# ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЛАПЛАСИАН ЛЕВИ $L_S$ И БЕСКОНЕЧНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В.Б.Соколовский [1]

В счетномерном вещественном гильбертовом пространстве рассматривается задача с косой производной для уравнений, разрешенных относительно лапласиана Леви. Рассмотрение основано на установленной связи этой задачи с некоторым уравнением на граничной поверхности, содержащим введенный автором оператор, названный поверхностным лапласианом Леви.

Пусть $H$ – счетномерное вещественное гильбертово пространство с фиксированным ортобазисом, в котором введена операция усреднения функционала в смысле Гато-Леви по сфере и по ее экватору (т.е. по пересечению сферы конечным числом гиперплоскостей, проходящих через центр сферы). Одним из бесконечномерных аналогов конечномерного лапласиана $\Delta$ является оператор Лапласа-Леви $L$ (лапласиан Леви) [1], определяемый посредством равенства

$$LU[a] = \lim_{r\to 0} \frac{M_{||x-a||=r}U - U[a]}{r^2},$$

$M_{||x-a||=r}U$ – среднее значение функционала $U$ по гильбертовой сфере $||x-a|| = r$.

Для уравнений с оператором $L$ ставятся краевые задачи, аналогичные классическим краевым задачам математической физики в пространстве $R^n$. К настоящему времени имеются многочисленные результаты, относящиеся к теории задачи Дирихле для уравнений с оператором $L$ и ее приложениям [2].

Сформулировав в 1922 г. задачу Неймана для уравнения $LU = 0$, П.Леви [1,с.375] высказал гипотезу о связи ее с рассматриваемым на граничной поверхности $S$ уравнением, содержащим некоторый оператор $\Delta_S$, определяемый, как и лапласиан Леви $L$, посредством операции усреднения по гильбертовой сфере и предельного перехода. В [3] доказано, что подобная связь имеет место даже для задачи с косой производной, если несколько изменить определение оператора $\Delta_S$.

В предлагаемой работе излагается основанная на этой связи методика решения задачи с косой производной для уравнения $LU = \Phi[x; U]$. Суть этой методики заключается в следующем: на граничной поверхности $S$ рассматривается определенным образом связанное с исходной краевой задачей уравнение с некоторым оператором $L_S$ (названным автором поверхностным лапласианом Леви); находится на $S$ решение $V$ этого уравнения. Решением задачи с косой производной является решение задачи Дирихле для уравнения $LU = \Phi[x; U]$ с граничным условием $V$.

[1] Соколовский Валерий Борисович. Кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета

# 1. Описание областей и функциональных классов

Пусть $G$ – выпуклая ограниченная открытая область в $H$ с границей $S$. Через $P_x(a_1,...,a_k)$ обозначим пересечение конечного числа гиперплоскостей, проходящих через точку $x \in H$ : $P_x(a_1,...,a_k) = \{z \in H : (z-x, a_i) = 0,\ i = \overline{1,k}\}$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $H$; $S_{x,r} = \{z \in H : \|z-x\| = r\}$ – сфера с центром в точке $x$ радиуса $r$, где $\|\cdot\|$ – норма в $H$; $\widetilde{S}_{x,r} = S_{x,r} \cap P_x(a_1,...,a_k)$ – экватор сферы $S_{x,r}$.

Обозначим через $\rho_x[y]$ $(x \in G)$ определенный на сфере $S_{0,1}$ функционал такой, что поверхность $S$ описывается уравнением $z = x + \rho_x[y]y$ (он имеет смысл длины радиус-вектора точки $z \in S$, исходящего из точки $x \in G$ в направлении единичного вектора $y$).

**Определение 1.1.** Выпуклую ограниченную открытую область $G \subset H$ назовем областью шарового типа, если для каждого $x \in G$ существуют $b_1,...,b_k \in H$ (возможно, различные для различных $x$) такие, что:

а) $\rho_x[y]$ равномерно непрерывен на экваторе $\widetilde{S}_{0,1} = S_{0,1} \cap P_0(b_1,...,b_k)$ сферы $S_{0,1}$;

б) $\rho_x[y]$ обладает средним по $\widetilde{S}_{0,1}$, равным $\sqrt{\Gamma[x] - \|x\|^2}$, где $\Gamma$ – равномерно непрерывный в $\overline{G} = G \cup S$ функционал, гармонический в $\overline{G} \cap P_x(b_1,...,b_k)$[2] и такой, что $\Gamma[x] < \|x\|^2$ вне $\overline{G}$, $\Gamma[x] = \|x\|^2$ на $S$; $\sigma[x] = \Gamma[x] - \|x\|^2$ называется фундаментальной функцией области $G$;

в) для любого $0 < r \le \sqrt{\sigma[x]}$ экватор $\widetilde{S}_{x,r} = S_{x,r} \cap P_x(b_1,...,b_k) \subset \overline{G}$, причем на этом экваторе выполняется $\sigma[z] \ge \sigma[x] - r^2$.

Примером такой области является $G = \{x \in H :\ (Tx, x) < 1\}$ – область, ограниченная эллипсоидом $(Tx, x) = 1$ ($T = \gamma I + V$, где $\gamma > 0$ – константа; $V$ – вполне непрерывный симметричный оператор в $H$, спектр которого содержится в $(-\gamma, +\infty)$, причем число положительных собственных значений его разве лишь конечно; $I$ – тождественный оператор). Условия а) — в) будут выполнены, если в качестве $b_1, \ldots, b_k$ взять вектор $Tx$ и собственные векторы оператора $V$, соответствующие положительным собственным значениям его.

В самом деле, из уравнения $(Tx + \rho_x[y]Ty, x + \rho_x[y]y) = 1$ легко находится выражение для $\rho_x[y]$ на экваторе $\widetilde{S}_{0,1}$ сферы $S_{0,1}$

$$\rho_x[y] = \sqrt{\frac{1 - (Vx, x) - \gamma\|x\|^2}{\gamma + (Vy, y)}}.$$

Отсюда следует выполнение условия а).

Далее, функционал $(Vy, y)$ гармоничен в $H$. Значит, в силу теоремы о равенстве среднего значения равномерно непрерывного функционала по сфере и экватору, он гармоничен и в $P_0(b_1, \ldots, b_k)$. Поэтому, усредняя $\rho_x[y]$ по $\widetilde{S}_{0,1}$ с использованием известных свойств сферических средних в гильбертовом пространстве, установим, что его среднее по $\widetilde{S}_{0,1}$ равно $\sqrt{\frac{1}{\gamma}(1 - (Vx, x)) - \|x\|^2}$. Гармоничность функционала $\Gamma[z] = \frac{1}{\gamma}(1 - (Vz, z))$ в $H$, а, следовательно, и в $P_x(b_1, \ldots, b_k)$, очевидна. Таким образом, выполнено условие б). Фундаментальная функция области $G$ имеет вид $\sigma[x] = \frac{1}{\gamma}(1 - (Vx, x)) - \|x\|^2$.

[2] Функционал $F$ называется гармоническим в $\overline{G} \cap P_x(b_1,...,b_k)$, если его среднее по экватору любой сферы с центром в $P_x(b_1, \ldots, b_k)$, лежащему в $\overline{G} \cap P_x(b_1,...,b_k)$, равно значению этого функционала в центре сферы

Выполнение условия в) следует из того, что при каждом $0 < r \leq \sqrt{\sigma[x]}$ для любой точки $x + ry \in S_{x,r} \cap P_x(b_1, .., b_k)$ выполняется:

$$(Tx + rTy, x + ry) \leq 1 + \frac{1 - (Tx, x)}{\gamma} \sum_i (y, e_i)^2 \lambda_i,$$

$$\sigma[x + ry] = \sigma[x] - r^2 - \frac{r^2}{\gamma} \sum_i (y, e_i)^2 \lambda_i,$$

в которых $\lambda_i$ ($i = \overline{1, \infty}$) – собственные значения оператора $V$, $e_i$ ($i = \overline{1, \infty}$) – соответствующие им собственные векторы; суммирование проводится по тем номерам $i$, для которых собственные значения $\lambda_i$ отрицательны.

Заметим, что областью шарового типа будет также любая область из класса, введенного Г.Е.Шиловым [4].

**Определение 1.2.** Поверхность $S = \{x \in H : \Phi[x] = 0\}$, ограничивающую область $G = \{x \in H : \Phi[x] > 0\}$ с внешностью $\operatorname{ext} G = \{x \in H : \Phi[x] < 0\}$, будем называть гладкой, если функционал $\Phi[x]$ непрерывно дифференцируем по Фреше в $H$, причем $\Phi'(x) \neq 0$ на $S$. В этом случае единичный вектор $n_x = \frac{\Phi'(x)}{||\Phi'(x)||} \in H$ назовем вектором внутренней нормали к поверхности $S$ в точке $x \in S$.

Пусть $S$ – граница выпуклой ограниченной открытой области в $H$. Следуя П.Леви, средней кривизной $K[x]$ поверхности $S$ в точке $x \in S$ будем называть предел

$$\lim_{\lambda \to +0} M_{||y||=1} \frac{2\lambda}{\rho^2_{x+\lambda n_x}[y]}$$

при условии его существования.

Если $G$ – область шарового типа с фундаментальной функцией $\sigma[x]$, ограниченная гладкой поверхностью $S = \{x \in H : \sigma[x] = 0\}$, то выражение для средней кривизны поверхности $S$ в точке $x \in S$ примет такой вид:

$$K[x] = \lim_{\lambda \to 0} \frac{2\lambda}{\sigma[x + \lambda n_x]} = \frac{2}{||\sigma'(x)||}. \tag{1.1}$$

**Определение 1.3.** Скажем, что заданный в области шарового типа $G$ с фундаментальной функцией $\sigma[x]$ функционал $F[x]$ принадлежит классу $\mathcal{M}(G)$, если выполнено следующее:

1) $F[x]$ равномерно непрерывен в $\overline{G} = G \cup S$;

2) при любых $x \in G$, $0 < r \leq \sqrt{\sigma}[x]$ для $F$ существует среднее по экватору $S_{x,r} \cap P_x(b_1, ..., b_k)$, где $b_1, ..., b_k$ - векторы, удовлетворяющие условиям а) - в) из определения 1.1.

В силу теоремы о равенстве среднего значения равномерно непрерывного функционала по сфере и экватору это среднее не зависит от выбора экватора $S_{x,r} \cap P_x(b_1, ..., b_k)$ сферы $S_{x,r}$, удовлетворяющего условиям а) - в) из определения 1.1. Поэтому будем называть его просто средним значением от $F$ по $S_{x,r}$ и обозначать $M(F; x; r)$, полагая по определению $M(F; x; 0) = F[x]$ в $G$. Если сфера $S_{x,r} \subset \overline{G}$, то, очевидно, $M(F; x; r)$ совпадает со средним по сфере $S_{x,r}$;

3) все средние обладают полугрупповым свойством: при любых $x \in G$, $0 < r < \sqrt{\sigma[x]}$, $0 < \lambda \leq \sqrt{\sigma[x] - r^2}$ для $F_\lambda[z] = M(F; z; \lambda)$ существует среднее по $S_{x,r} \cap P_x(b_1, ..., b_k)$, равное $M(F; x; \sqrt{r^2 + \lambda^2})$.

Корректность этих условий обеспечивается возможностью их реализации на различных классах функционалов. Так, например, этим условиям удовлетворяют рассмотренные Е.М.Полищуком в [5] функционалы интегрального типа в $L_2(0,1)$, если операцию усреднения в $L_2(0,1)$ ввести по Гато с помощью ступенчатых функций. В случае абстрактного гильбертова пространства со средним по Леви такими функционалами являются, например, регулярные функции Г.Е.Шилова [4].

Множество $\mathcal{M}(G)$ с естественно определенными операциями сложения и умножения и *sup*-нормой образует банахово кольцо.

Отметим еще в классе $\mathcal{M}(G)$ два подкласса: класс $\mathcal{M}^{(k,0)}(G)$, состоящий из таких функционалов $U \in \mathcal{M}(G)$, для которых функция $\widetilde{U}[x;r] = M(U;x;\sqrt{r})$ обладает частными производными по $r$ до порядка $k$ включительно, равномерно непрерывными по $(x,r)$ в $G^* = \{(x,r) : x \in G,\ 0 < r < \sigma[x]\} \subset H \times R^1$; и класс $\mathcal{M}^{(1,1)}(G)$, состоящий из функционалов $U \in \mathcal{M}(G)$, для которых функция $\widetilde{U}[x,r]$ обладает частными производными по $x$ (по Фреше) и по $r$, равномерно непрерывными по $(x,r)$ в $G^*$. По известной теореме анализа о продолжении равномерно непрерывных функций [6,с.104] эти производные допускают равномерно непрерывные по $(x,r)$ расширения на замыкание области $G^*$, так что в дальнейшем будем считать их определенными на этом замыкании. В частности, в $G$ имеет смысл выражение $\widetilde{U}'_x[x;0]$. Нетрудно показать, что $\widetilde{U}'_x[x;0]$ – производная Фреше $U^{'}(x)$ в $G$, $\widetilde{U}'_r[x;0] = LU[x]$ в $G$; $U'(x)$ и $LU[x]$ также можно считать определенными в $\overline{G}$.

## 2. Поверхностный лапласиан Леви $L_S$

Пусть $S$ – поверхность, ограничивающая область $G$ шарового типа с фундаментальной функцией $\sigma[x]$. Определим на $\mathcal{M}(G)$ операторы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ так, что $\mathfrak{M}F$ является решением задачи Дирихле $LU = 0$ в $G, U = F$ на $S$ из класса $\mathcal{M}^{(1,0)}(G)$, а $\mathfrak{N}F$ – решением задачи Пуассона $LU = F$ в $G$, $U = 0$ на $S$ из $\mathcal{M}^{(1,0)}(G)$. Так как для каждого $F \in \mathcal{M}(G)$ единственным в классе $\mathcal{M}^{(1,0)}(G)$ решением этих задач являются соответственно $M(F;x;\sqrt{\sigma[x]})$ и $-\int_0^{\sigma[x]} M(F;x;\sqrt{r})dr$, то

$$\mathfrak{M}F[x] = M(F;x;\sqrt{\sigma[x]}), \tag{2.1}$$

$$\mathfrak{N}F[x] = -\int_0^{\sigma[x]} M(F;x;\sqrt{r})dr. \tag{2.2}$$

Можно показать [3,с.23], что если фундаментальная функция $\sigma[x]$ непрерывно дифференцируема в $H$, а $F \in \mathcal{M}^{1,1}(G)$, то $\mathfrak{M}F$ и $\mathfrak{N}F$ непрерывно дифференцируемы по Фреше в $G$, и

$$(\mathfrak{M}F)'(x) = \widetilde{F}'_x[x;\sigma[x]] + M(LF;x;\sqrt{\sigma[x]}) \cdot \sigma'(x), \tag{2.3}$$

$$(\mathfrak{N}F)'(x) = -\mathfrak{M}F[x] \cdot \sigma^{'}(x) - \int_0^{\sigma[x]} \widetilde{F}'_x[x;r]dr; \tag{2.4}$$

напомним, что $\widetilde{F}[x;r] = M(F;x;\sqrt{r})$.

Пусть $\mathcal{N}$-некоторое множество определенных в $\overline{G} = G \cup S$ функционалов. Через $\mathcal{N}_S$ условимся обозначать множество сужений на $S$ функционалов из $\mathcal{N}$. Например, $\mathcal{M}_S(G)$ - множество сужений на $S$ всех функционалов из $\mathcal{M}^{(1.1)}(G)$. Предположим, далее, что на $S$ задано поле единичных векторов $l_x$, направленных внутрь $G$, и $F \in \mathcal{M}_S(G)$.

**Определение 2.1.** Оператор $L_S$, определенный посредством равенства

$$L_S F[x] = \lim_{t \to +0} \frac{\mathfrak{M}F[x + tl_x] - F[x]}{\sigma[x + tl_x]} \quad (x \in S), \tag{2.5}$$

называется поверхностным лапласианом Леви, соответствующим полю $l_x$.

Из этого определения сразу следует, что оператор $L_S$ – оператор дифференцирования в алгебраическом смысле: если $F_1, F_2 \in \mathcal{M}_S(G)$ таковы, что на $S$ существуют $L_S F_1$ и $L_S F_2$, и $\alpha_1, \alpha_2$ – константы, то

$$L_S(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2) = \alpha_1 L_S F_1 + \alpha_2 L_S F_2,$$
$$L_S(F_1 F_2) = F_1 L_S F_2 + F_2 L_S F_1.$$

Ниже везде будет предполагаться, что фундаментальная функция $\sigma[x]$ области $G$ непрерывно дифференцируема по Фреше в $H$.

**Теорема 2.1.** Допустим, что поле $l_x$ не содержит векторов, касательных к $S$, т.е. $(\sigma^{'}(x), l_x) \neq 0$ на $S$. Тогда для каждого $F \in \mathcal{M}^{(1,1)}(G)$ на поверхности $S$

$$L_S F[x] = \frac{K[x]}{2(n_x, l_x)} \cdot \frac{dF}{dl_x}(x) + LF[x]; \tag{2.6}$$

здесь $K[x]$ – средняя кривизна поверхности $S$ в точке $x \in S$, $n_x$ – внутренняя нормаль к $S$ в этой точке, $\frac{dF}{dl_x}(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{F[x+tl_x]-F[x]}{t}$ – производная по направлению $l_x$ от функционала $F$ в точке $x$.

**Доказательство.** Так как поверхность $S$ задается уравнением $\sigma[x] = 0$, и, значит, $n_x = \frac{\sigma'(x)}{||\sigma'(x)||}$, в силу дифференцируемости $\sigma[x]$ по Фреше в $H$ с учетом (1.1) имеем для каждой точки $x \in S$ при $t \to +0$ :

$$\sigma[x + tl_x] = (\sigma^{'}(x), l_x)t + 0(t) = \frac{2(n_x, l_x)}{K[x]}t + 0(t).$$

Следовательно, равенство (2.5), определяющее оператор $L_S$, можно переписать в таком виде:

$$L_S F[x] = \frac{K[x]}{2(n_x, l_x)} \lim_{t \to +0} \frac{\mathfrak{M}F[x + tl_x] - F[x]}{t} \qquad (x \in S). \tag{2.7}$$

Как отмечалось выше, $\mathfrak{M}F[x]$ непрерывно дифференцируема по Фреше в $G$. Поэтому при $t$, достаточно близких к $0$,

$$\frac{\mathfrak{M}F[x + tl_x] - F[x]}{t} = ((\mathfrak{M}F)'(x + \Theta t l_x), l_x) \qquad (|\,\Theta\,| \leq 1).$$

Заменяя здесь правую часть в соответствии с (2.3) и переходя затем в этом равенстве к пределу при $t \to +0$, найдем:

$$\lim_{t \to +0} \frac{\mathfrak{M}F[x + tl_x] - F[x]}{t} = (\widetilde{F}'_x[x; 0], l_x) + LF[x] \cdot (\sigma^{'}(x), l_x).$$

Подставляя это выражение в (2.7) и учитывая, что $\widetilde{F}'_x[x; 0] = F'(x), (\sigma'(x), l_x) = \frac{2(n_x, l_x)}{K[x]}$, получим (2.6), что и требовалось доказать.

**Замечание.** Полагая $l_x = \frac{\sigma'(x)}{||\sigma'(x)||}$, т.е. рассматривая поле внутренних нормалей к поверхности $S$, получим известную формулу П.Леви:

$$L_S F[x] = \frac{K[x]}{2} \cdot \frac{dF}{dn_x}(x) + LF[x];$$

здесь $L_S$ - поверхностный лапласиан Леви, соответствующий полю нормалей.

**Теорема 2.2.** Пусть производная Фреше $\sigma'(x)$ равномерно непрерывна в $G$, причем $\delta[x]=(\sigma'(x),a-x)\neq 0$ на $S$ $(a\in G)$. Предположим, что векторное поле $l_x$ имеет вид: $l_x=-\frac{x-a}{||x-a||}$, а функционал $F\in\mathcal{M}^{(1,1)}(G)$. Тогда для каждых $x\in\overline{G}, 0\leq r\leq 1$ выполняется

$$\mathfrak{M}(\delta\cdot L_S F)[a+r(x-a)]=-r\frac{d}{dr}\mathfrak{M}F[a+r(x-a)]. \tag{2.8}$$

**Доказательство.** Считая $x\in S$ фиксированным и выполняя в пределе из правой части равенства (2.7) замену переменной $r=1-\frac{t}{||x-a||}$, получим:

$$\delta[x]\cdot L_S F[x]=\lim_{r\to 1-0}\frac{\mathfrak{M}F[a+r(x-a)]-F[x]}{1-r}. \tag{2.9}$$

Из выражения (2.3) для производной Фреше $(\mathfrak{M}F)'(z)$ видно, что эта производная равномерно непрерывна в $G$. Отсюда следует, что функция $f(r)=\mathfrak{M}F[a+r(x-a)]$ со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{M}(G)$ непрерывно дифференцируема на $[0,1]$ (напомним, что норма в $\mathcal{M}(G)$ - равномерная). Поэтому

$$Q_r[z]=\frac{\mathfrak{M}F[a+r(z-a)]-\mathfrak{M}F[z]}{1-r}\underset{r\to 1-0}{\longrightarrow}-\frac{d}{dr}\mathfrak{M}F[a+r(z-a)]\bigg|_{r=1}=Q_1[z]$$

равномерно по $z$ в $\overline{G}$. Используя свойство непрерывности среднего (среднее от предела равномерно сходящейся последовательности функционалов равно пределу средних), в силу гармоничности $\mathfrak{M}F[x]$ с учетом вида (2.1) для $\mathfrak{M}F$ находим для $z\in\overline{G}, 0<\rho\leq 1:$

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}Q_1[a+\rho(z-a)] &= \lim_{r\to 1-0}\frac{\mathfrak{M}F[a+r\rho(z-a)]-\mathfrak{M}F[a+\rho(z-a)]}{1-r}=\\ &= -\rho\frac{d}{d\rho}\mathfrak{M}F[a+\rho(z-a)].\end{aligned} \tag{2.10}$$

Отстается заметить, что в силу (2.9) $Q_1[x]=\delta[x]\cdot L_S F[x]$ для $x\in S$, так что $\mathfrak{M}Q_1[z]=\mathfrak{M}(\delta\cdot L_S F[z]$ в $\overline{G}$. Из (2.10) теперь сразу же следует (2.8). Теорема доказана.

**Следствие.** В условиях доказанной теоремы сужение на $S$ гармонического функционала $Q[x]=(\widetilde{F}'_x[x;\sigma[x]],a-x)+M(LF;x;\sqrt{\sigma[x]})\cdot\delta[x]$ совпадает с $\delta[x]\cdot L_S F[x]$.

**Доказательство.** Как отмечалось при доказательстве теоремы, гармонические в $\overline{G}$ функционалы $Q_r[z]=\frac{1}{1-r}\{-\mathfrak{M}F[z]+\mathfrak{M}F[a+r(z-a)]\}$ сходятся при $r\to 1-0$ равномерно в $\overline{G}$ к

$$Q_1[z]=-\frac{d}{dr}\mathfrak{M}F[a+r(z-a)]\bigg|_{r=1};$$

поэтому $Q_1[z]$ тоже гармоничен в $\overline{G}$. С другой стороны, представив $Q_r[z]$ в виде $-((\mathfrak{M}F)'(a+\widetilde{r}(z-a)),z-a)(r<\widetilde{r}<1)$, подставив сюда выражение (2.3) для производной Фреше $(\mathfrak{M}F)'(z)$ и переходя затем к пределу при $r\to 1-0$, найдем, что предел $Q_r[z]$ при $r\to 1-0$ совпадает с фигурирующим в формулировке следствия функционалом $Q[z]$. Следовательно,

$$Q[z]=-\frac{d}{dr}\mathfrak{M}F[a+r(z-a)]\bigg|_{r=1}\quad \text{в}\quad \overline{G},$$

так что $Q[z]$ – гармонический функционал в $\overline{G}$. Для завершения доказательства остается заметить, что для $x \in S$ из (2.8) вытекает следующее соотношение: $\delta[x] \cdot L_S F[x] = -\frac{d}{dr}\mathfrak{M}F[a + r(x-a)]\big|_{r=1}$, т.е. сужение на $S$ гармонического функционала $Q[z]$ совпадает с $\delta[z] \cdot L_S F[z]$.

Рассмотрим на поверхности $S$ уравнение

$$L_S U[x] = \Psi[x; U]; \tag{2.11}$$

здесь $L_S$ – поверхностный лапласиан Леви, соответствующий полю $l_x = -\frac{x-a}{||x-a||}$ ($a \in G$). Как и выше предполагается, что $\delta[x] = (\sigma'(x),\ a - x \neq 0$ на $S)$; $\Psi[x; \tau]$ – зависящий от вещественного параметра $\tau \in D$ ($D$ – замкнутое множество в $R$) функционал. К уравнению (2.11) присоединим условие

$$M(U;\, a;\, \sqrt{\sigma[a]}) = C \qquad (2.12),$$

где $C$ - константа. Условимся обозначать через $(\mathfrak{M}\Psi)[x; \tau]$ решение задачи Дирихле для уравнения $LU = 0$ с граничным условием $\Psi[x;\, \tau]$, а через $\mathfrak{M}\Psi_V[x]$ – решение ее с граничным условием $\Psi_V[x] = \Psi[x;\, V[x]]$. Пусть $\mathcal{N}_S$ – некоторое подмножество класса $\mathcal{M}_S^{(1.1)}(G)$. Предположим, что для $\Psi[x; \tau]$ выполняется в классе $\mathcal{N}_S$ условие

(A). Для любого $V \in \mathcal{N}_S$ с областью значений $R(V) \subseteq D$ функция $\Psi[x; V[x]] \in \mathcal{M}_S(G)$, и при каждом $x \in G$

$$(\mathfrak{M}\Psi_V)[x] = \, (\mathfrak{M}\Psi)[x;\, \tau]|_{\tau = \mathfrak{M}V[x]}\, .$$

При этих предположениях задача (2.11) – (2.12) оказывается эквивалентной зависящей от параметра $x \in S$ задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Именно, имеет место следующая

**Теорема 2.3.** Пусть функционал $\delta[x] = (\sigma'(x),\, a - x) \in \mathcal{M}_S(G)$ ограничен снизу на $S$ положительной константой. Тогда для разрешимости с единственностью в классе $\mathcal{N}_S$ задачи (2.11) – (2.12) необходимо и достаточно, чтобы зависящая от параметра $x \in S$ задача Коши на $[0, 1)$

$$-ru'(r) = a(x;\, r)\psi(x;\, r;\, u), \qquad u(0) = C \tag{2.13}$$

(функция $\psi(x; r; u) = \mathfrak{M}\Psi[a + r(x-a); u]$ при каждом $x \in S$ рассматривается в области $[0, 1) \times \mathcal{D}$; $a(x; r) = \mathfrak{M}\delta[a + r(x-a)]$, $C-$ та же константа, что и в (2.12)) была бы разрешима с единственностью в образе $\mathcal{N}_S^*$ множества $\mathcal{N}_S$ при отображении

$$U \in \mathcal{N}_S \to u(x; r) = \mathfrak{M}U[a + r(x-a)].$$

(Или, иначе, для того, чтобы задача (2.11) – (2.12) имела единственное решение $U \in \mathcal{N}_S$, необходимо и достаточно, чтобы задача (2.13) имела решение, представимое в виде $u(x; r) = \mathfrak{M}U[a + r(x-a)]$, где $U \in \mathcal{N}_S$, и такое решение было бы единственным).

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме.

**Лемма.** Пусть выполнены условия теоремы 2.3, и $U \in \mathcal{N}_S$ – решение задачи (2.11) – (2.12). Тогда при каждом $x \in S$ $u(x; r) = (\mathfrak{M}U)[a + r(x-a)]$ – решение задачи Коши (2.13).

Обратно, если решение задачи Коши (2.13) имеет вид $u(x; r) = \mathfrak{M}U[a + r(x-a)]$, где $U \in \mathcal{N}_S$, то $U[x]$ будет решением задачи (2.11) – (2.12).

**Доказательство.** Если $U \in \mathcal{N}_S$ – решение уравнения (2.11) на $S$, то, умножая обе части (2.11) на $\delta[x] = (\sigma'(x),\, a - x)$ и затем применяя к полученному равенству оператор $\mathfrak{M}$, в силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения $LU = 0$, получим

$$\mathfrak{M}(\delta \cdot L_S U) = \mathfrak{M}\delta \cdot \mathfrak{M}\Psi_U = \mathfrak{M}\delta[x] \cdot \mathfrak{M}\Psi[x;\tau]|_{\tau=\mathfrak{M}U[x]} \quad \text{в} \quad G.$$

В силу (2.8) это означает, что $u(x;r) = (\mathfrak{M}U)[a+r(x-a)]$ при каждом $x \in S$ является решением задачи (2.13) на $[0,1)$.

Обратно, если решение задачи Коши (2.13) на $[0,1)$ имеет вид $u(x;r) = \mathfrak{M}U[a + r(x-a)]$, где $U \in \mathcal{N}_S$, то, переходя к пределу при $r \to 1-0$ в равенстве

$$-ru'(r) = a(x;r) \cdot \psi(x;r;u), \qquad (x \in S),$$

опять на основании (2.8) и условия (A) для $\Psi[x;\tau]$ получим, что $U$ – решение уравнения $\delta[x] \cdot L_S[x] = \delta[x] \cdot \Psi_U[x]$ на $S$. А так как $\delta[x] \neq 0$ на $S$, отсюда следует, что $L_S[x] = \Psi[x;U]$ на $S$. Равенство $\mathfrak{M}U[a] = C$ очевидно.

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.3. Пусть задача (2.11)–(2.12) разрешима с единственностью в классе $\mathcal{N}_S$. Разрешимость задачи Коши (2.13) в классе $\mathcal{N}_S^*$ следует сразу же из леммы. Если $u_1(x;r) = \mathfrak{M}U_1[a + r(x-a)]$ и $u_2(x;r) = \mathfrak{M}U_2[a + r(x-a)]$ - два ее решения из этого класса, то $U_1$ и $U_2$, являясь по лемме решениями задачи (2.11)–(2.12), совпадают на $S$. Но тогда, в силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения $LU = 0$, $\mathfrak{M}U_1 = \mathfrak{M}U_2$ в $G$, так что $u_1(x;r) = u_2(x;r)$ на $[0,1)$ при каждом $x \in S$.

Обратно, пусть задача Коши (2.13) разрешима с единственностью в классе $\mathcal{N}_S^*$. Разрешимость задачи (2.11)–(2.12) опять следует из леммы. Пусть $U_1, U_2 \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$ – два решения этой задачи. Тогда, по лемме $u_1(x;r) = \mathfrak{M}U_1[a + r(x-a)]$ и $u_2(x;r) = \mathfrak{M}U_2[a + r(x-a)]$ являются решениями задачи Коши (2.13) и, следовательно, совпадают при каждом $x \in S$: $u_1(x;r) = u_2(x;r)$ на $[0,1)$. Переходя в этом равенстве к пределу при $r \to 1-0$, получим $U_1[x] = U_2[x]$ при каждом $x \in S$, т.е.решение задачи (2.11)–(2.12) единственно в $\mathcal{N}_S$. Теорема доказана.

**Следствие.** Для разрешимости в классе $\mathcal{N}_S$ задачи (2.11)–(2.12) необходимо, чтобы $\mathfrak{M}\Psi_C[a] = 0$.

**Доказательство.** Если $U \in \mathcal{N}_S$ – решение задачи (2.11)–(2.12), то по доказанной теореме, $u(x;r) = \mathfrak{M}U[a + r(x-a)]$ при каждом $x \in S$ является решением уравнения

$$-ru^{'}(r) = a(x;r)\psi(x;r;u) \quad (0 < r < 1).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $r \to 0$ и учитывая выполняющееся для $\Psi[x,\tau]$ условие (A), получим $\mathfrak{M}\delta[a] \cdot \mathfrak{M}\Psi_C[a] = 0$. Так как $\mathfrak{M}\delta[a] > 0$, заключаем, что $\mathfrak{M}\Psi_C[a] = 0$.

## 3. Задача с косой производной

Пусть $G \subset H$ – область шарового типа с непрерывно дифференцируемой (по Фреше) фундаментальной функцией $\sigma[x]$; $S$ – граница ее; $l_x$ – заданное на $S$ поле единичных векторов, направленных внутрь $G$, такое, что $(n_x, l_x) \neq 0$ на $S$ ($n_x$ – поле внутренних нормалей к $S$); $L_S$ – поверхностный лапласиан Леви, соответствующий полю $l_x$.

Задачей с косой производной для уравнения

$$LU = \Phi[x;U], \tag{3.1}$$

разрешенного относительно лапласиана Леви $L$, мы называем задачу о нахождении в $G$ такого решения его, которое в каждой точке $x \in S$ имело бы предельное значение производной по направлению $l_x$, и

$$\lim_{y\to x}\frac{dU}{dl_x}(y) = F[x;U] \quad (y \in G). \tag{3.2}$$

Пусть зависящие от числового параметра $\tau$ функционалы $\Phi_\tau = \Phi[x;\tau]$ и $F_\tau[x] = F[x;\tau]$, определенные при каждом $\tau \in D$ ($D \subseteq R$ – замкнутое множество) в $\overline{G} = G \cup S$, таковы, что для любого $V[x]$ из некоторого класса $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}^{1,1}(G)$ с областью значений $R(V) \subseteq D$, $\Phi[x;V[x]] \in \mathcal{M}^{1,1}(G)$ и $F[x;V[x]] \in \mathcal{M}(G)$. Предположим, далее, что задача Дирихле $LU[x] = \Phi[x;U]$ в $G$, $U = W$ на $S$ разрешима с единственностью в $\mathcal{N}$ для любого $W \in \mathcal{N}_S$ с областью значений $R(W) \subseteq D$. При этих допущениях имеют место следующие утверждения.

**Лемма 3.1.** Пусть задача (3.1)–(3.2) имеет решение $U \in \mathcal{N}$. Тогда сужение $U$ на $S$ будет являться решением следующего уравнения на $S$

$$L_S V[x] = \frac{K[x]}{2(n_x, l_x)} F[x;V] + \Phi[x;V], \tag{3.3}$$

где $K[x]$ – средняя кривизна поверхности $S$ в точке $x \in S$.

**Доказательство.** Очевидно, $U$ будет решением задачи Дирихле $LP[x] = \Phi[x;U]$ в $G$, $P = U$ на $S$ и, следовательно, представимо в $G$ в виде $U = \mathfrak{M}U + \mathfrak{N}\Phi_U$. Используя выражения (2.3) и (2.4) для производных Фреше от $\mathfrak{M}U$ и $\mathfrak{N}\Phi_U$, находим

$$\frac{dU}{dl_x}(y) = (\widetilde{U}'_x[y;\sigma[y]],\, l_x) + (\sigma'(y), l_x) M(LU; y; \sqrt{\sigma[y]}) -$$

$$-\mathfrak{M}\Phi_U[y](\sigma'(y),\, l_x) - \int_0^{\sigma[y]} ((\widetilde{\Phi}_U)'_x[y;r],\, l_x)\,dr.$$

Переходя здесь к пределу при $y \to x \in S$ и учитывая, что, согласно (1.1), $\sigma'(x) = \frac{2}{K[x]} \cdot n_x$, получим

$$F[x;U] = \lim_{y\to x}\frac{dU}{dl_x}(y) = (\widetilde{U}'_x[x;0], l_x) + \frac{2}{K[x]}(n_x, l_x)\cdot LU[x] - \mathfrak{M}\Phi_U[x]\cdot\frac{2}{K[x]}(n_x, l_x).$$

Поскольку, как отмечалось в §1, $\widetilde{U}'_x[x;0] = U'(x)$, последнее равенство в силу (2.6) означает, что

$$\frac{K[x]}{2(n_x, l_x)} F[x;U] = L_S U[x] - \Phi[x;U],$$

что и требовалось доказать.

**Лемма 3.2.** Пусть уравнение (3.3) на $S$ имеет решение $W \in \mathcal{N}_S$. Тогда задача (3.1)–(3.2) разрешима в $G$; ее решением будет функционал, дающий решение задачи Дирихле

$$LU[x] = \Phi[x;U] \quad \text{в} \quad G; \qquad U = W \quad \text{на} \quad S. \tag{3.4}$$

**Доказательство.** По предположению, задача (3.4) разрешима с единственностью в $\mathcal{N}$; пусть $U \in \mathcal{N}$ – ее решение. Как решение задачи

$$LP = \Phi[x;U] \quad \text{в} \quad G, \qquad P = W \quad \text{на} \quad S,$$

$U$ допускает в $G$ представление $U = \mathfrak{M}W + \mathfrak{N}\Phi_U$. Так как $W \in \mathcal{M}_S^{(1,1)}$, $\Phi_U \in \mathcal{M}^{(1,1)}(G)$, то, находя опять с помощью (2.3) и (2.4) $\frac{dU}{dl_x}(y)$ $(x \in S,\ y \in G)$ и переходя затем к пределу при $y \to x$, получим

$$\lim_{y\to x}\frac{dU}{dl_x}(y) = \frac{2(n_x, l_x)}{K[x]}L_S W[x] - 2\frac{(n_x, l_x)}{K[x]}\Phi[x;W] = F[x;U].$$

Лемма доказана.

Из доказанных лемм вытекает

**Теорема 3.1.** Для разрешимости в классе $\mathcal{N}$ задачи (3.1)–(3.2) необходимо и достаточно, чтобы уравнение (3.3) на $S$ было разрешимо в классе $\mathcal{N}_{\mathcal{S}}$.

Пусть теперь заданное на $S$ векторное поле $l_x$ имеет вид $l_x = -\frac{x-a}{||x-a||}$ $(a \in G)$. В этом случае удается установить и утверждения, касающиеся единственности решения задачи (3.1)–(3.2). Именно, имеет место

**Теорема 3.2.** Для того, чтобы задача (3.1)–(3.2) имела решение $U \in \mathcal{N}$ такое, что $\mathfrak{M}U[a] = C$ ($C$ – константа), необходимо и достаточно, чтобы краевая задача на поверхности $S$

$$L_S V[x] = \frac{||x-a||}{(\sigma'(x),\ a-x)}F[x;V] + \Phi[x;V], \ \ \mathfrak{M}V[a] = C \tag{3.5}$$

была бы разрешима в классе $\mathcal{N}_S$.

Это решение $U$ будет единственно в классе $\mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда решение задачи (3.5) единственно в $\mathcal{N}_S$.

**Доказательство.** Первое утверждение теоремы следует сразу же из лемм 3.1 и 3.2.

Пусть теперь удовлетворяющее условию $\mathfrak{M}U[a] = C$ решение задачи (3.1)–(3.2) единственно в $\mathcal{N}$, и $W_1$, $W_2$ – решения задачи (3.5) из $\mathcal{N}_S$. Обозначим через $U_1$ и $U_2$ решения задачи (3.1) - (3.2), совпадающие на $S$ соответственно с $W_1$ и $W_2$ (такие решения существуют по лемме 3.2). Ясно, что если $W_1$ и $W_2$ различны, то будут различны и $U_1, U_2$, что противоречит предположению.

Обратно, пусть решение задачи (3.5) единственно в классе $\mathcal{N}_S$ и $U_1$, $U_2$ – решения задачи (3.1)–(3.2) такие, что $C = \mathfrak{M}U_1[a] = \mathfrak{M}U_2[a]$. Если $U_1$ и $U_2$ различны, то в силу единственности решения задачи Дирихле $LU = \Phi[x;U]$ в $G$, $U = W$ на $S$, это различие скажется уже на $S$, и, по лемме 3.1, сужения $U_1$ и $U_2$ на $S$ будут являться различными решениями задачи (3.5), что противоречит предположенной единственности ее решения. Теорема доказана.

Краевая задача (3.5) имеет вид, рассмотренный в §2. Предположим, что для этой задачи выполнены условия теоремы 2.3: функционал $\delta[x] = (\sigma'(x), a-x) \in \mathcal{M}_S(G)$ ограничен снизу на $S$ положительной константой, а $\Phi[x;U]$, $F[x;U]$, кроме приведенных выше условий, удовлетворяют в классе $\mathcal{N}_S$ условию (A) из §2. Формулируя необходимое условие разрешимости задачи (3.5) (следствие из теоремы 2.3), получим необходимое условие разрешимости задачи (3.1)–(3.2) с $l_x = -\frac{x-a}{||x-a||}$:

**Теорема 3.3.** Для того, чтобы задача (3.1)–(3.2) с $l_x = -\frac{x-a}{||x-a||}$ имела решение $U \in \mathcal{N}$ такое, что $\mathfrak{M}U[a] = C$, необходимо, чтобы $\mathfrak{M}\Psi_C[a] = 0$, где $\Psi_C[x] = \frac{||x-a||}{(\sigma'(x),\, a-x)}F[x;C] + \Phi[x;C]$.

**Пример.** Рассмотрим в единичном шаре $\Omega_{0,1}$ с границей $S_{0,1}$ краевую задачу

$$LU = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_{0,1}, \qquad \lim_{y\to x}\frac{dU}{dl_x}(y) = F[x] \quad \text{на} \quad S, \tag{3.6}$$

считая, что функционал $F \in \mathcal{M}^{(1,1)}(\Omega_{0,1})$, а векторное поле $l_x = -\frac{x-a}{||x-a||}(a \in \Omega_{0,1})$; заметим, что для шара $\Omega_{0,1}$ фундаментальная функция $\sigma[x] = 1 - ||x||^2$, так что $\sigma'(x) = -2x$. Решение этой задачи будем искать в классе $\mathcal{N} = \mathcal{M}^{(1,1)}(\Omega_{0,1})$. Так как функционал $\delta[x] = 2(x, x-a)$ ограничен на $S_{0,1}$ снизу положительной константой, теорема 3.3 дает необходимое условие разрешимости ее: $\mathfrak{M}(g\cdot\frac{F}{\delta})[a] = 0$ $(g[x] = ||x-a||)$. Поскольку в силу мультипликативного свойства среднего (среднее от произведения функционалов равно произведению средних) $\mathfrak{M}(g\cdot\frac{F}{\delta}) = \mathfrak{M}(gF)\cdot\frac{1}{\mathfrak{M}\delta}$, а $\mathfrak{M}\delta[a] > 0$, это необходимое условие примет вид $\mathfrak{M}(gF)[a] = 0$; будем считать его выполненным. По теореме 3.2 эта задача эквивалентна следующей задаче с оператором $L_S$

$$L_S V[x] = \frac{||x-a||}{2(x, x-a)}F[x] \quad \text{на} \quad S_{0,1}, \qquad \mathfrak{M}V[a] = C. \tag{3.7}$$

Пользуясь леммой из §2, нетрудно найти ее решение. В самом деле, зависящая от параметра $x \in S_{0,1}$ задача Коши (2.13) запишется в этом случае так:

$$-ru'(r) = a(x;r)\cdot\psi(x;r) \quad (0 \le r < 1), \quad u(0) = C; \tag{3.8}$$

здесь $a(x;r) = \mathfrak{M}\delta[a + r(x-a)]$, $\psi(x;r) = \mathfrak{M}(g\frac{F}{\delta})[a + r(x-a)]$. Как отмечалось выше, $\mathfrak{M}(g\frac{F}{\delta}) = \mathfrak{M}(g\cdot F)\cdot\frac{1}{\mathfrak{M}\delta}$, и потому правую часть уравнения этой задачи можно записать как $\mathfrak{M}(gF)[a + r(x-a)]$. После этого задача (3.8) примет вид:

$$-ru'(r) = \mathfrak{M}(gF)[a + r(x-a)] \quad (0 \le r < 1), \quad u(0) = C.$$

Решая её, находим

$$u(x;r) = -\int_0^r \frac{1}{t}\mathfrak{M}(gF)[a + t(x-a)]dt + C.$$

Найденное решение задачи (3.8) имеет вид $u(x;r) = \mathfrak{M}V[a + r(x-a)]$, если положить

$$V[x] = -\int_0^1 \frac{1}{t}\mathfrak{M}(g\cdot F)[a + t(x-a)]dt + C.$$

Очевидно, этот функционал принадлежит классу $\mathcal{M}_S^{(1,1)}(\Omega_{0,1})$. Поэтому он и является решением задачи (3.7). Согласно изложенному выше методу, для решения задачи (3.6) нужно теперь решить задачу Дирихле $LU = 0$ в $\Omega_{0,1}$, $U = V$ на $S_{0,1}$. Ее решением является функционал $U[x] = \mathfrak{M}V[x]$. В силу гармоничности в $\overline{\Omega}_{0,1}$ функционала $V$, $\mathfrak{M}V[x] = V[x]$. Следовательно, функционал

$$U[x] = -\int_0^1 \frac{1}{t}\mathfrak{M}(gF)[a + t(x-a)]dt + C \qquad (g[x] = ||x-a||)$$

является решением этой задачи Дирихле, а, значит, и решением задачи (3.6).

**Замечание.** Если область $G$ – шар с центром в точке $a \in H$ радиуса $R$, а поле $l_x$ – поле внутренних нормалей к сфере, ограничивающей этот шар, то изложенные выше результаты для задачи с косой производной превращаются в известные [7] результаты для задачи Неймана. Заметим, что задача Неймана другим способом и в другом функциональном классе решена также А.С.Немировским [8].

## Литература

[1] Леви П.Конкретные проблемы функционального анализа.М.: Наука, 1967.

[2] Феллер М.Н. Бесконечномерные эллиптические уравнения и операторы типа П.Леви // Успехи мат.наук.1986. Т.41, N4, С.97-140.

[3] Соколовский В.Б. Краевые задачи для уравнений с оператором Лапласа-Леви в гильбертовом пространстве: Дис.... канд.физ.- мат. наук. Казань, 1977.

[4] Шилов Г.Е. О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. // Функц. анализ и его приложения. 1967. Т.1, N2, С.81-90.

[5] Полищук Е.М. Об уравнении типа Лапласа и Пуассона в функциональном пространстве // Матем.сб. 1967. Т.72, N2. С.261-292.

[6] Шварц Л. Анализ, Т.1, "Мир", 1972.

[7] Соколовский В.Б. Вторая и третья краевые задачи в гильбертовом шаре для уравнений эллиптического типа, разрешенных относительно функционального лапласиана // Изв.вузов. Математика. 1975. N3, С.111-114.

[8] Немировский А.С. Оператор Лапласа-Леви на одном классе функций // Труды ММО. 1975. Т.32, С.227-250.

## THE SURFACE LEVI'S LAPLASIAN $L_S$ AND THE INFINITE-DIMENSIONAL PROBLEM WITH A DIRECTIONAL DERIVATIVE

V.B. Sokolovsky [3]

The problem with a directional derivative for the solved about a Levi's Laplasian equations is considered in the countably dimensional Hilbert space. This consideration is based on the established connection of this problem with a some equation on a boundary surface. This equation contains the so-called surface Levi's Laplasian, introduced by the author.

[3] Sokolovsky Valery Borisovitch, Dept. of Math. Samara State University