lambda|. \tag{4}$$

По критерию Годемана из книги Хариш-Чандра [1] ряд

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_N \setminus \Gamma} a(\gamma g)^{\lambda+\rho} = E(g, \lambda) \tag{5}$$

сходится при условии, что $(\lambda,\alpha) > (p,\alpha)\ \forall\alpha \in S \subset R$. Сверх того, ряд (5) равномерно сходится, когда g и λ пробегают некоторые компакты. Поэтому при этих условиях в формуле (4) суммирование можно переставить с интегрированием и мы получаем

$$(\Theta\varphi)(g) = \frac{1}{(2\pi)^l} \int\limits_{Re\ \lambda=\sigma^0} \Phi(\lambda)E(g,\lambda)|d\lambda|. \tag{6}$$

Ряд $E(g,\lambda)$ называется рядом Эйзенштейна, ясно, что $E(\gamma g,\lambda) = E(g,\lambda)$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Пусть $B = TN$ – борелевская подгруппа, тогда

$$\Gamma_B = \Gamma \cap B = M\Gamma_N,\ \Gamma = \bigcup_{w\in W} \Gamma_w,\ \Gamma_w = \Gamma \cap BwB.$$

Рассмотрим теперь функцию $\Theta^0 E$

$$(\Theta^0 E)(g) = \int\limits_{\Gamma_N\backslash N} E(ng,\lambda)dn = \int\limits_{\Gamma_N\backslash N} \left(\sum_{\gamma\in\Gamma_N\backslash\Gamma} a(\gamma ng)^{\lambda+\rho}\right) dn =$$

$$= |M| \int\limits_{\Gamma_N\backslash N} \left(\sum_{\gamma\in\Gamma_B\backslash\Gamma} a(\gamma ng)^{\lambda+\rho}\right) dn = |M| \sum_{w\in W} \sum_{\gamma\in\Gamma_B\backslash\Gamma_w} \int\limits_{\Gamma_N\backslash N} a(\gamma ng)^{\lambda+\rho} dn =$$

$$= |M| \sum_{w\in W} \sum_{\gamma\in\Gamma_B\backslash\Gamma_w/\Gamma_N} \int\limits_{\Gamma_N\cap\gamma^{-1}N\gamma\backslash N} a(\gamma ng)^{\lambda+\rho} dn. \tag{7}$$

При таком тщательном выборе целой структуры и согласованных мер в $\mathbf{Z}$-схеме Шевалле G имеем

$$\int\limits_{\Gamma_N\backslash N} dn = 1.$$

Это следует из равенства $\tau(N) = 1$ и $\int\limits_{N(\mathbf{Z}_p)} |dn|_p = 1$ для всех p. Аналогично

$$\int\limits_{\Gamma\cap\gamma^{-1}N\gamma\backslash N\cap\gamma^{-1}N\gamma} dn = 1,\ \gamma \in \Gamma.$$

Поэтому

$$\int\limits_{(\Gamma_N\cap\gamma^{-1}N\gamma)\backslash N} a(\gamma ng)^{\lambda+\rho} dn = \int\limits_{(N\cap\gamma^{-1}N\gamma)\backslash N} a(\gamma ng)^{\lambda+\rho}) dn.$$

Далее, элемент $\gamma \in \Gamma_w$ можно представить в виде $\gamma = b(\gamma)mn(\gamma),\ m \in w$. Тогда

$$\int\limits_{N\cap\gamma^{-1}N\gamma\backslash N} a(\gamma ng)^{\lambda+\rho} dn = a(b(\gamma))^{\lambda+\rho} \int\limits_{N\cap w^{-1}Nw\backslash N} a(mng)^{\lambda+\rho} dn = a(b(\gamma))^{\lambda+\rho} \times$$

$$\times \int\limits_{N'_w\backslash N} a(mng)^{\lambda+\rho} dn = a(b(\gamma))^{\lambda+\rho} \int\limits_{N_w} a(mng)^{\lambda+\rho} dn = a(b(\gamma))^{\lambda+\rho}) a^{w^{-1}\lambda+\rho}(g) M(w,\lambda).$$

Равенство (7) принимает вид

$$(\Theta^0 E)(g) = |M| \sum_{w \in W} M(\omega, \lambda) a^{w^{-1}\lambda+\rho} \sum_{(\gamma)} a(b(\gamma))^{\lambda+\rho},$$

где (γ) означает двухсторонний класс $\Gamma_B \gamma \Gamma_N$, $\gamma \in \Gamma_w$. Элементы γ в классах $\Gamma_B \setminus \Gamma_w$ можно выбрать так, чтобы $\gamma = \gamma_1..\gamma_p$, где $w = w_1..w_p$ – приведенное разложение, γ_i пробегает множество $Y_i = \mu_i(Z)$, где Z – подмножество квадратных матриц в $SL(2, \mathbf{Z})$ вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ 0 \le a < c,$$

Стейнберг [1]. В группе $SL(2, \mathbf{Z})$ вычисления проходят в явном виде

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ c > 0.$$

Отсюда

$$a \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \ a(b(\gamma))^{\lambda+\rho} = c^{-\lambda(H)-1}, \ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\sum_{(\gamma), \gamma \in Y_i} a(b(\gamma))^{\lambda+\rho} = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{\varphi(c)}{c^{\lambda(H_i)+1}} = \frac{\zeta(\lambda(H_{\alpha_i}))}{\zeta(\lambda(H_{\alpha_i})+1)},$$

где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, а $\varphi(c)$ – функция Эйлера.

Известно, что $BwB = (Bw_1B)(Bw_2B)..(Bw_pB)$, поэтому

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2..\gamma_p = (b_1 m_1 n_1)(b_2 m_2 n_2)..(b_p m_p n_p).$$

Отсюда

$$a(b(\gamma)) = a(b_1) a(m_1 b_2 m_1^{-1})..a(m_1..m_{p-1} b_p m_{p-1}..m_1).$$

Элемент $a(b_k)$ лежит в $\exp tH_{\alpha_k}$, а элемент $a(m_1..m_{k-1} b_k m_{k-1}..m_1)$ в $\exp tH_{\beta_k}$, $\beta_k = w_1..w_{k-1}\alpha_k$. Система $\alpha_1 = \beta_1, \beta_2, .., \beta_p$ есть множество $R(w^{-1}) = \{\beta \in R \mid w^{-1}\beta < 0\}$. Поэтому

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_B \setminus \Gamma_w / \Gamma_N} a(b(\gamma))^{\lambda+\rho} = \prod_{\beta \in R(w^{-1})} \frac{\zeta(\lambda(H_\beta))}{\zeta(\lambda(H_\beta)+1)} = A(w, \lambda),$$

$$(\Theta^0 E)(g) = |M| \sum_{w \in W} M(w^{-1}, \lambda) A(w^{-1}, \lambda) a(g)^{w\lambda+\rho}.$$

Следующее обозначение достаточно удобное:

$$L(w, \lambda) = M(w^{-1}, \lambda) A(w^{-1}, \lambda) = \prod_{\alpha \in R(w)} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\lambda(H_\alpha)}{2})\zeta(\lambda(H_\alpha))}{\Gamma(\frac{\lambda(H_\alpha+1)}{2})\zeta(\lambda(H_\alpha)+1)}.$$

Тогда

$$(\Theta^0 E)(g) = |M| \sum_{w \in W} L(w, \lambda) a(g)^{w\lambda+\rho}. \tag{8}$$

Таким образом, если φ и ψ – гладкие функции с компактным носителем на $N\setminus G/K$ и $(\lambda,\alpha)>(\rho,\alpha)$ для всех $\alpha\in R^+$, то, используя (6) и (7), имеем

$$(\Theta\varphi,\Theta\psi)_{\Gamma\setminus G}=(\Theta^0\Theta\varphi,\psi)_{N\setminus G}=$$

$$=\frac{|M|}{(2\pi)^l}\int\limits_{A\times K}\left(\int\limits_{Re\lambda=\sigma^0}\sum_{w\in W}L(w,\lambda)\Phi(\lambda)\bar{\psi}(a)a^{w\lambda+\rho}a^{-2\rho}|d\lambda|\right)dadk=$$

$$=\frac{|M|}{(2\pi)^l}\int\limits_{Re\lambda=\sigma^0}\sum_{w\in W}L(w,\lambda)\Phi(\lambda)\left(\int\limits_A\bar{\psi}(a)a^{w\lambda-\rho}da\right)|d\lambda|=$$

$$=\frac{|M|}{(2\pi)^l}\sum_{w\in W}\int\limits_{Re\lambda=\sigma^0}L(w,\lambda)\Phi(\lambda)\bar{\psi}(-w\lambda)|d\lambda|. \tag{9}$$

Вычислим теперь интегралы $(\Theta\varphi,1)_{\Gamma\setminus G}$ и $(1,\Theta\psi)_{\Gamma\setminus G}$. Имеем

$$(\Theta\varphi,1)_{\Gamma\setminus G}=(\varphi,\Theta^0 1)_{N\setminus G}=\int\limits_{A\times K}\varphi(a)a^{-2\rho}dadk=\int\limits_A\varphi(a)a^{-2\rho}da=\Phi(\rho).$$

Аналогично $(1,\psi)_{\Gamma\setminus G}=\bar{\Psi}(\rho)$. Соотношение (1) принимает вид

$$\Phi(\rho)\bar{\Psi}(\rho)=v(\Gamma\setminus G)(p(\Theta\varphi),p(\Theta\psi)).$$

Для нахождения проекции $p(\Theta\varphi)$ Ленглендс предлагает следующий прием. Пусть $\mathcal{L}$ – подпространство в $L^2(\Gamma\setminus G,dg)$, порожденное функциями $\Theta\varphi$, где φ – гладкие функции из $C_c(N\setminus G/K)$. В пространстве функций Пэли-Винера Φ, где

$$\Phi(\lambda)=\int\limits_A\varphi(a)a^{-\lambda-\rho}da,\ \lambda\in\mathbf{h}^*_{\mathbf{C}},$$

рассматривается оператор умножения на функцию f

$$f(\lambda)=\frac{1}{\mu-(\lambda,\lambda)},\ \mu>(\rho,\rho).$$

Этот оператор определяет в пространстве $\mathcal{L}$ (с помощью обратного преобразования Фурье) ограниченный самосопряженный оператор $\Lambda(f):\mathcal{L}\to\mathcal{L}$. Оператор $\Lambda(f)$ есть оператор на $L^2(\Gamma\setminus G)$ со всюду плотным образом и нулевым ядром. Поэтому оператор $\Lambda(f)^{-1}$ есть самосопряженный, но неограниченный оператор на $L^2(\Gamma\setminus G)$. Рассматривая оператор $\Omega=\mu-\Lambda(f)^{-1}$, имеем по определению

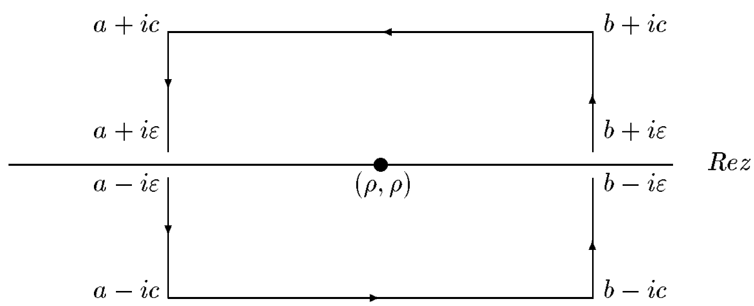
$$(\Omega(\Theta\varphi),1)_{\Gamma\setminus G}=\int\limits_A(\Omega\varphi)(a)a^{-2\rho}da=(\mu-f(\rho)^{-1}\Phi(\rho)=(\rho,\rho)\Phi(\rho)=(\rho,\rho)(\Theta\varphi,1)_{\Gamma\setminus G}.$$

Отсюда $\Omega(1)=(\rho,\rho)$. Пусть $E(x),\ -\infty<x<\infty$, непрерывное справа спектральное разложение оператора Ω, $\Omega=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xdE(x)$. Оператор $E=E((\rho,\rho))-E((\rho,\rho)-0)$ является проекционным, т.е. $E^2=E$ и E – самосопряжен. Кроме того, в образе E

содержатся константы. Для вычисления скалярного произведения $(E(\Theta\varphi), \Theta\psi)$ имеются достаточно удобные формулы в теории самосопряженных операторов. Поскольку функции $L(w, \lambda)$, $\Phi(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ – мероморфные на всей плоскости, то используется теория вычетов. Пусть a и b достаточно близкие вещественные числа, такие, что $a < (\rho, \rho) < b$. Тогда

$$(E(\Theta\varphi), \Theta\psi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_C (R(z, \Omega)(\Theta\varphi), \Theta\psi) dz, \tag{10}$$

где контур C имеет вид



Здесь $R(z, \Omega)$ – резольвента оператора Ω, $z \in \mathbf{C}$. Если $Rez > (\sigma^0, \sigma^0)$, то из формулы (9) имеем

$$(R(z, \Omega)(\Theta\varphi), \Theta\psi) = |M| \sum_{w \in W} \frac{1}{(2\pi i)^l} \int_{Re\lambda = \sigma^0} \frac{1}{z - (\lambda, \lambda)} L(w, \lambda)\Phi(\lambda)\bar{\Psi}(-w\lambda) d\lambda. \tag{11}$$

Ленглендс проделывает довольно кропотливую работу по вычислению вычетов и показывает, что от суммы по всем $w \in W$ в формуле (11) после перехода к пределу в (10) остается только одно слагаемое при $w = w_0$, $w_0(\alpha) = -\alpha$, $\forall \alpha \in R$. Формула (10) принимает вид

$$(E(\Theta\varphi), \Theta\psi) = |M| \lim_{s \to 1} (s-1)^l L(w_0, s\rho)\Phi(\rho)\bar{\Psi}(\rho), \tag{12}$$

$$L(w_0, \lambda) = \prod_{\alpha > 0} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\lambda(H_\alpha)}{2}\right)\zeta(\lambda(H_\alpha))}{\Gamma\left(\frac{\lambda(H_\alpha)+1}{2}\right)\zeta(\lambda(H_\alpha)+1)}.$$

Хорошо известно, что $\rho(H_\alpha) = 1$ тогда и только тогда, когда α является простым корнем. Поэтому

$$\lim_{s \to 1} (s-1)^l L(w_0, s\rho) = \prod_{\alpha > 0} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\rho(H_\alpha)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho(H_\alpha)+1}{2}\right)\zeta(\rho(H_\alpha)+1)} \prod_{\alpha > 0, \rho(\alpha) > 1} \zeta(\rho(H_\alpha)). \tag{13}$$

Формула (12) показывает, что ImE состоит только из констант. Поэтому $(E(\Theta\varphi), \Theta\psi) = (p(\Theta\varphi), \Theta\psi) = (p(\Theta\varphi), p(\Theta\psi))$. Равенство

$$(\Theta\varphi, 1)(1, \Theta\psi) = v(\Gamma \setminus G)(p(\Theta\varphi), p(\Theta\psi))$$

принимает вид

$$\Phi(\rho)\bar{\Psi}(\rho) = |M| v(\Gamma \setminus G) \lim_{s\to 1}(s-1)^l L(w_0, s\rho)\Phi(\rho)\bar{\Psi}(\rho)$$

или

$$v(\Gamma \setminus G)^{-1} = |M| \lim_{s\to 1}(s-1)^l L(w_0, s\rho). \tag{14}$$

Возвращаясь к основному объему $\int\limits_{\Gamma\setminus G}[dg] = \omega_\infty(F_\infty)$, получаем

$$\omega_\infty(F_\infty) = cv(\Gamma \setminus G) = \prod_{\alpha>0}\zeta(\rho(H_\alpha)+1) / \prod_{\alpha>0, \rho(\alpha)>1}\zeta(\rho(H_\alpha)). \tag{15}$$

Здесь собраны воедино соотношения (1), (6), (13), (14). Осталось произвести сокращения. Известно, что для $j \geq 1$ количество решений уравнения $\rho(H_\alpha) = j$ совпадает с количеством тех номеров i, для которых $d_i > j$. Отсюда каждое число встречается среди чисел $\{\rho(H_\alpha)+1 \mid \alpha > 0\}$ столько раз, сколько раз оно встречается среди объединения $\{\rho(H_\alpha) \mid \alpha > 0,\ \rho(H_\alpha) > 1\}$ и $\{d_1, .., d_l\}$, где d_i, как и в формуле (2). Итак, имеем следующий факт.

Теорема Ленглендса. Пусть G – связная, односвязная полупростая $\mathbf{Z}$-схема Шевалле, ω – форма объема, невырожденная по любому простому модулю. Тогда

$$\omega_\infty(\Gamma \setminus G) = \prod_{i=1}^{l}\zeta(d_i). \quad \triangle \tag{16}$$

Следствие. Для указанной группы G число Тамагавы равно 1.

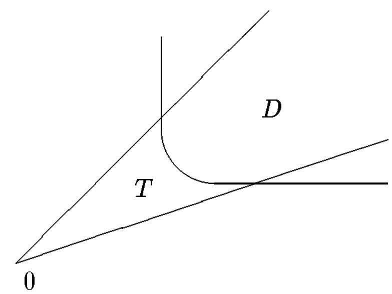
Необходимо объединить формулы (16) и (1) п.14.9.

Замечание. В своей работе Лэй [1] распространил результаты Ленглендса на квазиразложимые редуктивные группы, в частности, он доказал, что $\tau(G) = 1$ для любой квазиразложимой связной односвязной полупростой группы G. Это позволило Коттвицу [1] доказать, что $\tau(G) = 1$ для любой односвязной группы, не имеющей факторов типа E_8. Наконец, Черноусов [1] снял и это последнее ограничение.

14.12. Объемы некоторых классических фактор-пространств. Групповая $\mathbf{Z}$-схема $SL(n)$ является гладкой и односвязной, по формуле (16) п.14.11 имеем

$$\omega_\infty(SL(n, \mathbf{Z}) \setminus SL(n, \mathbf{R})) = \zeta(n)\zeta(n-1)..\zeta(2),\ n \geq 2.$$

Мы вычислим сейчас этот объем более простым и естественным способом. Метод основан на классической формуле Дирихле и точном вычислении констант при замене переменных. Пусть $M(n, \mathbf{R})_+$ – множество всех вещественных квадратных матриц порядка $n \geq 2$ с определителем большим нуля, тогда $SL(n, \mathbf{R})$ есть гиперповерхность $\det x = 1$ в $M(n, \mathbf{R})_+$. Выберем в $SL(n, \mathbf{R})$ связную измеримую фундаментальную область D для группы $SL(n, \mathbf{R})$ и пусть X – конус в $M(n, \mathbf{R})_+$ с сечением D.



Пусть далее $F(x) = (\det x)^n,\ x \in M(n, \mathbf{R})_+$. Тогда по теореме 3 п.14.4 имеем

$$v(T) = \lim_{s \to 1+0} (s-1) f(s),\ f(s) = \sum_{x \in M \cap X} (\det x)^{-ns},\ M = M(n, \mathbf{Z}).$$

Элемент $x \in X$ можно представить в виде $x = ty,\ y \in D,\ t > 0$. Тогда ясно, что ряд $f(s)$ является обыкновенным рядом Дирихле

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^{ns}},$$

где a_m – количество орбит левого действия группы $SL(n, \mathbf{R})$ на множестве целочисленных матриц порядка n с определителем m. Поскольку в каждой орбите имеется единственная верхняя треугольная матрица, элементы которой по главной диагонали положительные, выше главой диагонали – неотрицательные и меньше элементов главной диагонали того же столбца, то

$$a_m = \sum d_1^{n-1} d_2^{n-2} .. d_{n-1}, \tag{1}$$

где сумма берется по всем представлениям числа m в виде $m = d_1 d_2 .. d_n,\ d_i$ – целые положительные. Это хорошо известный факт. Формула (1) показывает, что ряд $f(s)$ представим в виде произведения для $s > 1$

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^{ns}} = \zeta(ns)\zeta(ns-1)..\zeta(ns-n+1).$$

Это лучше всего увидеть, перемножив ряды, стоящие справа. Отсюда имеем

$$v(T) = \lim_{s \to 1+0} (s-1) f(s) = \frac{1}{n} \zeta(2)..\zeta(n). \tag{2}$$

Вычислим теперь объем $v(T)$ из других соображений. Пусть x_{ij} – стандартные координаты в $M(n, \mathbf{R})$, $dx_{11} \wedge .. \wedge dx_{nn}$ – форма, определяющая меру Лебега в $M(n, \mathbf{R})$, ω – инвариантная плотность на $SL(n, \mathbf{R})$ пункта 14.9, мера фактора $SL(n, \mathbf{Z}) \backslash SL(n, \mathbf{R})$ равна $\omega(D)$. Отображение $(t, y) \to ty,\ y \in D,\ 0 < t \leq 1$ определяет гомеоморфизм

$\varphi : I \times D \to T,\ I = (0,1]$. Чтобы вычислить $\varphi^*(dx_{11} \wedge .. \wedge dx_{nn})$ при этом отображении, продолжим сначала отображение φ до гомоморфизма групп $\mathbf{R}^* \times SL(n,\mathbf{R}) \to GL(n,\mathbf{R})$, а затем вычислим $\varphi^*((\det x)^{-n} dx_{11} \wedge .. \wedge dx_{nn})$. Калибровочная форма $(\det x)^{-n} dx_{11} \wedge .. \wedge dx_{nn})$ является инвариантной формой на $GL(n,\mathbf{R})$, поэтому ее подъем есть инвариантная форма на произведении $\mathbf{R}^* \times SL(n,\mathbf{R})$ и, следовательно,

$$\varphi^*((\det x)^{-n} dx_{11} \wedge .. \wedge dx_{nn}) = \alpha t^{-1} dt \wedge \omega,$$

где α – константа. Имеем

$$\varphi^*(dx_{11} \wedge .. \wedge dx_{nn}) = \alpha t^{n^2-1} dt \wedge \omega.$$

Чтобы вычислить константу α, рассмотрим касательное пространство в единичном элементе $(1,E)$ к группе $\mathbf{R}^* \times SL(n,\mathbf{R})$ и выберем в нем базис, состоящий из единицы в $\mathbf{R}$ и базиса группы целочисленных матриц со следом нуль. Значение формы объема $(dt \wedge \omega)_{(1,E)}$ на этом базисе равно ± 1. С другой стороны

$$\varphi^*(dx_{11} \wedge .. \wedge dx_{nn})_{(1,E)}(1, E_{11} - E_{nn}, ..) =$$

$$= (dx_{11} \wedge .. \wedge dx_{nn})_E(E, E_{11} - E_{nn}, ..) = \pm n.$$

Отсюда $|\alpha| = n$, и мы получаем

$$\varphi^*(dx_{11} \wedge .. \wedge dx_{nn}) = \pm n t^{n^2-1} dt \wedge \omega,$$

откуда

$$v(T) = \int_T dx_{11} \wedge .. \wedge dx_{nn} = \omega(D) \int_0^1 n t^{n^2-1} dt = \frac{1}{n}\omega(D). \tag{3}$$

Сравнивая (2) и (3), получаем искомый объем.

Теорема 1.

$$\omega(SL(n,\mathbf{Z}) \setminus SL(n,\mathbf{R})) = \zeta(2)..\zeta(n). \quad \triangle$$

Для дальнейшего нам понадобится объем ортогональной группы относительно стандартной плотности. На линейной группе Ли $G,\ G \subset GL(n,\mathbf{R})$, левоинвариантные дифференциальные формы могут быть найдены из матрицы $\Omega = g^{-1}dg$, где g_{ij} – ограничения координатных функций. Линейно независимые элементы матрицы $\Omega = (\omega_{ij})$ образуют базис пространства левоинвариантных форм, базис Маурера-Картана. На группе $O(n)$ базис образуют формы $\omega_{ij},\ i > j$, отсюда инвариантная форма объема имеет вид:

$$\alpha_n = \bigwedge_{i>j} \omega_{ij},\ \omega_{ij} = \sum_{k=1}^n g_{ki} dg_{kj}. \tag{4}$$

Группа $O(n)$, а также $SO(n)$ транзитивно действует на сфере S^{n-1}, выбирая на S^{n-1} точку $e_1 = (1,0,..,0)$, получаем стандартное представление многообразия S^{n-1} в виде фактора $SO(n)/SO(n-1)$. Если записать форму α_n в виде $\alpha_n = u_{n-1} \wedge \tilde{\alpha}_{n-1}$, где $u_{n-1} = \wedge_{i>1}\omega_{i1}$, то легко видеть, что u_{n-1} есть подъем римановой формы объема с S^{n-1} на $SO(n)$ при отображении $g \to ge_1$, а ограничение формы объема $\tilde{\omega}_{n-1}$ на $SO(n-1)$ есть форма α_{n-1}. Отсюда для объемов по соответствующим мерам получаем соотношение

$$\alpha(SO(n)) = \alpha(SO(n-1))u(S^{n-1}).$$

Объем сферы известен:

$$u(S^m) = 2\pi^{\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)^{-1}, \ m \geq 0,$$

поэтому по индукции

$$\alpha(SO(n)) = 2^{n-1}\pi^{\frac{n(n+1)}{4}} \prod_{a=1}^{n} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right)^{-1}, \ n \geq 1. \tag{5}$$

Пусть теперь $f(x) = \sum a_{ij}x_ix_j$ – вещественная квадратичная форма от n переменных, $A = (a_{ij})$ – ее матрица, $a_{ij} = a_{ji}$. Пространство коэффициентов квадратичных форм от n переменных является N-мерным, $N = \frac{1}{2}n(n+1)$, мы выбираем коэффициэнты a_{ij} с условием $i \geq j$. Точку пространства $\mathbf{R}^N$ будем также именовать квадратичной формой. Пусть P – конус положительности в $\mathbf{R}^N$, т.е. P – множество всех форм f, для которых $f(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbf{R}^N$, P – замкнутое выпуклое подмножество в $\mathbf{R}^N$. Положительно определенные формы являются внутренними точками в P. Группа $GL(n, \mathbf{R})$ естественно действует в пространстве $\mathbf{R}^N$, на матрицах это действие $A \to {}^t gAg$. На множестве P^+ положительно определенных форм группа $GL(n, \mathbf{R})$ действует транзитивно. Пусть D^+ – фундаментальная область группы $GL(n, \mathbf{Z})$, действующей в области $X = \{a \in P^+ \mid \det A \leq 1\}$, D – замыкание области D^+ в P. Вопрос о вычислении объема области D является классической задачей, впервые решенной Г.Минковским. Затем другие методы предложили К.Зигель и Б.А.Венков [1]. Мы предлагаем сравнительно элементарный и весьма короткий вывод формулы Минковского. Пусть $\psi : GL(n, \mathbf{R}) \to P$ отображение, определяемое по правилу $\psi(g) = {}^t gg$. Тогда ψ эквивариантно: $\psi(gg_1) = \psi(g)g_1$ и $\psi^{-1}\psi(g)) = O(n)g$, где $O(n)$ – ортогональная группа формы $x_1^2 + .. + x_n^2$. Искомый объем, по определению, записывается в виде $v(D) = \int\limits_D dA$, где $dA = \bigwedge_{i \geq j} da_{ij}$ – мера Лебега на $\mathbf{R}^N$. Вся трудность, на мой взгляд, при вычислении объема $v(D)$ состояла в том, что мера dA не является инвариантной относительно группы $GL(n, \mathbf{R})$, а задача по смыслу мультипликативная. Инвариантной мерой на P относительно $GL(n, \mathbf{R})$ будет мера $\beta = (\det A)^{-\frac{n+1}{2}} dA$, Бурбаки [2]. Рассмотрим $D' = \psi^{-1}(D)$. Область D' стабильна относительно левых сдвигов на элементы группы $O(n)$. Выберем на $GL(n, \mathbf{R})$ стандартную инвариантную форму объема $\gamma = (\det g)^{-n} dg_{11} \wedge .. \wedge dg_{nn}$. Подберем теперь инвариантную форму δ на $GL(n, \mathbf{R})$ степени $\frac{1}{2}n(n-1)$ такую, что $\gamma = \psi^*(\beta) \wedge \delta$, тогда ограничение формы δ на $O(n)$ будет инвариантной формой на $O(n)$. Формулы (14.5) показывают, что форма $\omega = \wedge_{i>j}\omega_{ij}$, где ω_{ij} формы из $\Omega = g^{-1}dg$ такие, что $\omega_{ij}(e) = dg_{ij}(e)$, является инвариантной на $GL(n, \mathbf{R})$ и ее ограничение на $O(n)$ совпадает с $\alpha = \alpha_n$. Далее, $\gamma(e) = (dg_{11} \wedge .. \wedge dg_{nn})_e$, $\psi^*(\beta)_e = dA(e) = \bigwedge_{i \geq j} da_{ij}(e)$. Поскольку $A =^t gg$, то

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} g_{ki}g_{kj}, \quad da_{ij}(e) = dg_{ij}(e) + dg_{ji}(e), \ i \neq j; \quad da_{ii}(e) = 2g_{ii}(e).$$

Таким образом,

$$dA(e) = 2^n \bigwedge_i dg_{ii}(e) \bigwedge_{i>j} (dg_{ij} + dg_{ji})e$$

и

$$(\psi^*(\beta) \wedge \omega)(e) = \pm 2^n \gamma(e).$$

Отсюда $\delta = \pm 2^n \omega$. Для любой интегрируемой функкции f на $GL(n, \mathbf{R})$ имеем равенство

$$\int\limits_{GL(n,\mathbf{R})} f(g)d\gamma(g) = 2^{-n} \int\limits_{P+} d\beta \int\limits_{O(n)} f(kg)d\alpha(k). \tag{6}$$

В нашем случае $dA = (\det A)^{\frac{n+1}{2}}\beta,\ \psi^*(dA) = (\det g)^{n+1}\psi^*(\beta)$ и из (6) имеем

$$\int\limits_{D'} (\det g)^{n+1} d\gamma(g) = \int\limits_{D'} (\det g) dg_{11} \wedge .. \wedge dg_{nn} = 2^{-n} \int\limits_{D} dA \int\limits_{O(n)} d\alpha.$$

Учитывая, что $\alpha(O(n)) = 2\alpha(SO(n))$ и, используя формулу (5), получаем

$$\int\limits_{D'} (\det g) dg_{11} \wedge .. \wedge dg_{nn} = v(D)\pi^{\frac{n(n+1)}{4}} \prod_{k=1}^{n} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)^{-1}. \tag{7}$$

Осталось вычислить интеграл в левой части равенства (7). Рассмотрим эпиморфизм $\varphi : \mathbf{R}^* \times SL(n, \mathbf{R}) \to GL(n, \mathbf{R})$ как и при вычислении объема (3). Пусть $D'' = I_0 \times F$, где $I_0 = [-1, 1] \setminus \{0\},\ F$ – фундаментальная область для $SL(n, \mathbf{Z})$ в $SL(n, \mathbf{R})$. Отображение φ гомеоморфно отображает D'' на D' и мы имеем равенство

$$\int\limits_{D'} (\det g) dg_{11} \wedge .. \wedge dg_{nn} = \int\limits_{D''} \varphi^*[(\det g) dg_{11} \wedge .. \wedge dg_{nn}].$$

Пусть $g = us,\ u \in \mathbf{R}^*,\ s \in SL(n, \mathbf{R})$. Тогда

$$\det g = u^n,\ \varphi^*(dg_{11} \wedge .. \wedge dg_{nn}) = nu^{n^2-1} du \wedge \omega,$$

где ω здесь снова та же мера на $SL(n, \mathbf{R})$. Таким образом,

$$\int\limits_{D'} (\det g) dg_{11} \wedge .. \wedge dg_{nn} = 2n\omega(F) \int\limits_0^1 u^{n^2+n-1} du = \frac{2}{n+1} \zeta(2)..\zeta(n), \tag{8}$$

и мы получаем следующую формулу Г.Минковского.

Теорема 2.

$$v(D) = \frac{2}{n+1} \pi^{-\frac{n(n+1)}{4}} \zeta(2)..\zeta(n) \prod_{k=1}^{n} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right).$$

Это следует из формул (7) и (8). $\triangle$

§15. ФОРМУЛА МИНКОВСКОГО-ЗИГЕЛЯ-ТАМАГАВЫ

15.1. Бесконечные произведения. Мера Тамагавы следующим образом используется при вычислении числа классов $h = h(G, M)$, см. определение §11. Будем считать, что группа G связна и не имеет рациональных характеров, определенных над полем определения $k,\ (\hat{G})_k = (0)$. В этом случае $G(A) = G^1(A),\ \tau = \tau_1$. Имеем разбиение на двойные классы

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^{h} G(k) a_i G^M(A),\ a_i \in G(A).$$

Тогда

$$\tau(G)=\sum_{i=1}^{h}\tau[G(k)\setminus(G(k)a_iG^M(A))]=\sum_{i=1}^{h}\tau[G(k)\setminus(G(k)a_iG^M(A)a_i^{-1})],$$

последнее в силу инвариантности меры τ. Пусть $M_i=a_iM,\ M_1=M$. Тогда группа $a_iG^M(A)a_i^{-1}$ является стабилизатором решетки M_i, т.е. $a_iG^M(A)a_i^{-1}=G^{M_i}(A)$. Имеем в новых обозначениях

$$\tau(G)=\sum_{i=1}^{h}\tau[G(k)\setminus(G(k)G^{M_i}(A))]. \tag{1}$$

Рассмотрим одно слагаемое $\tau[G(k)\setminus(G(k)G^M(A))]$. Пусть $G^M(k)=G(k)\cap G^M(A)$ – подгруппа группы $G(k)$, состоящая из элементов, переводящих решетку M в себя (группа единиц решетки M). Имеем

$$G(k)\setminus(G(k)G^M(A))=G^M(k)\setminus G^M(A).$$

Группа $G^M(A)$ представима в виде прямого произведения

$$G^M(A)=\prod_{v|\infty}G(k_v)\times\prod_{\wp}G^M(k_\wp),$$

где $G^M(k_\wp)$ – подгруппа группы $G(k_\wp)$, переводящая решетку $M_\wp=O_\wp\otimes_O M$ в себя. Группа $G^M(k_\wp)$ – компактная подгруппа группы $G(k_\wp)$. Пусть

$$G_\infty=\prod_{v|\infty}G(k_v),\ \ G_c^M=\prod_{\wp}G^M(k_\wp).$$

Заметим, что группы $G(k_v),\ G^M(k_v),\ G_\infty,\ G_c^M$, продолженные единицами в недостающих точках, можно считать подгруппами группы $G(A)$. Группа G_∞ есть произведение вещественных и комплексных групп Ли, она локально компактна, но не всегда компактна, группа G_c^M – компактна.

$$G^M(A)=G_\infty\times G_c^M,\ \ G_\infty\cap G_c^M=(1).$$

Пусть F_∞ – фундаментальная область для группы $G^M(k)$ в G_∞. Тогда $F=F_\infty\times G_c^M$ есть фундаментальная область для группы $G^M(k)$ в $G^M(A)$, F есть также фундаментальная область для $G(k)$ в $G(k)G^M(A)$. Поэтому

$$\tau[G(k)\setminus(G(k)G^M(A))]=\tau(F)=\omega_\infty(F_\infty)\tau(G_c^M).$$

Здесь $\omega_\infty=\prod_{v|\infty}\omega_\infty$ – калибровочная k-форма на G,

$$\tau(G_c^M)=\prod_{\wp}\omega_\wp(G^M(k_\wp)).$$

За счет инвариантности меры $\omega_\wp$ имеем

$$\omega_\wp(G^{M_i}(k_\wp))=\omega_\wp(G^M(k_\wp)),\quad \textit{т.е.}\ \ \tau(G_c^{M_i})=\tau(G_c^M).$$

Таким образом,

$$\tau(G(k)\setminus(G(k)G^{M_i}(A)))=\omega_\wp(G^{M_i}(k)\setminus G_\infty)\tau(G_c^M).$$

Формула (1) принимает вид

$$\tau(G) = \tau(G_c^M) \sum_{i=1}^{h} \omega_\infty(G^{M_i}(k) \setminus G_\infty). \tag{2}$$

Это современное толкование глубоких результатов Дирихле, Минковского, Зигеля в теории алгебраических чисел и квадратичных форм. Формула (2) может быть использована в различных направлениях. Зная $\tau(G)$, иногда удается получить существенную информацию о числе классов $h(G, M)$, а в ряде случаев удачный выбор решетки M и формы ω дает возможность вычислить число $\tau(G)$, как это и сделал Ленглендс.

В применениях формулы (2) с уже известным числом $\tau(G)$, как например в случае ортогональной группы, возникают, по меньшей мере, две трудности. Во-первых, вычисление локальных объемов в точках плохой редукции и, во-вторых, вычисление или оценка бесконечного произведения $\tau(G_c^M)$. Рассмотрим подробнее группу $G = SO(n)$.

15.2. Масса рода нечетных положительных решеток. Пусть V – линейное пространство над полем $\mathbf{Q}$, $n = \dim V$, $f : V \times V \to \mathbf{Q}$ – невырожденная симметрическая билинейная форма, q – ассоциированная квадратичная форма

$$q(x) = f(x, x),\ 2f(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y).$$

Пара (V, f) или (V, q) называется квадратичным пространством над полем $\mathbf{Q}$, $O(V, f)$ – группа автоморфизмов пары (V, f), т.е. группа линейных преобразований пространства V, оставляющих форму f на месте. Рассмотрим решетку M в пространстве V, она имеет базис $e_1, .., e_n$. Рациональное число $d = \det(f(e_i, e_j))$ не зависит от выбора базиса в решетке, оно называется дискриминантом решетки M. Если $f(e_i, e_j) \in \mathbf{Z}$, то форма f принимает на $M \times M$ целые значения и пара (M, f) или (M, q) называется квадратичной решеткой. Удобно дать независимое определение квадратичной решетки (M, f) как $\mathbf{Z}$-модуля конечного ранга без кручения M с невырожденной билинейной симметрической формой $f : M \times M \to \mathbf{Z}$. Конечно, этот модуль (M, f) лежит в квадратичном пространстве $(M_{\mathbf{Q}}, f)$, где $M_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \otimes M$. Две квадратичные решетки (M, f) и (N, h) называются изоморфными, если существует изоморфизм групп $\varphi : M \to N$ такой, что $h(\varphi(x), \varphi(y)) = f(x, y);\ x, y \in M$. Ясно, что изоморфные решетки имеют одинаковые ранги и дискриминанты. Грандиозная задача, восходящая к Гауссу, описать множество неизоморфных квадратичных решеток данного ранга и дискриминанта. Имеется алгоритм, позволяющий выяснить, когда две квадратичные решетки одинакового ранга лежат в одном квадратичном пространстве. Для этого необходимо и достаточно, чтобы формы f и h были эквивалентными над полем $\mathbf{Q}$, а это, в свою очередь, равносильно системе соотношений: $d(f) = d(h)a^2,\ a \in \mathbf{Q}^*;\ \varepsilon_p(f) = \varepsilon_p(h)$ для всех простых p, включая и $p = \infty$, где ε_p – инвариант Хассе, см. Серр [4]. Последнее требование можно существенно ослабить. Из-за наличия формулы произведения для символов Хассе достаточно потребовать совпадения $\varepsilon_p(f)$ и $\varepsilon_p(h)$ для всех p, кроме какого-либо одного.

Итак, приходим к задаче классификации квадратичных решеток, лежащих в фиксированном квадратичном пространстве (V, f). Пусть M и N - изоморфные квадратичные решетки в (V, f). Это означает, что существует изоморфное отображение $\varphi : M \to N$ такое, что $f(\varphi(x), \varphi(y)) = f(x, y);\ x, y \in M$. Отображение φ естественно продолжается до линейного автоморфизма пространства V и видно, что $\varphi \in O(V, f)$. Обратно, если $\varphi \in O(V, f)$ и M – квадратичная решетка в V, то $\varphi(M)$ - снова квадратичная решетка в V и M и $\varphi(M)$ изоморфны. Таким образом, классы изоморфных квадратичных решеток в квадратичном пространстве (V, f) совпадают с орбитами ортогональной группы $G = O(V, f)$, действующей на множестве квадратичных решеток. Класс решеток, изоморфных данной решетке M, обозначим $cls(M)$. На множестве решеток пространства V действует и адельная группа $G(A)$ и разбивает его на орбиты, называемые *родами* решеток. Совокупность решеток пространства V, лежащих в одном роде с решеткой M, обозначим через $gen(M)$. Известно, что род состоит из конечного числа классов, Борель [1]. Разбиение рода решетки M на классы относительно группы $G(\mathbf{Q})$ соответствует разбиению группы $G(A)$ на двойные классы смежности $G(\mathbf{Q}) \setminus G(A)/G^M(A)$. Рассмотрим теперь частный, но важный случай унимодулярных решеток. Квадратичная решетка (M, q) является *унимодулярной*, если $d(M) = \pm 1$. Решетка называется *определенной*, если q – положительно или отрицательно определенная квадратичная форма,в противном случае решетка называется *неопределенной*. Решетка M называется *четной*, если $q(x) \in 2\mathbf{Z}$ для всех $x \in M$, в противном случае – нечетной. Обстоятельное исследование неопределенных решеток проведено в книге Серра [4].

Пусть (M, q) – положительно определенная унимодулярная решетка ранга n, тогда $d(M) = 1$. Из локальной теории решеток следует, что $\varepsilon_p(q) = 1$ для всех $p \neq 2$ и $\varepsilon_\infty(q) = 1$, О'Мира [1]. Тогда $\varepsilon_2(q) = 1$ и, следовательно, пространство $V = \mathbf{Q} \otimes M$ обладает ортонормированным базисом $e_1, .., e_n$, относительно которого $q(x) = x_1^2 + .. + x_n^2$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. В теории квадратичных пространств приняты следующие обозначения. Пусть $r_1, .., r_n$ – ортогональный базис пространства (V, f), причем $f(r_i, r_i) = \alpha_i$. Это записывают в виде

$$V = < \alpha_1 > \perp .. \perp < \alpha_n > .$$

В случае наличия ортонормированного базиса: $V = < 1 > \perp .. \perp < 1 >$. Аналогичные обозначения и для решеток. Итак, все определенные унимодулярные решетки ранга n лежат в пространстве $< 1 > \perp .. \perp < 1 >$ над полем $\mathbf{Q}$. Оказывается, все унимодулярные решетки пространства $< 1 > \perp .. \perp < 1 >$ лежат либо в одном роде, либо в двух. Более точно в книге О'Мира имеется следующее утверждение, полученное из локальных характеристик.

Теорема 1. Пусть I_n – решетка $< 1 > \perp .. \perp < 1 >$. Тогда все унимодулярные положительные решетки ранга $n \not\equiv 0 (\operatorname{mod} 8)$ лежат в одном роде решетки I_n. Если $n \equiv 0 (\operatorname{mod} 8)$, то все унимодулярные решетки пространства $\mathbf{Q} \otimes I_n$ разбиваются на два рода: $gen(I_n)$ и $gen(E_8^k)$, где E_8 – единственная четная унимодулярная решетка ранга 8, E_8^k – ортогональная сумма. Принадлежность решетки M роду вполне определяется 2-компонентой $\mathbf{Z}_2 \otimes M$. $\triangle$

Рассмотрим род $gen(I_n)$, он содержит все неизоморфные унимодулярные нечетные положительные решетки ранга n. Пусть $M_1, .., M_h$ – представители различных классов собственной эквивалентности, $M_1 = I_n$. В ортонормированном базисе группа $SO(I_n)$ имеет стандартный вид

$${}^t g g = e, \; g = (g_{ij}), \; \det g = 1, \; 1 \leq i, j \leq n.$$

Элементы g_{ij} порождают координатное кольцо $\mathbf{Z}$-групповой схемы $SO(n)$, группа G_c^M из формулы (2) принимает вид

$$G_c^M = \prod_p SO(n, \mathbf{Z}_p), \; M = I_n.$$

Поскольку бесконечная точка только одна, то $SO(n)_\infty = SO(n, \mathbf{R})$ – компактная вещественная группа Ли, группа $SO(n, \mathbf{Z}) = O^+(I_n)$ конечна и ее порядок равен

$n!2^{n-1}$. Заметим, что $|O(I_n)| = n!2^n$. Инвариантная плотность ω на группе $SO(n)$ выбирается как и формуле (4) п.14.12, объем $\omega_\infty(SO(n,\mathbf{R}))$ вычислен там же. Группа $G^{M_i}(\mathbf{Q})$, состоящая из всех элементов группы $SO(n,\mathbf{Q})$, сохраняющих решетку M_i, является конечной, обозначим ее $O^+(M_i)$. Тогда

$$\omega_\infty(O^+(M_i)\setminus SO(n,\mathbf{R})) = |O^+(M_i)|^{-1}\omega_\infty(SO(n,\mathbf{R})).$$

Далее, $\tau(SO(n)) = 2$, поэтому формула (2) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{h}\frac{1}{|O^+(M_i)|} = 2\omega_\infty(SO(n,\mathbf{R}))^{-1}\prod_p \omega_p(SO(n,\mathbf{Z}_p))^{-1}. \tag{3}$$

Левая часть равенства (3) называется массой рода квадратичных решеток, обозначим ее $W(n)$. Для вычисления $W(n)$ осталось вычислить локальные множители и произведение в правой части равенства (3). Для нахождения локальных объемов воспользуемся формулами п.14.2. Алгебра Ли $\mathbf{so}(n)$ группы $SO(n)$ состоит из кососимметрических матриц, $\dim\mathbf{so}(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$. Групповая $\mathbf{Z}$-схема $SO(n)$ имеет хорошую редукцию для всех $p>2$, поэтому естественное отображение $SO(n,\mathbf{Z}_p)\to SO(n,\mathbf{F}_p)$ является эпиморфизмом, а его ядро есть конгруэнц-подгруппа $SO^{(1)}(n,\mathbf{Z}_p)$, где $p>2$. Экспонента определяет аналитический гомеоморфизм между группой $SO^{(1)}(n,\mathbf{Z}_p)$ и решеткой $p\mathbf{so}(n,\mathbf{Z}_p)$, тогда формула объема п.14.2 принимает вид

$$\omega_p(SO(n)) = |SO(n,\mathbf{F}_p)|p^{-\frac{n(n-1)}{2}}. \tag{4}$$

Число $|SO(n,\mathbf{F}_p)|$ для $p>2$ вычисляется по формулам

$$|SO(2m+1,\mathbf{F}_p)| = (p^{2m}-1)p^{2m-1}(p^{2m-2}-1)..(p^2-1)p,$$

$$|SO(2m,\mathbf{F}_p)| = (p^{2m-1}-\varepsilon(p)p^{m-1})(p^{2m-2}-1)p^{2m-3}..(p^2-1)p,$$

где $\varepsilon(p) = \chi_4^m(p),\ \chi_4(a) = (-1)^{\frac{a-1}{2}},\ a$ – нечетно, $\chi_4(2) = 0$. Эти формулы имеются в книге Дьедонне [1]. С учетом этих значений формулу (4) удобно переписать отдельно для четных и нечетных значений

$$\omega_p(SO(2m+1)) = \prod_{a=1}^{m}(1-p^{-2a}),$$

$$\omega_p(SO(2m)) = (1-\chi_4^m(p)p^{-m})\prod_{a=1}^{m-1}(1-p^{-2a}).$$

Напомним, что все эти формулы справедливы для $p>2$. Эти формулы позволяют написать явные формулы для отношений $\omega_v(SO(n))/\omega_v(SO(n-1))$ и мы получаем рекуррентное соотношение для всех $W(n)$

$$\frac{W(2m+1)}{W(2m-1)} = \frac{2^{2m}-1}{2^{2m+3}m}\ \frac{\omega_2(SO(2m-1))}{\omega_2(SO(2m+1))}|B_2m|,\ m\geq 2,$$

$$\frac{W(2m)}{W(2m-1)} = \frac{2^m-1}{4m}\ \frac{\omega_2(SO(2m-1))}{\omega_2(SO(2m))}|B_m|,\ m--\textit{четно},\ m\geq 2,$$

$$\frac{W(2m)}{W(2m-1)} = \frac{(m-1)!}{2\pi^m}\ \frac{\omega_2(SO(2m-1))}{\omega_2(SO(2m))}|L(m,\chi_4)|,\ m-\textit{нечетно},\ m\geq 3.$$

Здесь B_n – числа Бернулли

$$\frac{t}{e^t-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n.$$

Значение $L(m, \chi_4)$ вычисляется с использованием функционального уравнения для L-функций и имеет вид

$$L(m, \chi_4) = -\frac{\chi_4(m)\pi^m}{m!2^m} B_{m,\chi_4}.$$

Числа B_{m,χ_4} выражаются через числа Эйлера E_n следующим образом:

$$B_{m,\chi_4} = -\frac{mE_{m-1}}{2},$$

где

$$\frac{1}{cht} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} t^n.$$

Поэтому последнее отношение принимает вид

$$\frac{W(2m)}{W(2m-1)} = \frac{\omega_2(SO(2m-1))}{2^{m+2}\omega_2(SO(2m))} |E_{m-1}|, \ m - \textit{нечетно}, \ m \geq 3.$$

Для вычисления меры $\omega_2(SO(n))$ полезно изучить действие группы $O(n, \mathbf{Z}_2)$ на сфере $S^{n-1}(\mathbf{Z}_2)$. Заметим, что из теоремы Витта для квадратичных модулей над локальным кольцом следует, что группа $O(n, \mathbf{Z}_p)$ действует транзитивно на сфере $S^{n-1}(\mathbf{Z}_p)$ для $p > 2$. Если $n \not\equiv 1 (\bmod 8)$, то группа $O(n, \mathbf{Z}_2)$ также действует транзитивно на сфере $S^{n-1}(\mathbf{Z}_2)$. Если же $n \equiv 1 (\bmod 8)$, то сфера $S^{n-1}(\mathbf{Z}_2)$ распадается на две орбиты группы $O(n, \mathbf{Z}_2)$, Воскресенский [12]. Довольно утомительные вычисления, проделанные в этой работе, приводят к следующим формулам

Теорема 2.

$$а) W(2m+1) = \frac{2^m+1}{m!4^m} |B_2..B_{2m}|, \ 2m+1 \equiv \pm 1 (\bmod 8),$$

$$б) W(2m+1) = \frac{2^m-1}{m!4^m} |B_2..B_{2m}|, \ 2m+1 \equiv \pm 3 (\bmod 8),$$

$$в) W(2m) = \frac{(2^m-1)(2^{m-1}+1)}{m!2^{2m-1}} |B_m||B_2..B_{2m-2}|, \ 2m \equiv 0 (\bmod 8),$$

$$г) W(2m) = \frac{1}{(m-1)!4^m} |E_{m-1}||B_2..B_{2m}|, \ 2m \equiv \pm 2 (\bmod 8),$$

$$д) W(2m) = \frac{(2^m-1)(2^{m-1}-1)}{m!2^{2m-1}} |B_m||B_2..B_{2m-2}|, \ 2m \equiv 4 (\bmod 8). \quad \triangle$$

Пусть $G(I_n)$ – множество всех неэквивалентных решеток в роде решетки I_n. Напомним, что

$$W(n) = \sum_{M \in G(I_n)} \frac{1}{|O^+(M)|}.$$

Формулы теоремы 2 позволяют легко вычислить число $W(n)$ для небольших n, это дает возможность найти $G(I_n)$ и $h(n)$. Имеем $W(n) = (n!2^{n-1})^{-1}$ для $3 \le n \le 8$. Поскольку $|O^+(I_n)| = n!2^{n-1}$, то $G(I_n) = \{I_n\}$ для $n \le 8$. Далее имеем следующую табличку

n	$W(n)$	$G(I_n)$	$h(n)$
9	$17/9!2^8 \cdot 3 \cdot 5$	$I_9, I_1 \perp E_8$	2
10	$5/10!2^9 \cdot 3$	$I_{10}, I_2 \perp E_8$	2
11	$31/11!2^{10} \cdot 3^2$	$I_{11}, I_3 \perp E_8$	2
12	$31/12!2^{11} \cdot 3$	$I_{12}, I_4 \perp E_8, \Gamma_{12}$	3
13	$691/13!2^{12} \cdot 3 \cdot 5$	$I_{13}, I_5 \perp E_8, I_1 \perp \Gamma_{12}$	3

Решетка Γ_n порождена в пространстве V с ортонормированным базисом $e_1, .., e_n$, векторами $e_i \pm e_j$ и вектором $\frac{1}{2}(e_1 + .. + e_n)$. Для $n = 4k$ она унимодулярна. В работе Конвея и Слоэна [1] вычисления доведены до $n \le 23$.

15.3. Масса рода четных положительных унимодулярных решеток. Пусть M – четная положительная унимодулярная решетка. Такие решетки существуют тогда и только тогда, когда ранг решетки делится на 8. В качестве представителя рода можно взять решетку E_8^k ранга $8k$. Решетка $I_1 \perp E_8^k$ – нечетная и лежит в роде решетки I_{8k+1}. В частности, $\mathbf{Z}_2 \otimes I_{8k+1} \cong \mathbf{Z}_2 \otimes (I_1 \perp E_8^k)$. Именно это обстоятельство и явилось причиной существования второй орбиты на сфере $S^{8k}(\mathbf{Z}_2)$. Пусть $u \in S^{8k}(\mathbf{Z}_2)$ – элемент второй орбиты группы $SO(8k+1, \mathbf{Z}_2)$, действующей на сфере $S^{8k}(\mathbf{Z}_2)$. Стабилизатором точки u является группа, сопряженная с $O^+(E_8^k, \mathbf{Z}_2)$. Те же рассуждения, что и при выводе теоремы 2, приводят к соотношению

$$\frac{\omega_2(SO(8k+1))}{\omega_2(O^+(E_8^k, \mathbf{Z}_2))} = \frac{t(8k)}{2^{24k+1}},$$

где $t(8k)$ – порядок орбиты точки u на $S^{8k}(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})$. Число $t(8k)$ фактически вычислено при получении формул теоремы 2, оно равно 4^{8k+1}. Бесконечное произведение $W(E_8^k)$ отличается от $W(8k)$ только в точке $p = 2$. Поэтому

$$W(E_8^k) = W(8k)\frac{\omega_2(SO(8k))}{2^{8k-1}\omega_2(SO(8k+1))} = W(8k)\frac{2}{(2^{4k}-1)(2^{4k-1}+1)}.$$

Используя теперь теорему 2, получаем явную формулу

$$W(E_8^k) = 2^{2-8k}((4k)!)^{-1}|B_{4k}||B_2..B_{8k-2}|.$$

15.4. Суммы квадратов. Теория меры позволяет элегантно написать формулы для числа целых решений некоторых квадратичных уравнений от многих переменных. Пусть (V, f) – квадратичное пространство над полем $\mathbf{Q}$ размерности $n \ge 2$, $G = SO(f)$ – специальная ортогональная группа изометрий пространства V. Из теоремы Витта следует, что две точки $x, y \in V$ лежат на одной орбите группы $G(\mathbf{Q})$ тогда и только тогда, когда $q(x) = q(y)$, $q(x) = f(x, x)$. Будем считать, что форма q положительно определена. Тогда уравнение $q(x) = a$ имеет только конечное число решений, когда x пробегает решетку M, $M \subset V$. Это число обозначим

$r_M(a)$. Пусть S_a – многообразие над $\mathbf{Q}$, определенное уравнением $q(x) = a,\ a \in \mathbf{Q}$. Если $S_a(\mathbf{Q})$ – непусто, то $S_a(\mathbf{Q})$ – однородное пространство группы $G(\mathbf{Q})$, пусть H – стабилизатор точки $x_0 \in S_a(\mathbf{Q})$. Имеем

$$S_a = G/H,\ S_a(\mathbf{Q}) = G(\mathbf{Q})/H(\mathbf{Q}),\ S_a(A) = G(A)/H(A),$$

где A – кольцо аделей поля $\mathbf{Q}$. Выбирая согласованные инвариантные меры Хаара на $G,\ H$ и S_a, имеем соотношение

$$\int\limits_{G(A)/H(\mathbf{Q})} F(g)dg = \int\limits_{G(A)/H(A)} ds \int\limits_{H(A)/H(\mathbf{Q})} F(gh)dh =$$

$$= \int\limits_{G(A)/G(\mathbf{Q})} dg \sum_{\gamma \in G(\mathbf{Q})/H(\mathbf{Q})} F(g\gamma) \tag{1}$$

для любой функции $F \in L^1(G(A)/H(\mathbf{Q}))$. На G и H будем выбирать меры Тамагавы. Пусть теперь Φ – подходящая функция на $V \otimes_{\mathbf{Q}} A$ и $F(g) = \Phi(gx_0)$. Тогда (1) принимает вид

$$\tau(H) \int\limits_{S_a(A)} \Phi(s)ds = \int\limits_{G(A)/G(\mathbf{Q})} dg \sum_{x \in S_a(\mathbf{Q})} \Phi(gx). \tag{2}$$

В качестве Φ выберем характеристическую функцию множества

$$(V \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}) \times \prod_p (M \otimes \mathbf{Z}_p) \quad \textit{в} \quad V \otimes_{\mathbf{Q}} A.$$

Пусть $M_1, .., M_h$ – представители классов в роде решетки $M,\ r_i(a)$ – число представлений числа a элементами решетки M_i. При таком выборе Φ, учитывая, что форма q положительно определена, имеем

$$\tau(H) ds_\infty(S_a(\mathbf{R})) \prod_p ds_p(S_a(\mathbf{Z}_p)) = \sum_{i=1}^h r(a) \int\limits_{G^{M_i}(A)G(Q)/G(Q)} dg,$$

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^h G^M(A) a_i G(\mathbf{Q}),\ M_i = a_i M.$$

Соотношение (2) п.15.1 показывает, что

$$\tau(G^{M_i}(A)G(\mathbf{Q})/G(\mathbf{Q})) = \omega_\infty(G(\mathbf{R})/O^+(M_i))\tau(G_c^M) =$$

$$= \left(|O^+(M_i)| \sum_{i=1}^h \frac{1}{|O^+(M_i)|} \right)^{-1} \tau(G).$$

Учитывая, что $\tau(G) = 2$, формула (2) принимает вид

$$\varepsilon ds_\infty(S_a(\mathbf{R})) \prod_p ds_p(S_a(\mathbf{Z}_p)) = \sum_{i=1}^h r_i(a) w_i, \tag{3}$$

где

$$w_i = |O^+(M_i)|^{-1} / \sum_{i=1}^{h} |O^+(M_i)|^{-1},$$

$\varepsilon = 1$ при $n \geq 3$, $\varepsilon = 1/2$ при $n = 2$.

Возьмем в качестве M решетку $I_n =< 1 > \perp .. \perp < 1 >$. Тогда $r_M(a)$ есть количество представлений числа a суммой n квадратов. Поскольку $h = 1$ для $2 \leq n \leq 8$, то для этих n из (3) имеем формулу

$$r_M(a) = \varepsilon ds_\infty S_a(\mathbf{R}) \prod_p ds_p(S_a(\mathbf{Z}_p)). \tag{4}$$

Займемся вычислением локальных множителей в формуле (4). Пусть $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^1$ – отображение, задаваемое в координатах $x_1, .., x_n$ правилом $\varphi(x_1, .., x_n) = x_1^2 + .. + x_n^2$. Отображение φ эквивариантно относительно группы $SO(n)$ (на $\mathbf{A}^1$ группа $SO(n)$ действует тривиально), формы $dx_1 \wedge .. \wedge dx_n$ на $\mathbf{A}^n$ и dt на $\mathbf{A}^1$ также инвариантны относительно $SO(n)$. Форма $\varphi^*(dt)$ равна $d(x_1^2 + .. + x_n^2)$. Возьмем $(n-1)$-форму ds на $\mathbf{A}^n$ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$dx_1 \wedge .. \wedge dx_n = d(x_1^2 + .. + x_n^2) \wedge ds.$$

Тогда ограничение ds на S_a будет инвариантной формой на S_a. Пусть U – малая окрестность точки a в $\mathbf{R}$ или $\mathbf{Q}_p$. Тогда имеем для подходящей функции f соотношение

$$\int_{\varphi^{-1}(U)} f |dx_1..dx_n|_v = \int_U |dt|_v \int_{S_b} f |ds|_v, \ b \in U.$$

В случае поля $\mathbf{R}$ функцию f можно взять постоянной, равной 1, в случае поля $\mathbf{Q}_p$ в качестве f нужно взять характеристическую функцию решетки $\mathbf{Z}_p^n$ в $\mathbf{Q}_p^n$. В обоих случаях видим, что

$$a) ds_\infty(S_a(\mathbf{R})) = \lim_{U \to a} mes_\infty(\varphi^{-1}(U)) / mes_\infty(U),$$

$$б) ds_p(S_a(\mathbf{Z}_p)) = \lim_{U \to a} mes_p(\varphi^{-1}(U)) / mes_p(U).$$

В случае а) пусть U есть промежуток $(0, y]$. Тогда $mes_\infty(\varphi^{-1}(U))$ есть объем n-мерного шара радиуса $\sqrt{y}$, который равен $\pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)^{-1} y^{n/2}$. Поэтому

$$ds_\infty(S_a) = \frac{d}{dy} \left(\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} y^{n/2} \right)_{y=a} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} a^{\frac{n}{2}-1}.$$

В случае б) малая окрестность точки a означает множество чисел $x \in \mathbf{Z}_p$ таких, что $x \equiv a (\operatorname{mod} p^k)$. Обозначим его символом $U(a, k)$, $mes_p U(a, k) = p^{-k}$. Множество $\varphi^{-1}(U(a, k))$ имеет вид

$$\{x \in \mathbf{Z}_p^n \mid x_1^2 + .. + x_n^2 \equiv a (\operatorname{mod} p^k)\},$$

пусть

$$S_a(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}) = \{x \in (\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}) \mid x_1^2 + .. + x_n^2 \equiv a (\operatorname{mod} p^k)\}.$$

Далее, обозначим символом $\tilde{S}_a(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})$ образ множества $\varphi^{-1}(U(a,k))$ в $S_a(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})$ при редукции по модулю p^k. Заметим, что для $p>2$ множества $\tilde{S}_a(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})$ и $S_a(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})$ совпадают. Таким образом,

$$mes_p(\varphi^{-1}(U(a,k))) = |\tilde{S}_a(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})|p^{-nk},$$

откуда

$$ds_p(S_a(\mathbf{Z}_p)) = \lim_{k\to\infty} |\tilde{S}_a(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})|p^{-(n-1)k}.$$

Формулы для вычисления числа $|S_a(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})|$ хорошо известны. Они приведены, например, в книге Бурбаки [1] и имеют вид

I. $S_a = S_a^{n-1},\ n=2m,\ p>2.$

$|S_0^{n-1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})| = p^{n-1} - p^m + p^{m-1}$, если $(-1)^m$ не квадрат,

$|S_0^{n-1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})| = p^{n-1} + p^m - p^{m-1}$, если $(-1)^m$ квадрат,

$|S_a^{n-1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})| = p^{n-1} + p^{m-1},\ (a,p)=1,\ (-1)^m$ не квадрат,

$|S_a^{n-1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})| = p^{n-1} - p^{m-1},\ (a,p)=1,\ (-1)^m$ квадрат.

II. $n=2m+1,\ p>2.$

$|S_0^{n-1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})| = p^{n-1}$,

$|S_a^{n-1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})| = p^{n-1} - p^m = p^{2m} - p^m$, если $(-1)^m a$ не квадрат,

$|S_a^{n-1}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})| = p^{n-1} + p^m = p^{2m} + p^m$, если $(-1)^m a$ квадрат.

Числа $|S_a^{n-1}(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})|$ вычисляются индуктивно. Наиболее трудоемкие вычисления при $p=2$. Подробные вычисления p-адической плотности для $n=2m$ приведены в книге Милнора и Хьюзмоллера [1]. Аналогичные расчеты для нечетных n приводят к следующим соотношениям.

Теорема. Имеем следующие формулы p-адической плотности:

а) $p>2,\ a=p^v u,\ (u,p)=1$, тогда

$$ds_p(S_{p^v u}^{n-1}(\mathbf{Z}_p) = \left(1-\frac{\varepsilon r}{p}\right)(1+\varepsilon r + .. + (\varepsilon r)^v),\ n=2m;$$

$$ds_p(S_{p^v u}^{n-1}(\mathbf{Z}_p) = (1-p^{-2m})(1+x+..+x^\beta),\ n=2m+1,\ v=2\beta+1,\ x=p^{1-2m};$$

$$ds_p(S_{p^v u}^{n-1}(\mathbf{Z}_p) = (1-p^{-2m})(1+x+..+x^{\beta-1}+x^\beta(1-\varepsilon\left(\frac{u}{p}\right)p^{-m})^{-1}),$$

$$n=2m+1,\ v=2\beta,\ \varepsilon=\left(-\tfrac{1}{p}\right)^m,\ r=p^{1-m}.$$

б) $p=2$, тогда

$ds_2(S_a^{n-1}(\mathbf{Z}_2) = 2^{3-3n}\ |S_a^{n-1}(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})|$, если $a \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$;

$$ds_2(S^{n-1}_{2^v u}(\mathbf{Z}_2) = 2^{3-3n}\ [\ |S^{n-1}_0(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})|\ - 2^{2n-1}](1+2^{2-n}+..+2^{(2-n)(t-1)})+$$

$+2^{3-3n}\cdot 2^{(2-n)t}\ |S^{n-1}_{2u}(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})$, если v – нечетно, $v\geq 3,\ t=\frac{v-1}{2}$;

$$ds_2(S^{n-1}_{2^v u}(\mathbf{Z}_2) = 2^{3-3n}\ [\ |S^{n-1}_0(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})|\ - 2^{2n-1}](1+2^{2-n}+..+2^{(2-n)(t-2)})+$$

$$+2^{3-3n}\cdot 2^{(2-n)(t-1)}\ [\ |S^{n-1}_{4u}(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})|-2^{2n-1}]+2^{3-3n}\cdot 2^{(2-n)t}\ |S^{n-1}_u(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})|,$$

если v – четно, $v\geq 2,\ t=v/2$. $\triangle$

Число $|S^{n-1}_a(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})|$ может быть вычислено по формулам

$$|S^{n-1}_a(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})| = 2^{3n-3}+2^{\frac{5n}{2}-2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(2a-n)\right),\quad \textit{если}\quad a\not\equiv n(\mathrm{mod}\,4),$$

$$|S^{n-1}_a(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})| = 2^{3n-3}+2^{\frac{5n}{2}-2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(2a-n)\right)+(-1)^{\frac{a-n}{4}}2^{2n-1},\quad \textit{если}\quad a\equiv n(\mathrm{mod}\,4),$$

которые приведены в книге Милнора и Хьюзмоллера [1].

Формулы данной теоремы позволяют преобразовать правую часть соотношения (4) к конечному виду. Для решетки $M=I_n$ введем обозначение $r_n(a)$ вместо $r_M(a)$. Имеем следующие точные формулы, полученные разными математиками в разное время.

15.5. Сумма двух квадратов. В формуле (4) п.15.4 в данном случае имеем $\varepsilon=1/2,\ ds_\infty(S^1_a(\mathbf{R}))=\pi,\ ds_p(S^1_a(\mathbf{Z}_p))=(1-\chi_4(p)p^{-1})(1+\chi_4(p)+..+\chi_4(p)^v)$, если $p>2,\ p^v|a,\ p^{v+1}\not|a$.

$$ds_2(S^1_a(\mathbf{Z}_2))=ds_2(S^1_{2^v u}(\mathbf{Z}_2))=\begin{cases}2, & \textit{если}\quad u\equiv 1(\mathrm{mod}\,4),\\ 0, & \textit{если}\quad u\equiv 3(\mathrm{mod}\,4).\end{cases}$$

Имеем для $a=2^v u,\ u\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, формулу $r_2(a)=\pi\prod_p(1-\chi_4(p)p^{-1})\times$ $\prod_{p|4}(1+\chi_4(p)+..+\chi_4(p)^{v_p})$. Известно, что

$$\prod_p\left(1-\frac{\chi_4(p)}{p}\right)=L(1,\chi_4)^{-1}=\frac{4}{\pi}.$$

Таким образом,

$$r_2(a)=4\prod_{p|u}(1+\chi_4(p)+..+\chi_4(p)^{v_p})=4\sum_{d|u}\chi_4(d)=4\sum_{d|a}\chi_4(d).$$

15.6. Сумма четырех квадратов. Для $a=p^v u$ имеем

$$ds_p(S^3_a(\mathbf{Z}_p))=\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p}+..+\frac{1}{p^v}\right),\ p>2,$$

$$ds_2(S^3_a(\mathbf{Z}_2))=\begin{cases}3\cdot 2^{-v}, & v>0,\\ 1, & v=0,\end{cases}$$

$$ds_\infty(S^3_a(\mathbf{R}))=\pi^2 a.$$

Поэтому для $a=2^v b,\ v>0$ имеем

$$r_4(a)=3\pi^2 a\cdot 2^{-v}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\prod_{p|b}\left(1+\frac{1}{p}+..+\frac{1}{p^{v_p}}\right)=$$

$$= \frac{3\pi^2 a}{\zeta(2)(1-2^{-2})2^v} \prod_{p|b} \left(1 + \frac{1}{p} + .. + \frac{1}{p^{v_p}}\right) = 24 \sum_{d|b} d.$$

В случае, когда $a = b$ – нечетно, правую часть нужно разделить на 3. Отсюда вытекает формула Якоби

$$r_4(a) = \begin{cases} 8 \sum_{d|a} d, & \textit{если } a \ - \ \textit{нечетно}, \\ 24 \sum_{d|b} d, & \textit{если } a = 2^v b, \ (b,2) = 1. \end{cases}$$

15.7. Сумма шести квадратов. В этом случае для $a = 2^v u$ имеем

$$ds_2(S_a^5(\mathbf{Z}_2)) = 1 - \frac{\chi_4(u)}{4^{v+1}},$$

$$ds_p(S_a^5(\mathbf{Z}_p)) = \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p^3}\right)\left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p^2} + .. + \frac{\chi_4(p)^{v_p}}{p^{2v_p}}\right), \ p > 2,$$

$$ds_\infty(S_a^5(\mathbf{R})) = \frac{\pi^3 a^2}{2}.$$

$$r_6(a) = \frac{\pi^3 a^2}{2}\left(1 - \frac{\chi_4(u)}{4^{v+1}}\right) \prod_p \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p^3}\right)\left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p^2} + .. + \frac{\chi_4(p)^{v_p}}{p^{2v_p}}\right),$$

$$\prod_p \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p^3}\right) = L(3,\chi_4)^{-1} = \frac{32}{\pi^3}.$$

Из этих соотношений имеем

$$r_6(a) = 4(4^{v+1} - \chi_4(u)) \sum_{d|u} \chi_4\left(\frac{u}{d}\right) d^2.$$

15.8. Сумма восьми квадратов.

$$ds_2(S_a^7(\mathbf{Z}_2)) = 1 + \frac{1}{2^3} + .. + \frac{1}{2^{3(v-1)}} - \frac{1}{2^{3v}}, \ a = 2^v u,$$

$$ds_p(S_a^7(\mathbf{Z}_p)) = \left(1 - \frac{1}{p^4}\right)\left(1 + \frac{1}{p^3} + .. + \frac{1}{p^{3v_p}}\right), \ a = p^{v_p} u_p, \ p > 2,$$

$$ds_\infty(S_a^7(\mathbf{R})) = \frac{\pi^4 a^3}{6},$$

$$r_8(a) = \frac{\pi^4}{6}\zeta(4)^{-1}\left(1 - \frac{1}{2^4}\right)^{-1} \sum_{d|a} \pm d^3 = 16 \sum_{d|a} \pm d^3.$$

Знак минус при d^3 берется тогда и только тогда, когда $d + a$ – нечетно. Таким образом, имеем формулу Якоби

$$r_8(a) = 16 \sum_{d|a} (-1)^{d+a} d^3.$$

15.9. Сумма трех квадратов. В этом случае

$$ds_\infty(S_a^2(\mathbf{R})) = 2\pi\sqrt{a},$$

$$ds_p(S_a^2(\mathbf{Z}_p)) = 1 + \left(-\frac{a}{p}\right)p^{-1}, \quad если \quad (a,p)=1,\ p>2,$$

$$r_3(a) = 2\pi\sqrt{a}\prod_{p\nmid 2a}\left(1+\left(-\frac{a}{p}\right)p^{-1}\right)\prod_{p|2a} ds_p(S_a^2(\mathbf{Z}_p)) =$$

$$= 2\pi\sqrt{a}\prod_{p\nmid 2a}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\prod_{p\nmid 2a}\left(1-\left(-\frac{a}{p}\right)p^{-1}\right)^{-1}\prod_{p|2a} ds_p(S_a^2(\mathbf{Z}_p)).$$

Пусть $k(a)$ – свободное от квадратов ядро числа a, d – дискриминант квадратичного расширения $\mathbf{Q}(\sqrt{-a})$. Далее, пусть $\chi(n) = \left(\frac{d}{n}\right)$ – символ Кронекера, заметим, что $\chi(p) = \left(-\frac{a}{p}\right)$, если $p \nmid 2a$;

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \; -$$

L-функция Дирихле поля $\mathbf{Q}(\sqrt{-a}) = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, $L(1,\chi) = \frac{2\pi h(d)}{w(d)|\sqrt{d}|}$, где $h(d)$ – число классов, $w(d)$ – порядок группы единиц мнимого поля $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$. Выражение для $r_3(a)$ принимает вид

$$r_3(a) = \frac{24h(d)}{w(d)}\sqrt{\frac{a}{|d|}}\prod_{p|2a}\left[\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right) ds_p(S_a^2(\mathbf{Z}_p))\right]. \qquad (1)$$

Ограничимся случаем бесквадратного числа a. В этом случае

$$\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right) ds_p(S_a^2(\mathbf{Z}_p)) = 1+\frac{1}{p}+..+\frac{1}{p^{\frac{v_p-1}{2}}},\ p>2,\ p|a.$$

$$ds_2(S_a^2(\mathbf{Z}_2)) = \frac{3}{2}, \quad если \quad a\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4), \quad или \quad a = 2a_1.$$

$$ds_2(S_a^2(\mathbf{Z}_2)) = 1, \quad если \quad a\equiv 3 (\mathrm{mod}\, 8).$$

$$ds_2(S_a^2(\mathbf{Z}_2)) = 0, \quad если \quad a\equiv 7 (\mathrm{mod}\, 8).$$

Из (1) имеем следующие соотношения: пусть $a>3$ – бесквадратно. Тогда

$$r_3(a) = 0, \quad если \quad a\equiv 7 (\mathrm{mod}\, 8),$$

$$r_3(a) = 12h(a), \quad если \quad a\equiv 1,2,5,6 (\mathrm{mod}\, 8),$$

$$r_3(a) = 24h(a), \quad если \quad a\equiv 3 (\mathrm{mod}\, 8).$$

Предоставляем читателю разобрать общий случай.

15.10. Сумма пяти квадратов. В этом случае

$$ds_\infty(S_a^4(\mathbf{R})) = \frac{4}{3}\pi^2 a^{3/2},$$

$$ds_p(S_a^4(\mathbf{Z}_p)) = 1 + \left(\frac{a}{p}\right)p^{-2}, \quad если \quad (a,p)=1, p>2.$$

Имеем предварительную формулу

$$r_5(a) = \frac{4}{3}\pi^2 a^{3/2} \prod_{p\not| 2a} \left(1 + \left(\frac{a}{p}\right) p^{-2}\right) \prod_{p|2a} ds_p(S_a^4(\mathbf{Z}_p)) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi^2 a^{3/2} \prod_{p\not| 2a} \left(1 - \frac{1}{p^4}\right) \left(1 - \left(\frac{a}{p}\right) p^{-2}\right)^{-1} \prod_{p|2a} ds_p(S_a^4(\mathbf{Z}_p)).$$

Рассмотрим только случай, когда a не является полным квадратом. Пусть χ – характер квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ с дискриминантом d. Тогда

$$r_5(a) = \frac{4}{3}\pi^2 a^{3/2}\zeta(4)^{-1} L(2,\chi) \prod_{p|2a} \left[\left(1 - \frac{1}{p^4}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^2}\right) ds_p(S_a^4(\mathbf{Z}_p)) \right].$$

Функциональное уравнение дает соотношение $L(2,\chi) = -\pi^2 d^{-3/2} L(-1,\chi)$. Имеется формула $L(1-m,\chi) = -\frac{1}{2}B_{m,\chi}$, где $B_{m,\chi}$ – обобщенные числа Бернулли. Пусть a – бесквадратно, тогда

$$\left(1 - \frac{1}{p^4}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^2}\right) ds_p(S_a^4(\mathbf{Z}_p)) = 1$$

для $p > 2,\ p|a$. Далее,

$$ds_2(S_a^4(\mathbf{Z}_2)) = \begin{cases} 5/8, & a \equiv 1 (\operatorname{mod} 8), \\ 7/8, & a \equiv 5 (\operatorname{mod} 8), \\ 5/4, & a \equiv 2,3 (\operatorname{mod} 4). \end{cases}$$

Окончательно имеем

$$r_5(a) = \begin{cases} 20B_{2,\chi}, & \textit{если} \quad a \equiv 2,3 (\operatorname{mod} 4), \\ 60B_{2,\chi}, & \textit{если} \quad a \equiv 1 (\operatorname{mod} 8), \\ 140B_{2,\chi}, & \textit{если} \quad a \equiv 5 (\operatorname{mod} 8). \end{cases}$$

Формулы для явного вычисления чисел $B_{m,\chi}$ имеются в книге Боревича и Шафаревича [1]. В частности,

$$B_{1,\chi} = \frac{1}{d}\sum_{b=1}^{d} \chi(b) b,\ \ B_{2,\chi} = \frac{1}{d}\sum_{b=1}^{d} \chi(b) b^2 - \sum_{b=1}^{d} \chi(b) b.$$

Примеры: $r_5(2) = 40,\ r_5(3) = 80,\ r_5(5) = 112,\ r_5(17) = 480.$

15.11. Сумма семи квадратов.

$$ds_\infty(S_a^6(\mathbf{R})) = \frac{8}{15}\pi^3 a^{5/2},$$

$$ds_p(S_a^6(\mathbf{Z}_p)) = 1 + \left(-\frac{a}{p}\right) p^{-3},\ (a,p) = 1, p > 2.$$

Используем обозначения, введенные при вычислении суммы трех квадратов. Получаем

$$r_7(a) = \frac{8}{15}\pi^3 a^{5/2}\zeta(6)^{-1} L(3,\chi) \prod_{p|2a} \left[\left(1 - \frac{1}{p^6}\right)^{-1} \left(1 - \chi(p) p^{-3}\right) ds_p(S_a^6(\mathbf{Z}_p)) \right].$$

Пусть a – бесквадратно, d – дискриминант расширения $\mathbf{Q}(\sqrt{-a}), \zeta(6) = \pi^6/3^3 \cdot 5 \cdot 7$,

$$L(3,\chi) = \frac{2\pi^3}{3|d|^{5/2}} B_{3,\chi},\ ds_p(S_a^6(\mathbf{Z}_p)) = 1 - \frac{1}{p^6},\ p > 2,\ p|a.$$

Отсюда

$$r_7(a) = \frac{2^{10}}{3} \left|\frac{a}{d}\right|^{\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{\chi(2)}{2^3}\right) ds_2(S_a^6(\mathbf{Z}_2)) B_{3,\chi},$$

$$ds_2(S_a^6(\mathbf{Z}_2)) \begin{cases} 7/8, & \textit{если} \ \ a \equiv 1,2(\mathrm{mod}\,4),\ d = -4a, \\ 35/32, & \textit{если} \ \ a \equiv 3(\mathrm{mod}\,8),\ d = -a, \\ 37/32, & \textit{если} \ \ a \equiv 7(\mathrm{mod}\,8),\ d = -a. \end{cases}$$

Итак, если a – бесквадратно, то

$$r_7(a) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot B_{3,\chi},\ a \equiv 3(\mathrm{mod}\,8),$$

$$r_7(a) = \frac{4 \cdot 7 \cdot 37}{3} \cdot B_{3,\chi},\ a \equiv 7(\mathrm{mod}\,8),$$

$$r_7(a) = \frac{4 \cdot 7}{3} \cdot B_{3,\chi},\ a \equiv 1,2(\mathrm{mod} 4).$$

Примеры: $r_7(2) = 84,\ r_7(3) = 280,\ r_7(5) = 840,\ r_7(6) = 2^3 \cdot 7 \cdot 23,\ r_7(7) = 2^6 \cdot 37.$

Литература

Боревич З.И., Шафаревич И.Р.

1. Теория чисел. М.:Наука, 1985.

Борель (Borel A.)

1. Some properties of adele groups attached to algebraic groups// Bull. Amer. Math. Soc., 1961. V.67. P.583-585.
2. Арифметические свойства алгебраических групп// Математика, 1964. Т.8:2. С.3-17.
3. Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972.
4. Свойства и линейные представления групп Шевалле// Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973. С.9-59.

Бурбаки Н.

1. Алгебра: Многочлены и поля, упорядоченные группы. М.: Наука, 1965.
2. Интегрирование: Векторное интегрирование: Мера Хаара: Свертка и представления. М.:Мир, 1970.

Вейль (Weil A.)

1. The field of definition of a variety// Amer. J. Math., 1956. V.56. P.509-524.
2. Адели и алгебраические группы// Математика, 1964. Т.8:2. С.3-74.

Венков Б.А.

1. Об интегральном инварианте группы унимодулярных линейных подстановок// Венков Б.А. Исследования по теории чисел. Л., 1981. С.287-306.

Воскресенский В.Е.

1. Группа Пикара линейных алгебраических групп// Исслед. по теории чисел. Саратов: СГУ, 1969. С.7-16.
2. О бирациональной эквивалентности линейных алгебраических групп// ДАН СССР, 1969. Т.188:5. С.978-981.
3. Бирациональные свойства линейных алгебраических групп// Изв. АН СССР, серия матем., 1970. Т.34:1. С.3-19.
4. К вопросу о строении подполя инвариантов циклической группы автоморфизмов поля $\mathbf{Q}(x_1, .., x_n)$// Изв. АН СССР, серия матем., 1970. Т.34:2. С.366-375.
5. О слабой аппроксимации в алгебраических группах// Исслед. по теории чисел. Саратов: СГУ, 1972. С.3-7.
6. Поля инвариантов абелевых групп// УМН, 1973. Т.28:4. С.77-102.
7. Геометрия линейных алгебраических групп// Труды МИАН СССР, 1973. Т.132. С.151-161.
8. Некоторые вопросы бирациональной геометрии алгебраичесих торов// Proc. Internat. Congress of Math. Vancouver, Canada, 1974. V.1. P.343-347.
9. Алгебраические торы. М.: Наука, 1977.
10. Проективные инвариантные модели Демазюра// Изв. АН СССР, серия матем., 1982. Т.46:2. С.195-210.
11. Максимальные торы без аффекта в полупростых алгебраических группах// Матем.заметки, 1988. Т.44:3. С.309-318.
12. Вычисление локальных объемов в формуле Зигеля - Тамагавы// Матем.сб., 1989. Т.180:4. С.443-455.
13. Вычисление объемов некоторых классических фундаментальных областей группы целочисленных матриц// Труды Математ. ин-та АН СССР. Л.:Наука, 1990. Т.183. С.42-50.
14. Бирациональная геометрия и арифметика линейных алгебраических групп, I// Вестник СамГУ, 1997. N2. С.18-98.
15. Бирациональная геометрия и арифметика линейных алгебраических групп, II// Вестник СамГУ, 1997. N4. С.5-68.

Дьедонне Ж.

1. Геометрия классических групп. М.:Мир, 1974.

Желобенко Д.П.

1. Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли. М.:Наука, 1974.

Конвей, Слоан (Conway J.H., Sloane N.J.A.)

1. The unimodular lattices of dimension up to 23 and the Minkowski - Siegel mass constants// Europ.J.Combinatorics, 1982. V.3. P.219-231.

Коттвиц (Kottwitz R.)

1. Tamagawa numbers// Ann. of Math., 1988. V.127. P.629-646.

Лэй (Lai K.F.)

1. Tamagawa numbers of reductive algebraic groups// Compos.Math., 1980. V.41. P.153-188.

Ленглендс Р.П.

1. Объем фундаментальной области для некоторых арифметических подгрупп групп Шевалле// Арифметические группы и автоморфные функции. М.:Мир, 1969. С.80-88.

Марс Дж.Г.

1. Формула Зигеля для ортогональной группы, I-II// Арифметические группы и автоморфные функции. М.:Мир, 1969. С.89-101.

Милнор, Хьюзмоллер (Milnor J., Husemoller D.)

1. Симметрические билинейные формы. М.:Наука, 1986.

О'Мира (O'Meara O.T.)

1. Introduction to quadratic forms. Springer - Verlag, 1973.

Оно (Ono T.)

1. Arithmetic of algebraic tori// Ann. of Math., 1961. V.74. P.101-139.
2. On the Tamagawa number of algebraic tori// Ann. of Math., 1963. V.78. P.47-73.
3. On the relative theory of Tamagawa numbers// Ann. of Math., 1965. V.82. P.88-111.

Остерле (Osterle J.)

1. Numbers de Tamagawa et groupes unipotens en characteristique p// Invent. math., 1984. V.78:1. P.13-88.

Платонов В.П., Рапинчук А.С.

1. Алгебраические группы и теория чисел. М.: Наука, 1991.

Сансюк (Sansuc J.-J.)

1. Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres// J. reine und angew. Math., 1981. T.327. S.12-80.

Серр Ж.П.

1. Дзета-функция и L-функции// УМН, 1965. Т.20:6. С.19-26.

2. Когомологии Галуа. М.: Мир, 1968.

3. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.

4. Курс арифметики. М.:Мир, 1972.

Стейнберг Р.

1. Лекции о группах Шевалле. М.:Мир, 1975.

Суон (Swan R.G.)

1. Индуцированные представления и проективные модули// Математика, 1964. Т.8:2. С.3-27.

2. Invariant rational functions and a problem of Steenrod// Invent. Math., 1969. V.7. P.148-158.

Хариш - Чандра

1. Автоморфные формы на полупростых группах Ли. М.:Мир, 1971.

Хелгасон С.

1. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.:Мир, 1964.

2. Группы и геометрический анализ. М.:Мир, 1987.

Черноусов В.И.

1. О принципе Хассе для групп типа E_8// ДАН СССР, 1989. Т.306. С.1059-1063.

BIRATIONAL GEOMETRY AND ARITHMETIC OF LINEAR ALGEBRAIC GROUPS, III.

V.E. Voskresenskii [2]

The first four chapters of this work have been published in the issues of Vestnik Samara State University N2 and N4, 1997. In the fifth chapter we describe in details the construction of the famous Tamagawa measure in adele groups, Tamagawa numbers have been calculated in some important cases. We deduce Siegel formula in Tamagawa form and show its appiication for some classical examples. We give the detailed calculation of the local p-adic volumes which are necessary for obtaining the exact formulas.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант 96-01-00038.

[2] Voskresenskii Valentin Eugenievich, dept. of math. Samara state university