

МЕХАНИКА

ЗАДАЧА О РАЗГРУЗКЕ ДЛЯ ТРЕЩИНЫ ДАГДЕЙЛА

В.И. Астафьев, Ю.Н. Радаев, Л.В. Степанова¹

Рассматривается задача о разгрузке для трещины нормального отрыва в тонкой пластине с пластической зоной в форме отрезка, расположенного на продолжении линии трещины (трещина Дагдейла). В рамках модели Дагдейла и при предположении о ненарушении сплошности тела в области пластического течения построено решение задачи о разгрузке упругопластической плоскости с трещиной, предварительно нагруженной растягивающим усилием в направлении, перпендикулярном оси трещины. Найдены длина сжатой пластической зоны вблизи кончика трещины, поля остаточных напряжений и перемещений. Проанализировано также распределение остаточных напряжений на продолжении линии трещины. Показано, что у вершины трещины поле остаточных напряжений является благоприятным (сжимающим), а по мере удаления от вершины трещины – неблагоприятным (растягивающим). Определены локализация и величина максимального растягивающего напряжения. Получены точные формулы для вычисления величины закрытия трещины и значения её остаточного раскрытия после снятия нагрузки.

1. Модель Дагдейла

Пусть тонкая пластина из упругопластического материала имеет сквозную трещину $|x_1| \leq l$, находящуюся в однородном поле растягивающего напряжения σ_{22}^∞ . Берега трещины свободны от нагрузок.

Дагдейлом была предложена следующая гипотеза [1]: пластические области около концов трещины представляют собой прямолинейные отрезки длины s , расположенные на продолжении трещины. Проведенные Дагдейлом [1] эксперименты на пластинах из малоуглеродистой стали подтвердили данное предположение. Дальнейшие эксперименты на различных материалах показали, что гипотеза Дагдейла выполняется достаточно хорошо только для мягких сталей (вплоть до значений $\sigma_{22}^\infty = 0,8k$, где k – предел текучести при одноосном растяжении), однако количественные оценки, полученные на основе предположения Дагдейла, находятся в хорошем соответствии с опытными данными.

Пусть материал пластины удовлетворяет условию пластичности Треска, которое в данном случае имеет вид

$$\max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|\} = k, \quad (1.1)$$

¹ Астафьев Владимир Иванович, Радаев Юрий Николаевич, Степанова Лариса Валентиновна, Кафедра Механики сплошной среды Самарского государственного университета

где σ_1 и σ_2 – главные напряжения.

В силу симметрии задачи $\sigma_{12} = 0$ на продолжении трещины и, следовательно, выполняются также условия $\sigma_1 = \sigma_{11}$ и $\sigma_2 = \sigma_{22}$. Из трех возможностей $|\sigma_1| = k$, $|\sigma_2| = k$ и $|\sigma_1 - \sigma_2| = k$ следует выбрать $\sigma_2 = k$.

На основании гипотезы Дагдейла граничные условия краевой задачи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= 0 & (x_2 = 0, \quad |x_1| < l); \\ \sigma_{22} &= k & (x_2 = 0, \quad l < |x_1| < l + c); \\ u_2 &= 0 & (x_2 = 0, \quad |x_1| > l + c); \\ \sigma_{22} &\rightarrow \sigma_{22}^\infty & (|x_1 + ix_2| \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Длина пластической зоны c должна быть определена в процессе решения задачи из условия непрерывности напряжений на продолжении трещины. Необходимо также отметить, что в пластине в силу критерия текучести (1.1) невозможны бесконечно большие напряжения.

Решение сформулированной задачи (1.2) можно представить в виде суперпозиции решений двух задач: растяжения пластины без трещины напряжениями σ_{22}^∞ , приложенными на бесконечности, и нагружение пластины с трещиной длины $2(l + c)$ напряжениями, действующими на берегах трещины так, чтобы суммарно выполнялись условия (1.2). Напряжения, соответствующие каждой из задач, в дальнейшем обозначены через σ_{ij}^I и σ_{ij}^* , поэтому напряжения исходной задачи имеют вид $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^*$.

Решение первой задачи очевидно

$$\sigma_{11}^I = 0, \quad \sigma_{12}^I = 0, \quad \sigma_{22}^I = \sigma_{22}^\infty, \quad u_1^I = 0, \quad u_2^I = \frac{x_2 \sigma_{22}^\infty}{E}, \quad (1.3)$$

где E – модуль Юнга, поэтому интерес представляет вторая задача с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^* &= -\sigma_{22}^\infty & (x_2 = 0, \quad |x_1| < l); \\ \sigma_{22}^* &= k - \sigma_{22}^\infty & (x_2 = 0, \quad l < |x_1| < l + c); \\ u_2^* &= 0 & (x_2 = 0, \quad |x_1| > l + c); \\ \sigma_{22}^* &\rightarrow 0 & (|x_1 + ix_2| \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Решение сформулированной задачи можно получить с помощью формул Колосова - Мусхелишвили [2]

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* + \sigma_{22}^* &= 4\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)], \\ \sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + 2i\sigma_{12}^* &= 2[\bar{z}\varphi^{*''}(z) + \psi^{*'}(z)], \\ 2\mu(u_1^* + iu_2^*) &= \kappa\varphi^*(z) - z\overline{\varphi^{*'}(z)} - \overline{\psi^*(z)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ – комплексные потенциалы, которые являются аналитическими функциями комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$ в верхней полуплоскости, черта сверху является знаком комплексного сопряжения, μ – модуль сдвига. Для рассматриваемой задачи $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, где ν – коэффициент Пуассона.

Так как $\sigma_{12}^* = 0$ всюду на оси x_1 , то

$$\operatorname{Im}[\bar{z}\varphi^{*''}(z) + \psi^{*'}(z)] = 0 \quad (1.6)$$

при $x_2 = 0$. Этому условию можно удовлетворить, положив

$$\psi^*(z) = \varphi^*(z) - z\varphi^{*'}(z). \quad (1.7)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию одной неизвестной функции $\varphi^*(z)$. Из формул (1.5) в силу (1.7) получаются следующие выражения для компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^* &= 2\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)] + 2x_2\operatorname{Im}[\varphi^{*''}(z)], \\ \sigma_{22}^* &= 2\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)] - 2x_2\operatorname{Im}[\varphi^{*''}(z)], \\ \sigma_{12}^* &= -x_2\operatorname{Re}[2\varphi^{*''}(z)]\end{aligned}\quad (1.8)$$

и для компонент вектора перемещений:

$$\begin{aligned}2\mu u_1 &= (\kappa - 1)\operatorname{Re}[\varphi^*(z)] - x_2\operatorname{Im}[2\varphi^{*'}(z)], \\ 2\mu u_2 &= (\kappa + 1)\operatorname{Im}[\varphi^*(z)] - x_2\operatorname{Re}[2\varphi^{*'}(z)].\end{aligned}\quad (1.9)$$

Поэтому для определения функции $\varphi^{*'}(z)$ можно сформулировать следующую краевую задачу: на отрезке $|x_1| < l + c$ задана действительная часть функции $\varphi^{*'}(z)$

$$\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)] = \begin{cases} -\frac{\sigma_{22}^\infty}{2}, & (|x_1| < l) \\ \frac{k - \sigma_{22}^\infty}{2}, & (l < |x_1| < l + c), \end{cases}\quad (1.10)$$

а на оставшейся части оси x_1 определена мнимая часть этой функции, поскольку последнее соотношение из (1.9) при $x_2 = 0$ приводит к заключению

$$\operatorname{Im}[\varphi^{*'}(z)] = 0 \quad (|x_1| > l + c). \quad (1.11)$$

Решение сформулированной задачи можно получить, если использовать общие формулы смешанной задачи теории аналитических функций для полуплоскости [3].

Пусть на вещественной оси имеются n отрезков

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), \quad (1.12)$$

на которых заданы значения σ_{22}^* (что означает задание на отрезках действительной части потенциала $\varphi^{*'}(z)$), вне этих отрезков $u_2 = 0$ (что, в свою очередь, означает равенство нулю мнимой части потенциала $\varphi^{*'}(z)$ вне указанных отрезков). На бесконечности напряжения и перемещения исчезают.

Решение этой задачи будет содержать n произвольных постоянных, которые определяются из условия $u_2 = 0$, выполняющегося вне данных отрезков. Необходимо отметить, что если напряжения обращаются в нуль на бесконечности, то

$$\varphi^{*'}(z) = O(z^{-2}) \quad (z \rightarrow \infty). \quad (1.13)$$

Решение смешанной задачи для полуплоскости имеет вид [3]

$$\varphi^{*'}(z) = \frac{\sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\prod_{m=1}^n (t - a_m)(t - b_m)} \left| \frac{\sigma_{22}(t) dt}{t - z} + P_{n-1}(z) \right|}{2\pi \sqrt{\prod_{m=1}^n (z - a_m)(z - b_m)}}, \quad (1.14)$$

где полином $P_{n-1}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$ имеет вещественные коэффициенты.

Решение граничной задачи для верхней полуплоскости с граничными условиями (1.10)-(1.11) в силу формулы (1.14) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi^{*'}(z) &= -\frac{1}{\pi\sqrt{z^2-(l+c)^2}} \left\{ -\frac{\sigma_{22}^\infty}{2} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l+c)^2-\xi^2}}{z-\xi} d\xi + \right. \\ &+ \frac{k-\sigma_{22}^\infty}{2} \int_{-(l+c)}^{-l} \frac{\sqrt{(l+c)^2-\xi^2}}{z-\xi} d\xi + \frac{k-\sigma_{22}^\infty}{2} \int_l^{l+c} \frac{\sqrt{(l+c)^2-\xi^2}}{z-\xi} d\xi \left. \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{z^2-(l+c)^2}} \left\{ \frac{k-\sigma_{22}^\infty}{2} \int_{-(l+c)}^{l+c} \frac{\sqrt{(l+c)^2-\xi^2}}{z-\xi} d\xi - \frac{k}{2} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l+c)^2-\xi^2}}{z-\xi} d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Полином P_{n-1} исчезает в силу условия на бесконечности (1.13).

Вычисление первого из интегралов, входящих в последнее выражение, приводит к формуле:

$$\int_{-(l+c)}^{l+c} \frac{\sqrt{(l+c)^2-\xi^2}}{z-\xi} d\xi = -\{\sqrt{z^2-(l+c)^2}-z\}\pi \quad (z \notin [-l-c, l+c]), \quad (1.16)$$

где ветвь корня на бесконечности имеет разложение

$$\sqrt{z^2-(l+c)^2} = z - \frac{(l+c)^2}{2z} + \dots \quad (1.17)$$

Если $t \in [-l-c, l+c]$, то

$$\int_{-(l+c)}^{l+c} \frac{\sqrt{(l+c)^2-\xi^2}}{\xi-t} d\xi = -\pi t. \quad (1.18)$$

Для вычисления последнего интеграла в (1.15) можно воспользоваться формулами [4, с.105, формулы (9), (13)]

$$\int \frac{\sqrt{\omega^2-\xi^2}}{\xi-p} d\xi = \int \frac{-\xi-p}{\sqrt{\omega^2-\xi^2}} d\xi + (\omega^2-p^2) \int \frac{d\xi}{(\xi-p)\sqrt{\omega^2-\xi^2}} + C \quad (1.19)$$

и

$$\begin{aligned} \int \frac{d\xi}{(\xi-p)\sqrt{\omega^2-\xi^2}} &= -\frac{1}{\sqrt{\omega^2-p^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{\omega^2-p^2} + \sqrt{\omega^2-\xi^2}}{\xi-p} - \right. \\ &\left. - \frac{p}{\sqrt{\omega^2-p^2}} \right| + C \quad (\omega^2-p^2 > 0). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Здесь и в дальнейшем C – константа интегрирования; ω, p – вещественные переменные. Поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{\omega^2-\xi^2}}{\xi-p} d\xi &= -p \arcsin \frac{\xi}{\omega} + \sqrt{\omega^2-\xi^2} - \\ &- \sqrt{\omega^2-p^2} \ln \left| \frac{\sqrt{\omega^2-p^2} + \sqrt{\omega^2-\xi^2}}{\xi-p} - \frac{p}{\sqrt{\omega^2-p^2}} \right| \quad (\omega^2 > p^2). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Возвращаясь к последнему интегралу из (1.15), можно заключить

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l+c)^2 - \xi^2}}{\xi - p} d\xi = & -2p \arcsin \frac{l}{l+c} + \sqrt{(l+c)^2 - p^2} \ln \frac{p-l}{p+l} + \\ & + \sqrt{(l+c)^2 - p^2} \ln \frac{(l+c)^2 + \sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - p^2} + pl}{(l+c)^2 + \sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - p^2} - pl} \quad (l < p < l+c). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Для комплексных значений переменной p значения исследуемого интеграла следует получать как результат аналитического продолжения. Поэтому приведенная выше формула будет справедлива и для комплексных значений p при условии, что ветвь корня выбрана так, чтобы её значение было вещественным и положительным, если $p \in [-l-c, l+c]$, а ветвь логарифма такова, что при $p \in [l, l+c]$ её следует рассматривать как соответствующую вещественную функцию.

Если учесть, что

$$\int \frac{d\xi}{(\xi - p) \sqrt{\omega^2 - \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - \omega^2}} \arcsin \frac{\omega^2 - p\xi}{(\xi - p)\omega} + C \quad (p^2 > \omega^2 > \xi^2), \quad (1.23)$$

то выражение для значений исследуемого интеграла, когда параметр пробегает вещественную ось, имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l+c)^2 - \xi^2}}{\xi - x_1} d\xi = \\ = \begin{cases} -2x_1 \arcsin \frac{l}{l+c} + \sqrt{(l+c)^2 - x_1^2} \ln \left| \frac{l-x_1}{l+x_1} \right| + \\ + \sqrt{(l+c)^2 - x_1^2} \ln \frac{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - x_1^2} + x_1 l + (l+c)^2}{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - x_1^2} - x_1 l + (l+c)^2}, \\ \quad (|x_1| \leq l+c) \\ -2x_1 \arcsin \frac{l}{l+c} + \sqrt{x_1^2 - (l+c)^2} \times \\ \times \left[\arcsin \frac{(l+c)^2 + x_1 l}{(l+x_1)(l+c)} + \arcsin \frac{(l+c)^2 - x_1 l}{(l-x_1)(l+c)} \right], \quad (|x_1| \geq l+c) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Следовательно, для комплексного потенциала справедливо выражение

$$\begin{aligned} \varphi^{*'}(z) = & -\frac{1}{\pi \sqrt{z^2 - (l+c)^2}} \left\{ \frac{k - \sigma_{22}^\infty}{2} \pi (z - \sqrt{z^2 - (l+c)^2}) - \right. \\ & - \frac{k}{2} \left[2z \arcsin \frac{l}{l+c} - \sqrt{z^2 - (l+c)^2} \left(\arcsin \frac{(l+c)^2 + lz}{(l+z)(l+c)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \arcsin \frac{(l+c)^2 - lz}{(l-z)(l+c)} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где корень имеет арифметическое значение, а арксинус следует рассматривать как соответствующую вещественную функцию, если $l+c < z = x_1$. Значения комплексного потенциала $\varphi^{*'}(z)$ на отрезке $[-l-c, l+c]$ можно получить как результат аналитического продолжения (при этом используются соответствующие формулы для интегралов (1.18) и (1.24)).

В вершине трещины напряжения не могут иметь особенности, поэтому выражение в фигурных скобках должно обращаться в нуль при $z \rightarrow \pm(l+c)$, что приводит к условию, позволяющему определить длину области пластического течения

$$\frac{1 - \sigma_{22}^{\infty}/k}{2}\pi = \arcsin \frac{l}{l+c}, \quad (1.26)$$

откуда

$$\frac{c}{l} = \sec \frac{\pi \sigma_{22}^{\infty}}{2k} - 1. \quad (1.27)$$

Для определения компонент вектора перемещений необходимо найти комплексный потенциал $\varphi^*(z)$. Для вычисления потенциала воспользуемся соотношениями (1.9) и формулой

$$\psi^{*'}(z) = -z\varphi^{*''}(z), \quad (1.28)$$

а также проведём следующие дополнительные вычисления.

При $l < t < l+c$,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow t} \varphi^{*'}(z) &= \frac{i}{\pi \sqrt{(l+c)^2 - t^2}} \left\{ -\frac{k - \sigma_{22}^{\infty}}{2} \left(-\pi t + i\pi \sqrt{(l+c)^2 - t^2} \right) + \right. \\ &+ \frac{k}{2} \left(-2t \arcsin \frac{l}{l+c} + \sqrt{(l+c)^2 - t^2} \ln \frac{t-l}{t+l} + \right. \\ &\left. \left. + \sqrt{(l+c)^2 - t^2} \ln \frac{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - t^2} + tl + (l+c)^2}{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - t^2} - tl + (l+c)^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \varphi^{*''}(z)|_{z \rightarrow t} &= -i \left(-\frac{k - \sigma_{22}^{\infty}}{2} + \frac{k}{\pi} \arcsin \frac{l}{l+c} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{(l+c)^2 - t^2}} + \right. \\ &+ \frac{t^2}{((l+c)^2 - t^2) \sqrt{(l+c)^2 - t^2}} \left. \right) + \frac{ikl}{\pi} \frac{1}{t^2 - l^2} + \\ &+ \frac{i(l+c)^2 kl}{\pi} \frac{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} + \sqrt{(l+c)^2 - t^2}}{\left\{ \left(\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - t^2} + (l+c)^2 \right)^2 - l^2 t^2 \right\} \sqrt{(l+c)^2 - t^2}}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Первое слагаемое в последнем выражении исчезает в силу условия (1.26), поэтому после упрощений можно получить при $z \rightarrow t$

$$\varphi^{*''}(t) = \frac{ikl}{\pi} \left(\frac{1}{t^2 - l^2} + \frac{1}{\sqrt{(l+c)^2 - t^2} \sqrt{(l+c)^2 - l^2} + \sqrt{(l+c)^2 - t^2}} \right). \quad (1.31)$$

Связь между потенциалами (1.28) позволяет найти потенциал $\psi^*(t)$:

$$\psi^*(t) = \frac{ikl}{\pi} \left(-\frac{1}{2} \ln(t^2 - l^2) + \ln \left(\sqrt{(l+c)^2 - l^2} + \sqrt{(l+c)^2 - t^2} \right) \right) \quad (1.32)$$

и поэтому при $l < t < l+c$ потенциал $\varphi^*(t)$ определяется выражением

$$\begin{aligned}
\varphi^*(t) &= \psi^*(t) + t\varphi^{*'}(t) = \\
&= \frac{ikl}{\pi} \left[-\frac{1}{2} \ln(t^2 - l^2) + \ln \left(\sqrt{(l+c)^2 - l^2} + \sqrt{(l+c)^2 - t^2} \right) + \right. \\
&\quad + \frac{t}{2l} \ln \frac{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - t^2} + tl + (l+c)^2}{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - t^2} - tl + (l+c)^2} + \\
&\quad \left. + \frac{t}{2l} \ln \frac{t-l}{t+l} - \frac{i(k - \sigma_{22}^\infty)t\pi}{2kl} \right].
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Полученное выражение можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
\varphi^*(t) &= \psi^* + t\varphi^{*'}(t) = \\
&= -\frac{ikl}{2\pi} \ln(t^2 - l^2) + \frac{ikl}{2\pi} \ln \left(2(l+c)^2 - t^2 + 2l\sqrt{\sec^2 \frac{\pi\sigma_{22}^\infty}{2k} - 1} \times \right. \\
&\quad \times \sqrt{(l+c)^2 - t^2} - l^2 \left. \right) + \frac{(k - \sigma_{22}^\infty)t}{2} + \frac{ikt}{2\pi} \ln \frac{t-l}{t+l} + \\
&\quad + \frac{ikt}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - t^2} + tl + (l+c)^2}{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - t^2} - tl + (l+c)^2}.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Поэтому для компоненты вектора перемещений u_2 на продолжении трещины можно получить

$$\begin{aligned}
2\mu u_2(x_1, 0) &= (\kappa + 1) \operatorname{Im} \varphi^*(z) = (\kappa + 1) \left\{ -\frac{kl}{2\pi} \ln(x_1^2 - l^2) + \frac{kx_1}{2\pi} \ln \frac{x_1 - l}{x_1 + l} + \right. \\
&\quad + \frac{kl}{2\pi} \ln \left(2(l+c)^2 - x_1^2 + 2l\sqrt{\sec^2(\pi\sigma_{22}^\infty/(2k)) - 1} \sqrt{(l+c)^2 - x_1^2} - l^2 \right) + \\
&\quad \left. + \frac{kx_1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - x_1^2} + x_1l + (l+c)^2}{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - x_1^2} - x_1l + (l+c)^2} \right\},
\end{aligned} \tag{1.35}$$

где $l < x_1 < l + c$.

После введения обозначений $\xi = x_1/l$ и $\cos \beta = l/(l+c)$ последнее выражение переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi\mu}{k(\kappa+1)} \frac{u_2}{l} &= \xi \ln \frac{\xi - 1}{\xi + 1} + \\
&+ \xi \ln \frac{\sqrt{\cos^{-2} \beta - 1} \sqrt{\cos^{-2} \beta - \xi^2} + \xi + \cos^{-2} \beta}{\sqrt{\cos^{-2} \beta - 1} \sqrt{\cos^{-2} \beta - \xi^2} - \xi + \cos^{-2} \beta} + \\
&+ \ln \frac{2 \cos^{-2} \beta - \xi^2 + 2\sqrt{\cos^{-2} \beta - 1} \sqrt{\cos^{-2} \beta - \xi^2} - 1}{\xi^2 - 1},
\end{aligned} \tag{1.36}$$

где $1 < \xi < \cos^{-1} \beta$.

Поскольку $\frac{\kappa+1}{2\mu} = \frac{4}{E}$, то после преобразований можно получить

$$\frac{\pi E}{2k} \frac{u_2}{l}(x_1, 0) = -\ln(\xi^2 - 1) - 2 \ln \cos \beta + 2 \ln \left(\sin \beta + \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \beta} \right) +$$

$$+\xi \ln \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1} \frac{\sin \beta \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \beta} + \xi \cos^2 \beta + 1}{\sin \beta \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \beta} - \xi \cos^2 \beta + 1} \right) \quad (1 < \xi < \cos^{-1} \beta). \quad (1.37)$$

Распределение нормальных перемещений в зоне пластического течения для различных значений отношения σ_{22}^∞/k приведено на рис. 1.

Напряжение σ_{22} вычисляется по формуле

$$\sigma_{22} = 2\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)]|_{x_2=0}. \quad (1.38)$$

Так как при $|x_1| > l + c$ производная комплексного потенциала $\varphi^{*'}(z)$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} \varphi^{*'}(x_1, 0) = & -\frac{1}{\pi \sqrt{x_1^2 - (l+c)^2}} \left\{ -\frac{(k - \sigma_{22}^\infty)\pi}{2} \sqrt{x_1^2 - (l+c)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{k}{2} \sqrt{x_1^2 - (l+c)^2} \left(\arcsin \frac{(l+c)^2 + lx_1}{(l+x_1)(l+c)} + \arcsin \frac{(l+c)^2 - lx_1}{(l-x_1)(l+c)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

то напряжение σ_{22} находится по формуле

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = k - \frac{k}{\pi} \left(\arcsin \frac{(l+c)^2 + lx_1}{(l+x_1)(l+c)} + \arcsin \frac{(l+c)^2 - lx_1}{(l-x_1)(l+c)} \right), \quad (1.40)$$

при $|x_1| \geq l + c$.

Распределение нормальных растягивающих напряжений для различных значений отношения σ_{22}^∞/k приведено на рис. 2.

2. Разгрузка в задаче Дагдейла

Известно, что при разгрузке упругий материал стремится вернуться в своё исходное состояние. Поэтому пластическая зона будет находиться под действием сжимающих сил, действующих со стороны окружающего её упругодеформированного материала. На продолжении трещины в пластической зоне $l < |x_1| < l + \tilde{c}$, где $\tilde{c}$ – длина сжатой пластической зоны, остаточные напряжения равны $\tilde{\sigma}_{22} = -k$ (на рассматриваемом отрезке напряжения меняют знак на противоположный), а на оставшейся части оси x_1 в силу предположения о ненарушении сплошности тела в области пластического течения приращение компоненты вектора перемещений u_2 равно нулю. Поэтому, если σ_{22}^∞ – максимальное значение растягивающего усилия, достигнутого перед разгрузкой, то относительно разности напряжений $\Delta\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}$ и смещений $\Delta u_i = \tilde{u}_i - \hat{u}_i$, где $\tilde{\sigma}_{ij}$, $\tilde{u}_i$ – остаточные напряжения и соответствующие им смещения, $\hat{\sigma}_{ij}$, $\hat{u}_i$ – распределение напряжений и перемещений непосредственно перед разгрузкой, вновь получается упругая задача с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{22}^* &= \sigma_{22}^\infty & (x_2 = 0, \quad |x_1| < l); \\ \Delta\sigma_{22}^* &= -2k + \sigma_{22}^\infty & (x_2 = 0, \quad l < |x_1| < l + \tilde{c}); \\ \Delta u_2^* &= 0 & (x_2 = 0, \quad |x_1| > l + \tilde{c}); \\ \Delta\sigma_{22}^* &\rightarrow 0 & , \quad (|x_1 + ix_2| \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\tilde{c}$ – длина сжатой остаточной пластической зоны у кончика трещины.

Решение сформулированной краевой задачи имеет вид

$$\Delta\varphi^{*'}(z) = -\frac{1}{\pi \sqrt{z^2 - (l + \tilde{c})^2}} \left\{ \frac{-2k + \sigma_{22}^\infty}{2} \pi(z - \sqrt{z^2 - (l + \tilde{c})^2}) + \right.$$

$$+k \left[2z \arcsin \frac{l}{l+\tilde{c}} - \sqrt{z^2 - (l+\tilde{c})^2} \left(\arcsin \frac{(l+\tilde{c})^2 + lz}{(l+z)(l+\tilde{c})} + \arcsin \frac{(l+\tilde{c})^2 - lz}{(l-z)(l+\tilde{c})} \right) \right] \Bigg\}, \quad (2.2)$$

аналогичный решению Дагдейла.

Длина сжатой остаточной пластической зоны вычисляется из уравнения

$$\frac{\tilde{c}}{l} = \sec \frac{\pi \sigma_{22}^\infty}{4k} - 1. \quad (2.3)$$

Тогда распределение остаточных напряжений на продолжении линии трещины имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{22}(x_1, 0) &= -k + \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{(l+\tilde{c})^2 + lx_1}{(l+x_1)(l+\tilde{c})} + \arcsin \frac{(l+\tilde{c})^2 - lx_1}{(l-x_1)(l+\tilde{c})} \right), \\ &\quad (l+\tilde{c} \leq |x_1| \leq l+c), \\ \tilde{\sigma}_{22}(x_1, 0) &= -k - \frac{k}{\pi} \left(\arcsin \frac{(l+c)^2 + lx_1}{(l+x_1)(l+c)} + \arcsin \frac{(l+c)^2 - lx_1}{(l-x_1)(l+c)} \right) + \\ &\quad + \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{(l+\tilde{c})^2 + lx_1}{(l+x_1)(l+\tilde{c})} + \arcsin \frac{(l+\tilde{c})^2 - lx_1}{(l-x_1)(l+\tilde{c})} \right), \\ &\quad (|x_1| \geq l+c). \end{aligned} \quad (2.4)$$

После перехода к безразмерной переменной $\xi = x_1/l$ последние соотношения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\sigma}_{22}}{k}(\xi, 0) &= -1 + \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{1+\xi \cos^2 \beta/2}{(1+\xi) \cos \beta/2} + \arcsin \frac{1-\xi \cos^2 \beta/2}{(1-\xi) \cos \beta/2} \right), \\ &\quad (\cos^{-1} \beta/2 \leq |\xi| \leq \cos^{-1} \beta); \\ \frac{\tilde{\sigma}_{22}}{k}(\xi, 0) &= -1 - \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \frac{1+\xi \cos^2 \beta}{(1+\xi) \cos \beta} + \arcsin \frac{1-\xi \cos^2 \beta}{(1-\xi) \cos \beta} \right) + \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{1+\xi \cos^2 \beta/2}{(1+\xi) \cos \beta/2} + \arcsin \frac{1-\xi \cos^2 \beta/2}{(1-\xi) \cos \beta/2} \right), \\ &\quad (|\xi| \geq \cos^{-1} \beta), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\beta = \pi \sigma_{22}^\infty / (2k)$.

Исследование (2.5) на экстремум показывает, что график функции $\tilde{\sigma}_{22}(\xi)$ имеет точку излома (рис.3, 4) при $\xi = \cos^{-1} \beta$, в которой функция $\tilde{\sigma}_{22}(\xi)$ принимает максимальное значение. Максимум остаточных напряжений может достигать значения $k/3$. Причем необходимо отметить, что координаты этой точки совпадают с координатами вершины отрезка пластического течения непосредственно перед разгрузкой.

Распределение перемещений Δu_2 при $1 < \xi < \cos^{-1}(\beta/2)$ определяется формулой (1.37) с заменой k на $-2k$ и σ_{22}^∞ на $-\sigma_{22}^\infty$:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi E}{4k} \frac{\Delta u_2}{l}(\xi, 0) &= -\ln(\xi^2 - 1) - 2 \ln \cos(\beta/2) + \xi \ln \frac{\xi - 1}{\xi + 1} + \\ &\quad + \xi \ln \frac{\sin(\beta/2) \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2(\beta/2)} + \xi \cos^2(\beta/2) + 1}{\sin(\beta/2) \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2(\beta/2)} - \xi \cos^2(\beta/2) + 1} + \\ &\quad + 2 \ln \left(\sin(\beta/2) + \sqrt{1 - \cos^2(\beta/2) \xi^2} \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тогда поле остаточных перемещений имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\pi E}{2k} \frac{\tilde{u}_2}{l}(\xi, 0) = & \ln(\xi^2 - 1) - 2 \ln \cos \beta + 2 \ln \left(\sin \beta + \sqrt{1 - \cos^2 \beta \xi^2} \right) - \\
& - 2\xi \ln \left[\frac{\xi - 1}{\xi + 1} \frac{\sin(\beta/2) \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2(\beta/2)} + \xi \cos^2(\beta/2) + 1}{\sin(\beta/2) \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2(\beta/2)} - \xi \cos^2(\beta/2) + 1} \right] + \\
& + 4 \ln \cos(\beta/2) - 4 \ln \left(\sin(\beta/2) + \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2(\beta/2)} \right) + \\
& + \xi \ln \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1} \frac{\sin \beta \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \beta} + \xi \cos^2 \beta + 1}{\sin \beta \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \beta} - \xi \cos^2 \beta + 1} \right). \quad (2.7)
\end{aligned}$$

$(1 < \xi < \cos^{-1}(\beta/2)).$

Полученные соотношения позволяют вычислить величину закрытия трещины

$$\frac{\pi E}{8k} \frac{\Delta \delta}{l} = \ln \cos^2(\beta/2), \quad (2.8)$$

где

$$\Delta \delta = 2 \Delta u_2(x_1 = l, x_2 = 0)$$

— закрытие трещины.

Результирующее раскрытие трещины имеет вид

$$\frac{\pi E}{8k} \frac{\delta}{l} = \ln \frac{\cos^2(\beta/2)}{\cos \beta}. \quad (2.9)$$

Распределение остаточных перемещений приведено на рис. 5.

3. Заключение

В работе рассмотрена задача о разгрузке трещины нормального отрыва в тонкой металлической пластине.

1. Определены и проанализированы поля остаточных напряжений и перемещений. Показано, что максимальное значение растягивающего остаточного напряжения возникает там, где заканчивалась зона пластического течения перед снятием нагрузки. В этой же точке эпюра остаточных напряжений имеет излом. Величина остаточного растягивающего напряжения может достигать одной трети от предела текучести.

2. Поле остаточных напряжений стремится закрыть трещину. Величина закрытия трещины определяется из формулы (2.8).

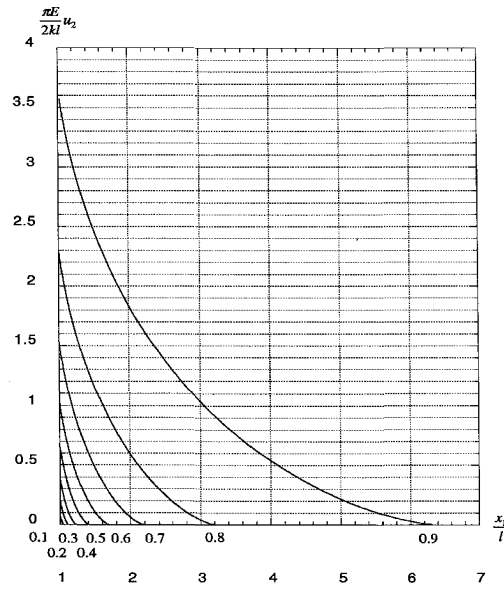


Рис. 1

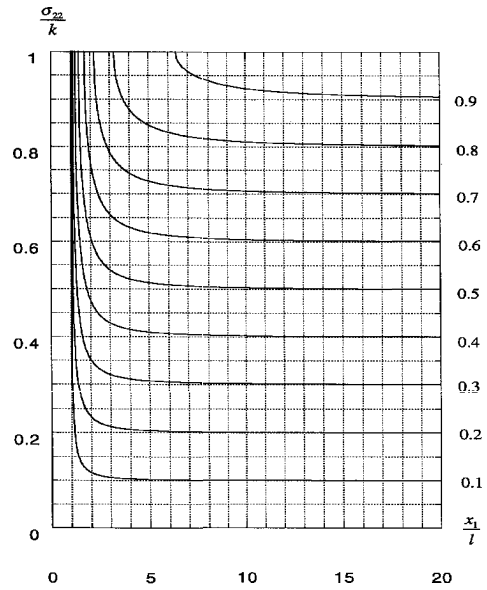


Рис. 2

Рис. 1. Графики нормальных перемещений в зоне пластического течения для различных значений отношения $\frac{\sigma_{22}^{\infty}}{k}$

Рис. 2. Графики нормальных растягивающих напряжений для различных значений отношения $\frac{\sigma_{22}^{\infty}}{k}$

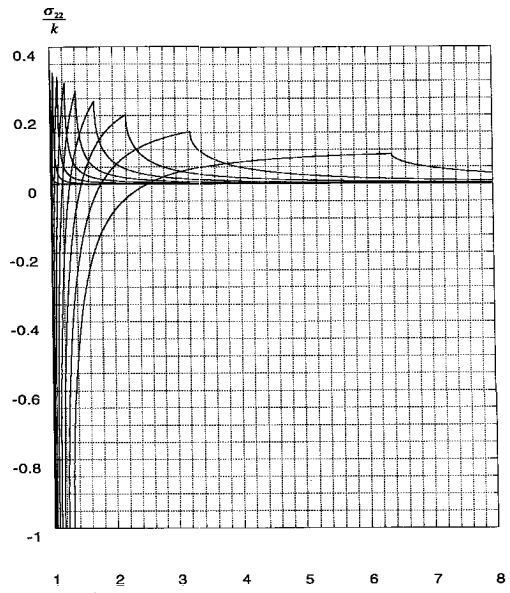


Рис. 3

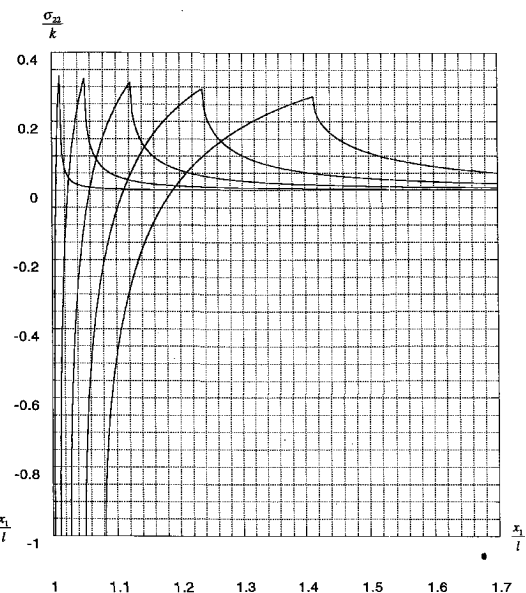


Рис. 4

Рис. 3. Распределение остаточных напряжений по сечению пластины для возрастающих значений $\frac{\sigma_{22}^{\infty}}{k}$

Рис. 4. Распределение остаточных напряжений по сечению пластины для значений отношения $\sigma_{22}^{\infty} < \frac{k}{2}$

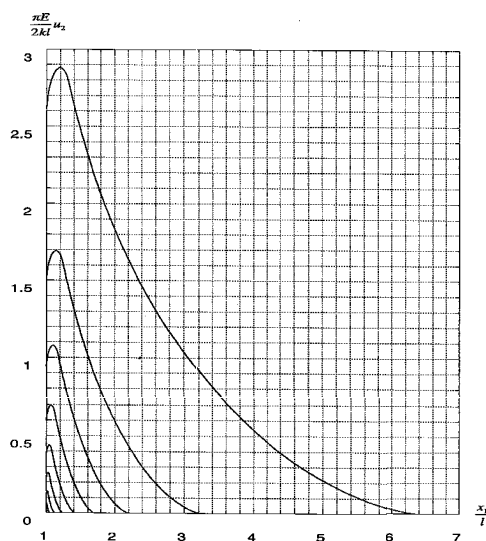


Рис. 5. Графики нормальных остаточных перемещений для различных значений отношения $\frac{\sigma_{22}^{\infty}}{k}$

Литература

- [1] Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits, J. Mech. Phys. Solids, V.8, No.2, 1960, P. 100-104.
- [2] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
- [3] Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949.
- [4] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.

V.I.Astafiev, L.V.Stepanova, Y.N. Radaev ²

Здесь должен быть

²Astafiev Vladimir Ivanovitch, Stepanova Larisa Valentinovna, Yurii Nikolaevitch Radaev, Dept. of Continuum Mechanics