ПРИМИТИВНЫЕ ИДЕАЛЫ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ЛИСТЫ КВАНТОВЫХ МАТРИЦ

В. Г. Мосин. [1]

Доказана теорема о биекции между примитивными идеалами в алгебре регулярных функций на квантовых $m \times n$ - матрицах и симплектическими листами в ассоциированной пуассоновой структуре.

Мотивировка. Если некоммутативная алгебра A является деформацией коммутативной алгебры B, то, скорее всего, существует взаимно однозначное соответствие между примитивными идеалами в A и симплектическими листами в ассоциированной пуассоновой структуре на множестве $\mathrm{Max}\,(B)$. Например, известно, что такое соответствие существует между примитивными идеалами в алгебре функций $\mathbf{C}_q[G]$ на квантовой группе и симлектическими листами в G [1, 2, 3]. В настоящей работе мы обобщаем этот результат на случай квантовых $m \times n$ - матриц.

Содержание. Пусть $\mathcal{V}$ — множество комплексных $m \times n$ - матриц ($m \leq n$), невырожденных в том смысле, что все их миноры максимального порядка отличны от нуля, $\mathbf{C}[\mathcal{V}]$ — алгебра регулярных функций на $\mathcal{V}$, $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$ — ее квантовый аналог. Мы разбиваем $\mathrm{Prim}\,\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$ на классы (теорема 2.10, следствие 2.11) подобно тому, как это сделано в [2], и сводим, тем самым, изучение идеалов из данного класса к изучению локализованной фактор-алгебры $\widetilde{\mathcal{A}}_w$. Мы убеждаемся, что эта алгебра является скрученной (предложение 3.1), и доказываем теорему о взаимно однозначном соответствии между примитивными идеалами из $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$ и симплектическими листами в $\mathcal{V}$ (теорема 3.9).

Обозначения. Обозначим $\mathcal{M}$ алгебру регулярных функций на линейном пространстве комплексных $m \times n$ - матриц. Ее квантовым аналогом служит алгебра $\mathcal{M}_q$ [4, опр. 1.2], определенная как ассоциативная $\mathbf{C}$ - алгебра, порожденная mn образующими x_i^j, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ с квадратичными соотношениями:

$$
\begin{array}{rcll}
x_i^j x_k^j & = & q^{-1} x_k^j x_i^j & \forall i < k, \\
x_i^j x_i^k & = & q^{-1} x_i^k x_i^j & \forall j < k, \\
x_i^j x_l^k & = & x_l^k x_i^j & \forall i < l, j > k, \\
\left[x_i^j, x_l^k \right] & = & (q^{-1} - q) x_i^k x_l^j & \forall i < l, j < k,
\end{array}
$$

где q — общий параметр квантования, т. е. переменная или комплексное число, не являющееся корнем из 1. Назовем квантовым минором (или, короче, q-минором)

[1]Мосин Владимир Геннадьевич. Кафедра алгебры и геометрии, Самарского государственного университета.

элемент C_I^J алгебры $\mathcal{M}_q$, определенный формулами:

$$C_I^J = \sum_{\sigma \in S_p} (-q)^{l(\sigma)} x_{i_1}^{j_{\sigma(1)}} \dots x_{i_p}^{j_{\sigma(p)}} = \sum_{\sigma \in S_p} (-q)^{-l(\sigma)} x_{i_{\sigma(1)}}^{j_1} \dots x_{i_{\sigma(p)}}^{j_p}.$$

Тогда алгебры $\mathbf{C}[\mathcal{V}]$ и $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$ определяются как соответствующие локализации алгебр $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_q$ по всем минорам (квантовым минорам в случае $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$) порядка m.

Отметим [4, 1], что квантовый минор допускает разложение по строке (столбцу), разложение по чужой строке (столбцу) равно нулю, справедлив аналог теоремы Лапласса.

Для мультииндекса $I = \{i_1 \dots, i_p\}$ определим операцию $[I]_s = \{i_1, \dots, i_s\}$, $s \le p$, и будем обозначать $\left[C_I^J\right]_s$ главный q-минор порядка s. Если $i < i_t$ (или $i > I$) $\forall t$, то мы будем писать $i < I$ (соответственно, $i > I$). Все мультииндексы предполагаются упорядоченными, $E_p = \{1, \dots, p\}$.

Ключевые слова и фразы. Пусть A — ассоциативная алгебра, порожденная $a_1, \dots, a_k$. Элемент b алгебры A называется нормальным, если существуют целые показатели φ_i такие, что $ba_i = q^{\varphi_i} a_i b$ $\forall i$. Алгебра A называется скрученной, если все ее образующие являются нормальными элементами. Важным для нас будет то, что все первичные (а, значит, и примитивные) идеалы скрученной лорановской алгебры порождаются своим пересечением с центром [6, 2.3].

1. Предварительные предложения

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, $J = \{j_1, \dots, j_p\}$. Обозначим $I_t = I \backslash i_t \cup i$.

Лемма 1.1 a) *Если $i < I$, $j \in J$, то $C_I^J x_i^j - q x_i^j C_I^J = 0$;*

b) *если $i \in I$, $j \in J$, то $C_I^J x_i^j - x_i^j C_I^J = 0$;*

c) *если $i_k < i < i_{k+1}$ для некоторого $k < p$, $j \in J$, то существуют комплексные числа $c_t \in \mathbf{C}^*$ такие, что $C_I^J x_i^j - q x_i^j C_I^J = \sum_{t<k+1} c_t x_{i_t}^j C_{I_t}^J$;*

d) *если $i > I$, $j \in J$, то $C_I^J x_i^j - q^{-1} x_i^j C_I^J = 0$;*

e) *если $i < I$, $j > J$, то $C_I^J x_i^j - x_i^j C_I^J = 0$;*

f) *если $i \in I$, $j > J$, то $C_I^J x_i^j - q^{-1} x_i^j C_I^J = 0$;*

g) *если $i_k < i < i_{k+1}$ для некоторого $k < p$, $j > J$, то существуют комплексные числа $g_t \in \mathbf{C}^*$ такие, что $C_I^J x_i^j - x_i^j C_I^J = \sum_{t<k+1} g_t x_{i_t}^j C_{I_t}^J$;*

h) *если $i > I$, $j > J$, то существуют комплексные числа $h_t \in \mathbf{C}^*$ такие, что $C_I^J x_i^j - x_i^j C_I^J = \sum_{t=1}^p h_t x_{i_t}^j C_{I_t}^J$.*

Лемма 1.2 a) *Если $i < I$, $j < J$, то существуют комплексные числа $a_t \in \mathbf{C}^*$ такие, что $C_I^J x_i^j - x_i^j C_I^J = \sum_{t=1}^p a_t x_{i_t}^j C_{I_t}^J$;*

b) *если $i \in I$, $j < J$, то $C_I^J x_i^j - q x_i^j C_I^J = 0$;*

c) *если $i_k < i < i_{k+1}$ для некоторого $k < p$, $j < J$, то существуют комплексные числа $c_t \in \mathbf{C}^*$ такие, что $C_I^J x_i^j - x_i^j C_I^J = \sum_{t>k} c_t x_{i_t}^j C_{I_t}^J$;*

d) *если $i > I$, $j < J$, то $C_I^J x_i^j - x_i^j C_I^J = 0$;*

e) *если $i < I$, $j \in J$, то $C_I^J x_i^j - q x_i^j C_I^J = 0$;*

f) *если $i \in I$, $j \in J$, то $C_I^J x_i^j - x_i^j C_I^J = 0$;*

g) *если $i_k < i < i_{k+1}$ для некоторого $k < p$, $j \in J$, то существуют комплексные числа $g_t \in \mathbf{C}^*$ такие, что $C_I^J x_i^j - q^{-1} x_i^j C_I^J = \sum_{t>k} g_t x_{i_t}^j C_{I_t}^J$;*

h) *если $i > I$, $j \in J$, то $C_I^J x_i^j - q^{-1} x_i^j C_I^J = 0$.*

Техника разложения q-минора позволяет доказать эти леммы как в работе [5].

Предложение 1.3 *Пусть $\mathcal{P} \in \operatorname{Spec} \mathcal{M}_q$. Если q-минор C_I^J не лежит в $\mathcal{P}$, то и любой его главный q-минор $\left[C_I^J\right]_s$ так же не лежит в $\mathcal{P}$.*

Доказательство. Явное выражение комплексных коэффициентов h_t из 1.1.h) таково: $h_t = (q^{-1} - q)q^{p-t}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left[C_I^J\right]_{p-1} x_{i_p}^{j_p} &= (q^{-1} - q)\sum_{t=1}^{p-1}(-q)^{p-1-t} x_{i_t}^{j_p} C_{[I]_{p-1}\setminus i_t \cup i_p}^{[J]_{p-1}} + x_{i_p}^{j_p}\left[C_I^J\right]_{p-1} \\ &= (1 - q^{-2})\sum_{t=1}^{p}(-q)^{p-t} x_{i_t}^{j_p} C_{[I]_{p-1}\setminus i_t \cup i_p}^{[J]_{p-1}} + q^{-2} x_{i_p}^{j_p}\left[C_I^J\right]_{p-1} \\ &= (1 - q^{-2}) C_I^J + q^{-2} x_{i_p}^{j_p}\left[C_I^J\right]_{p-1}. \end{aligned}$$

Допустим, что $\left[C_I^J\right]_{p-1} \in \mathcal{P}$. Тогда $\left[C_I^J\right]_{p-1} x_{i_p}^{j_p} - q^{-2} x_{i_p}^{j_p}\left[C_I^J\right]_{p-1} \in \mathcal{P}$, откуда $C_I^J \in \mathcal{P}$ — противоречие. Следовательно, $\left[C_I^J\right]_{p-1} \notin \mathcal{P}$. Индукция по p завершает доказательство.

Пусть ${}^{\pm}\mathcal{P}_T^J$ — левые идеалы алгебры $\mathcal{M}_q$, порожденные следующими q-минорами:

$${}^{+}\mathcal{P}_T^J = \langle C_I^J | I >_{lex} T \rangle, \qquad {}^{-}\mathcal{P}_T^J = \langle C_I^J | I <_{lex} T \rangle,$$

Предложение 1.4 *Идеалы ${}^{+}\mathcal{P}_T^{E_p}$ и ${}^{-}\mathcal{P}_T^{E_n \setminus E_{n-p}}$ являются двусторонними.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Достаточно показать, что $C_I^{E_p} x_i^j \in {}^{+}\mathcal{P}_T^{E_p}$ для любой образующей $C_I^{E_p}$ идеала ${}^{+}\mathcal{P}_T^{E_p}$ и любой образующей x_i^j алгебры $\mathcal{M}_q$. Все возможные ситуации исчерпываются пунктами a),…,h) леммы 1.1. Пусть, например, i, j удовлетворяют c). Тогда $C_I^{E_p} x_i^j - q x_i^j C_I^{E_p} = \sum_{t<k+1} c_t x_{i_t}^j C_{I_t}^{E_p}$. Т.к. $t < k+1$, то $I_t >_{lex} I >_{lex} T$. Поэтому каждое слагаемое в правой части лежит в ${}^{+}\mathcal{P}_T^{E_p}$, и, значит, $C_I^{E_p} x_i^j \in {}^{+}\mathcal{P}_T^{E_p}$. Остальные ситуации исследуются аналогично. Утверждение о ${}^{-}\mathcal{P}_T^{E_n \setminus E_{n-p}}$ доказывается при помощи леммы 1.2.

2. Теорема о разбиении спектра

Алгебра $\mathcal{A}$. Пусть $\mathbf{N}_k$ — множество отрезков натурального ряда длины k. Обозначим $S^0 = \{C_{E_m}^J | J \in \mathbf{N}_m\}$, $\mathcal{S}^0$ — мультипликативное подмножество в $\mathcal{M}_q$, порожденное S^0 и определим алебру $\mathcal{A}$ как локализацию $\mathcal{M}_q$ по $\mathcal{S}^0$.

Лемма 2.1 *Пусть $\mathcal{P} \in \operatorname{Spec} \mathcal{M}_q$. Тогда если $\mathcal{P} \bigcap S^0 = \emptyset$, то $\mathcal{P} \bigcap S = \emptyset$.*

Доказательство. Докажем противоположное утверждение: если существует q-минор $C_{E_m}^J \in S \bigcap \mathcal{P}$, то существует q-минор $C_{E_m}^{J'} \in S^0 \bigcap \mathcal{P}$.

a) Если $J \in \mathbf{N}_m$, то доказывать нечего. Если $J \notin \mathbf{N}_m$, то обозначим $T = \{j_m - m + 1, \ldots, j_m\} \in \mathbf{N}_m$. Пользуясь техникой разложения q-минора, можно показать, что

$$C_{Em}^J \left[C_{E_m}^T\right]_{m-1} - q^{-\langle J,T\rangle + 2}\left[C_{E_m}^T\right]_{m-1} C_{E_m}^J = q^{-\langle J,T\rangle}(1 - q^2) C_{E_m}\left[C_{E_m}^J\right]_{m-1},$$

где $\langle J,T\rangle = \sharp\{j \in J | j < T\}$. Отсюда $C_{E_m}^T\left[C_{E_m}^J\right]_{m-1} \in \mathcal{P}$. Если $C_{E_m}^T \in \mathcal{P}$, то лемма доказана.

b) Если $C_{E_m}^T \notin \mathcal{P}$, то $\left[C_{E_m}^J\right]_{m-1} \in \mathcal{P}$. Применим a) к $\left[C_{E_m}^J\right]_{m-1}$. Порядок минора при этом понижается на 1, следовательно не более, чем за m шагов получаем требуемое.

Предложение 2.2 $\mathrm{Spec}\,\mathbf{C}_q[\mathcal{V}] \cong \mathrm{Spec}\,\mathcal{A}$.

Доказательство. Заметим, что $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$ и $\mathcal{A}$ — это разные локализации одной и той же алгебры $\mathcal{M}_q$. Поэтому

$$\mathrm{Spec}\,\mathbf{C}_q[\mathcal{V}] = \{\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}\,\mathcal{M}_q | \mathcal{P} \bigcap S = \emptyset\}, \quad \mathrm{Spec}\,\mathcal{A} = \{\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}\,\mathcal{M}_q | \mathcal{P} \bigcap S^0 = \emptyset\}.$$

Остается применить лемму 2.1.

Разбиение Spec $\mathcal{A}$ на классы. Пусть $w = (w_+, w_-) \in S_m \times S_m$. Обозначим

$$P^+_{w_+} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{C^{E_i}_K | K >_{lex} w_+^{-1}(E_i)\}, \quad S^+_{w_+} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{C^{E_i}_{w_+^{-1}(E_i)}\},$$
$$P^-_{w_-} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{C^{E_n \backslash E_{n-i}}_K | K <_{lex} w_-^{-1}(E_m \backslash E_{m-i})\}, \quad S^-_{w_-} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \{C^{E_n \backslash E_{n-i}}_{w_-^{-1}(E_m \backslash E_{m-i})}\},$$
$$P_w = P^+_{w_+} \bigcup P^-_{w_-}, \quad S_w = S^+_{w_+} \bigcup S^-_{w_-},$$

и пусть $\mathcal{P}^\pm_{w_\pm}$, $\mathcal{P}_w$ — левые идеалы в $\mathcal{M}_q$, порожденные $P^\pm_{w_\pm}$, P_w соответственно, $\mathcal{S}^\pm_{w_\pm}$, $\mathcal{S}_w$ — мультипликативные подмножества в $\mathcal{M}_q$, порожденные $S^\pm_{w_\pm}$, S_w. Подчеркнем, что идеалы $\mathcal{P}^\pm_{w_\pm}$, $\mathcal{P}_w$ на самом деле являются двусторонними. Действительно, например, $\mathcal{P}^+_{w_+} = \sum_{i=1}^{m-1} {}^+\mathcal{P}^{E_i}_{w_+^{-1}(E_i)}$, при этом каждое слагаемое в правой части согласно 1.4 является двусторонним идеалом.

Предложение 2.3 *Пусть $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}\,\mathcal{A}$. Тогда существует единственная подстановка $w_+ \in S_m$ такая, что $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}^+_{w_+}$, $\mathcal{P} \cap S^+_{w_+} = \emptyset$.*

Доказательству предпошлем несколько лемм.

Лемма 2.4 *Пусть $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}\,\mathcal{A}$, $p \leq m-1$. Тогда существует единственный мультииндекс T длины p такой, что $C^{E_p}_T \notin \mathcal{P}$, $C^{E_p}_I \in \mathcal{P}\ \forall\ I >_{lex} T$.*

Доказательство. Допустим, что такого T не существует, и разложим q-минор $C^{E_m}_{E_m}$ по первым p столбцам. Тогда, по теореме Лапласа, $C^{E_m}_{E_m} \equiv 0 (\mathrm{mod}\,\mathcal{P})$. Но $C^{E_m}_{E_m}$ обратим в $\mathcal{A}$ — противоречие. Следовательно, T существует. Теперь упорядочим множество $\{J | C^{E_p}_J \notin \mathcal{P}\}$ лексикографически и обозначим T старший элемент. Лемма доказана.

Лемма 2.5 *Пусть $\mathcal{P}$, p, T как в лемме 2.4, $i > T$, $j \in E_p$. Тогда $x^j_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\,\mathcal{P})$.*

Доказательство. Пусть $T_k = T \backslash t_k \cup i$. Тогда $T_k >_{lex} T$, и $C^{E_p}_{T_k} \equiv 0 (\mathrm{mod}\,\mathcal{P})$. Разложим $C^{E_p}_{T_k}$ по j-му столбцу:

$$C^{E_p}_{T_k} = \sum_{l=1}^{k-1} (-q)^{j-l} x^j_{t_l} C^{E_p \backslash j}_{T_k \backslash t_l} + \sum_{l=k}^{p-1} (-q)^{j-l} x^j_{t_{l+1}} C^{E_p \backslash j}_{T_k \backslash t_{l+1}} + (-q)^{j-p} x^j_i C^{E_p \backslash j}_{T_k \backslash i}.$$

Если $x^j_i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\,\mathcal{P})$, то отсюда

$$\begin{aligned} C^{E_p \backslash j}_{T_k \backslash i} &\equiv -(-q)^{p-j} (x^j_i)^{-1} \left\{ \sum_{l=1}^{k-1} (-q)^{j-l} x^j_{t_l} C^{E_p \backslash j}_{T_k \backslash t_l} + \sum_{l=k}^{p-1} (-q)^{j-l} x^j_{t_{l+1}} C^{E_p \backslash j}_{T_k \backslash t_{l+1}} \right\} \\ &\equiv -(-q)^{p-j} (x^j_i)^{-1} \sum_{l \neq k} s(k,l) (-q)^{j-l} x^j_{t_l} C^{E_p \backslash j}_{T_k \backslash t_l} (\mathrm{mod}\,\mathcal{P}); \end{aligned}$$

где $s(k,l) = \begin{cases} 1 & \text{для } k < l, \\ -q^{-1} & \text{для } k > l. \end{cases}$ Разложим $C_T^{E_p}$ по j-му столбцу и воспользуемся тем, что $T\backslash t_k = T_k\backslash i$:

$$\begin{aligned}
C_T^{E_p} &= \textstyle\sum_{k=1}^p (-q)^{j-k} x_{t_k}^j C_{T\backslash t_k}^{E_p\backslash j} = \sum_{k=1}^p (-q)^{j-k} x_{t_k}^j C_{T_k\backslash i}^{E_p\backslash j} \\
&\equiv \textstyle\sum_{k=1}^p (-q)^{j-k} x_{t_k}^j \left\{ -(-q)^{p-j} (x_i^j)^{-1} \sum\limits_{l\neq k} s(k,l)(-q)^{j-l} x_{t_l}^j C_{T_k\backslash t_l}^{E_p\backslash j} \right\} \\
&\equiv (-q)^{p-j+1} (x_i^j)^{-1} \sum_{k<l} \Big\{ (-q)^{j-k} x_{t_k}^j s(k,l)(-q)^{j-l} x_{t_l}^j C_{T_k\backslash t_l}^{E_p\backslash j} \\
&\qquad\qquad + (-q)^{j-l} x_{t_l}^j s(l,k)(-q)^{j-k} x_{t_k}^j C_{T_l\backslash t_k}^{E_p\backslash j} \Big\} \\
&\equiv (-q)^{p-j+1} (x_i^j)^{-1} \sum_{k<l} \Big\{ (-q)^{2j-k-l} x_{t_k}^j x_{t_l}^j C_{T_k\backslash t_l}^{E_p\backslash j} - q^{-1}(-q)^{2j-k-l} x_{t_l}^j x_{t_k}^j C_{T_l\backslash t_k}^{E_p\backslash j} \Big\} \\
&\equiv (-q)^{p-j+1} (x_i^j)^{-1} \sum_{k<l} (-q)^{2j-k-l} x_{t_k}^j x_{t_l}^j \big(C_{T_k\backslash t_l}^{E_p\backslash j} - C_{T_l\backslash t_k}^{E_p\backslash j}\big) (\operatorname{mod} \mathcal{P}).
\end{aligned}$$

Так же, как и выше, $T_k\backslash t_l = T_l\backslash t_k$. Поэтому $C_T^{E_p} \equiv 0(\operatorname{mod}\mathcal{P})$ — противоречие. Следовательно, $x_i^j \equiv 0(\operatorname{mod}\mathcal{P})$.

Лемма 2.6 *Пусть $\mathcal{P}$, p, T как в лемме* 2.4. *Тогда для любых i, j*

$$C_T^{E_p} x_i^j \equiv q^{\delta_{E_p,j} - \delta_{T,i}} x_i^j C_T^{E_p} (\operatorname{mod}\mathcal{P}), \quad \text{где } \delta_{J,k} = \begin{cases} 0 & \text{для } k \notin J, \\ 1 & \text{для } k \in J. \end{cases}$$

Доказательство. Если i, j удовлетворяют пунктам a), b), c), e), f), g) или h) леммы 1.1, то мы можем получить требуемое так же, как при доказательстве предложения 1.4. Если же $i > T$, $j \in E_p$, то воспользуемся тем, что тогда, по лемме 2.5, $x_i^j \equiv 0(\operatorname{mod}\mathcal{P})$, и припишем q нужный нам показатель.

Лемма 2.7 *Пусть $\mathcal{P}$, p, T как в лемме* 2.4. *Тогда для любых K, L*

$$C_T^{E_p} C_K^L \equiv q^{\sharp\{E_p\cap L\} - \sharp\{T\cap K\}} C_K^L C_T^{E_p} (\operatorname{mod}\mathcal{P}).$$

Доказательство. Пусть порядок q-минора C_K^L равен r. Тогда, согласно лемме 2.6,

$$\begin{aligned}
C_T^{E_p} C_K^L &\equiv C_T^{E_p} \textstyle\sum_{\sigma\in S_r} (-q)^{l(\sigma)} x_{k_1}^{l_{\sigma(1)}} \dots x_{k_r}^{l_{\sigma(r)}} \\
&\equiv \textstyle\sum_{\sigma\in S_r} q^{A_\sigma} (-q)^{l(\sigma)} x_{k_1}^{l_{\sigma(1)}} \dots x_{k_r}^{l_{\sigma(r)}} C_T^{E_p} (\operatorname{mod}\mathcal{P}).
\end{aligned}$$

Покажем, что A_σ не зависит от σ. Действительно, в силу все той же леммы 2.6, $C_T^{E_p} x_{k_j}^{l_{\sigma(j)}} \equiv q^{\delta_{E_p,l_{\sigma(j)}} - \delta_{T,k_j}} x_{k_j}^{l_{\sigma(j)}} C_T^{E_p} (\operatorname{mod}\mathcal{P})$. Поэтому

$$\begin{aligned}
A_\sigma &= \textstyle\sum_{j=1}^r (\delta_{E_p,l_{\sigma(j)}} - \delta_{T,k_j}) = \sum_{j=1}^r \delta_{E_p,l_{\sigma(j)}} - \sum_{j=1}^r \delta_{T,k_j} \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^r \delta_{E_p,l_j} - \sum_{p=1}^r \delta_{T,k_j} = \sharp\{E_p\cap L\} - \sharp\{T\cap K\}.
\end{aligned}$$

Лемма 2.8 *Пользуясь леммой* 2.4, *построим по данному идеалу $\mathcal{P}$ набор мультииндексов T_1, T_2,$\dots T_{m-1}$, T_m. Мы утверждаем, что $T_1 \subset T_2 \subset \dots T_{m-1} \subset T_m$.*

Доказательство. Пусть $p < s$. Согласно лемме 2.7,

$$C_{T_p}^{E_p} C_{T_s}^{E_s} \equiv q^A C_{T_s}^{E_s} C_{T_p}^{E_p} (\operatorname{mod}\mathcal{P}), \quad C_{T_s}^{E_s} C_{T_p}^{E_p} \equiv q^B C_{T_p}^{E_p} C_{T_s}^{E_s} (\operatorname{mod}\mathcal{P}),$$

где $A = \sharp\{E_p\cap E_s\} - \sharp\{T_p\cap T_s\}$, $B = \sharp\{E_s\cap E_p\} - \sharp\{T_s\cap T_p\}$. Понятно, что $A = -B$. Значит, $\sharp\{T_s\cap T_p\} = \sharp\{E_s\cap E_p\} = p$. Следовательно, $\sharp\{T_s\cap T_p\} = \sharp T_p$, и $T_p \subset T_s$.

Доказательство предложения 2.3 Согласно лемме 2.4, для любого первичного идеала $\mathcal{P}$ из $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$ существует единственный набор включенных друг в друга мультииндексов $T_1 \subset T_2 \subset \dots T_{m-1} \subset T_m$. Обозначим

$$w_+^{-1}(1) = T_1, w_+^{-1}(2) = T_2 \backslash T_1, \dots, w_+^{-1}(m) = T_n \backslash T_{m-1}.$$

Предложение доказано. Аналогично доказывается

Предложение 2.9 *Пусть $\mathcal{P} \in \operatorname{Spec}\mathcal{A}$. Тогда существует единственная подстановка $w_- \in S_m$ такая, что $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_{w_-}^-$, $\mathcal{P} \cap S_{w_-}^- = \emptyset$.*

Предложения 2.3, 2.9 полностью доказывают следующую теорему.

Теорема 2.10 *Обозначим* $\operatorname{Spec}_w\mathcal{A} = \{\mathcal{P} \in \operatorname{Spec}\mathcal{A} | \mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_w, \mathcal{P} \bigcap S_w = \emptyset\}$. *Тогда*

$$\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \bigsqcup_{w \in S_m \times S_m} \operatorname{Spec}_w \mathcal{A},$$

где $\bigsqcup$ означает объединение попарно непересекающихся множеств.

Следствие 2.11 *Обозначим* $\operatorname{Prim}_w\mathcal{A} = \{\mathcal{P} \in \operatorname{Prim}\mathcal{A} | \mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_w, \mathcal{P} \bigcap S_w = \emptyset\}$. *Тогда*

$$\operatorname{Prim}\mathcal{A} = \bigsqcup_{w \in S_m \times S_m} \operatorname{Prim}_w \mathcal{A},$$

где $\bigsqcup$ означает объединение попарно непересекающихся множеств.

3. Теорема о биекции

Алгебры $\mathcal{A}_w$ и $\widetilde{\mathcal{A}}_w$. Изучать идеалы из класса $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$ — это то же самое, что изучать идеалы локализованной фактор-алгебры $\mathcal{A}_w = (\mathcal{M}_q/\mathcal{P}_w)_{\mathcal{S}_w}$, где $\mathcal{S}_w$ — мультипликативное подмножество в $\mathcal{M}_q$, порожденное $S_w \cup S^0$. Обозначим $\widetilde{S}_{w_\pm}^{\pm}$, $\widetilde{S}^0$, $\widetilde{S}_w$ множества всех главных q-миноров всех q-миноров из $S_{w_\pm}^{\pm}$, S^0, S_w соответственно, $\widetilde{\mathcal{S}}_w$ — мультипликативное подмножество в $\mathcal{M}_q$, порожденное $\widetilde{S}_w$, и пусть $\widetilde{\mathcal{A}}_w = (\mathcal{M}_q/\mathcal{P}_w)_{\widetilde{\mathcal{S}}_w}$. Согласно предложению 1.3, $\operatorname{Spec}\mathcal{A}_w = \operatorname{Spec}\widetilde{\mathcal{A}}_w$.

Предложение 3.1 *Алгебра $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ является скрученной лорановской алгеброй, порожденной q-минорами из $\widetilde{S}_w$.*

Доказательству предпошлем несколько лемм.

Лемма 3.2 *Пусть $l(y)$ означает число инверсий в подстановке y.*

a) *Для любой подстановки $w_+ \in S_m$ существуют элементарная транспозиция $u_{j_0} = (j_0, j_0+1) \in S_m$ и подстановка $v_+ \in S_m$ такие, что*

$$w_+ = v_+ u_{j_0}, \quad l(w_+) = l(v_+) + 1, \quad v_+^{-1}(E_{j_0}) < v_+^{-1}(j_0+1).$$

b) *Для любой подстановки $w_- \in S_m$ существуют элементарная транспозиция $u_{i_0} = (i_0, i_0+1) \in S_m$ и подстановка $v_- \in S_m$ такие, что*

$$w_- = v_- u_{i_0}, \quad l(w_-) = l(v_-) + 1, \quad v_-^{-1}(E_m \backslash E_{m-i_0}) > v_-^{-1}(i_0).$$

Приведенная лемма есть частный случай известного утверждения о разложении элемента группы Вейля.

Лемма 3.3 *Пусть* w_+, v_+, j_0 *из леммы* 3.2. *Тогда* $\widetilde{S}^+_{w_+} = \widetilde{S}^+_{v_+} \cup C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}$.

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\text{a)}\quad [w_+(E_j)]_i = [v_+(E_j)]_i \ \ \forall j \neq j_0, i \leq j; \qquad \text{b)}\quad [w_+(E_{j_0})]_i = [v_+(E_{j_0-1})]_i \ \ \forall i < j_0;$$
$$\text{c)}\quad [w_+(E_{j_0+1})]_i = [v_+(E_{j_0+1})]_i \ \ \forall i \leq j_0.$$

Заметим, что $w_+^{-1}(j) = v_+^{-1}(j)$ $\forall j \neq j_0, j_0+1$. Кроме того $w_+^{-1}(j_0) = v_+^{-1}(j_0+1)$; $w_+^{-1}(j_0+1) = v_+^{-1}(j_0)$. Поэтому $w_+^{-1}(E_j) = v_+^{-1}(E_j)$ $\forall j \neq j_0$. Отсюда следует a). Докажем b):

$$w_+^{-1}(E_{j_0}) = w_+^{-1}(E_{j_0-1}) \cup w_+^{-1}(j_0) = v_+^{-1}(E_{j_0-1}) \cup v_+^{-1}(E_{j_0+1}).$$

При этом $v_+^{-1}(j_0+1) > v_+^{-1}(E_{j_0-1})$. Следовательно, если $i < j_0$, то

$$\left[w_+^{-1}(E_{j_0})\right]_i = \left[v_+^{-1}(E_{j_0-1}) \cup v_+^{-1}(E_{j_0+1})\right]_i = \left[v_+^{-1}(E_{j_0-1})\right]_i.$$

Докажем c): $w_+^{-1}(E_{j_0+1}) = w_+^{-1}(E_{j_0-1}) \cup w_+^{-1}(j_0) \cup w_+^{-1}(j_0+1)$. При этом $w_+^{-1}(j_0) > w_+^{-1}(j_0+1)$ и $w_+^{-1}(j_0) > w_+^{-1}(j_0-1)$. Поэтому

$$\left[w_+^{-1}(E_{j_0+1})\right]_{j_0} = w_+^{-1}(E_{j_0-1}) \cup w_+^{-1}(j_0+1) = v_+^{-1}(E_{j_0-1}) \cup v_+^{-1}(j_0) = v_+^{-1}(E_{j_0}).$$

Если $i \leq j_0$, то $\left[w_+^{-1}(E_{j_0+1})\right]_i = \left[v_+^{-1}(E_{j_0})\right]_i$, и c) доказано. Теперь напомним, что

$$\left[C^{E_j}_{w_+^{-1}(E_j)}\right]_i = C^{E_i}_{\left[w_+^{-1}(E_j)\right]_i}, \qquad \left[C^{E_j}_{v_+^{-1}(E_j)}\right]_i = C^{E_i}_{\left[v_+^{-1}(E_j)\right]_i}.$$

Поэтому a), b) означают, что $\widetilde{S}^+_{v_+} \subset \widetilde{S}^+_{w_+} \backslash C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}$, и, с другой стороны, a), c) — что $\widetilde{S}^+_{v_+} \supset \widetilde{S}^+_{w_+} \backslash C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}$. Отсюда следует равенство.

Лемма 3.4 *Пусть* w_+, v_+, j_0 *из леммы* 3.2. *Тогда* $\mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})} \rangle \subset \mathcal{P}^+_{v_+}$.

Доказательство. Заметим, что $w_+^{-1}(E_{j_0}) >_{lex} v_+^{-1}(E_{j_0})$. Действительно,

$$\begin{aligned} w_+^{-1}(E_{j_0}) &= w_+^{-1}(E_{j_0-1}) \cup w_+^{-1}(j_0) >_{lex} w_+^{-1}(E_{j_0-1}) \cup w_+^{-1}(j_0+1) \\ &= v_+^{-1}(E_{j_0-1}) \cup v_+^{-1}(j_0) = v_+^{-1}(E_{j_0}). \end{aligned}$$

Кроме того, $w_+^{-1}(E_j) = v_+^{-1}(E_j)$ $\forall j \neq j_0$ Поэтому (см. п.1, определение идеалов ${}^+\mathcal{P}^J_T$) ${}^+\mathcal{P}^{E_j}_{w_+^{-1}(E_j)} = {}^+\mathcal{P}^{E_j}_{v_+^{-1}(E_j)}$ $\forall j \neq j_0$, $\langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})} \rangle \subset {}^+\mathcal{P}^{E_{j_0}}_{v_+^{-1}(E_{j_0})}$ и ${}^+\mathcal{P}^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})} \subset {}^+\mathcal{P}^{E_{j_0}}_{v_+^{-1}(E_{j_0})}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})} \rangle = \sum_{j=1}^{m-1} {}^+\mathcal{P}^{E_j}_{w_+^{-1}(E_j)} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})} \rangle \\ &= \sum_{j \neq j_0}^{m-1} {}^+\mathcal{P}^{E_j}_{w_+^{-1}(E_j)} + {}^+\mathcal{P}^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})} \rangle \subset \sum_{j \neq j_0}^{m-1} {}^+\mathcal{P}^{E_j}_{w_+^{-1}(E_j)} + {}^+\mathcal{P}^{E_{j_0}}_{v_+^{-1}(E_{j_0})} \\ &= \sum_{j \neq j_0}^{m-1} {}^+\mathcal{P}^{E_j}_{v_+^{-1}(E_j)} + {}^+\mathcal{P}^{E_{j_0}}_{v_+^{-1}(E_{j_0})} = \mathcal{P}^+_{v_+}. \end{aligned}$$

Лемма 3.5 *Пусть* w_+, v_+, j_0 *из леммы* 3.2. *Тогда*

$$x^j_{v_+^{-1}(j_0+1)} \in \mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\rangle \quad \forall j \le j_0, \qquad x^{j_0+1}_{v_+^{-1}(j_0+1)} \notin \mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\rangle.$$

Доказательство. Заметим, что $v_+^{-1}(j_0+1) > v_+^{-1}(E_{j_0}) \ni v_+^{-1}(1) = w_+^{-1}(1)$. Поэтому $x^1_{v_+^{-1}(j_0+1)} \in {}^+\mathcal{P}^{E_1}_{w_+^{-1}(E_1)} \subset \mathcal{P}^+_{w_+} \subset \mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\rangle$. Разложим q-минор $C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}$ по строке с номером $w_+^{-1}(j_0)$ и применим индукцию:

$$C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})} = \sum_{j=1}^{j_0} c_j x^j_{w_+^{-1}(j_0)} C^{E_{j_0}\setminus j}_{w_+^{-1}(E_{j_0-1})}, \quad c_j \in \mathbf{C}^*.$$

Первые j_0-1 слагаемых лежат в $\mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\rangle$, следовательно, там же лежит и $x^{j_0}_{w_+^{-1}(j_0)} C^{E_{j_0-1}}_{w_+^{-1}(E_{j_0-1})}$. При этом, по определению, $C^{E_{j_0-1}}_{w_+^{-1}(E_{j_0-1})} \notin \mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\rangle$. Отсюда, заменяя $w_+^{-1}(j_0)$ на $v_+^{-1}(j_0+1)$, получаем требуемое.

Докажем второе утверждение. Так как $\mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\rangle \subset \mathcal{P}^+_{v_+}$, то, по доказанному выше, $x^j_{v_+^{-1}(j_0+1)} \in \mathcal{P}^+_{v_+}$ $\forall j \le j_0$. Разложим q-минор $C^{E_{j_0+1}}_{v_+^{-1}(E_{j_0+1})} \notin \mathcal{P}^+_{v_+}$ по строке с номером $v_+^{-1}(j_0+1)$.

$$C^{E_{j_0+1}}_{v_+^{-1}(E_{j_0+1})} = \sum_{j=1}^{j_0+1} c_j x^j_{v_+^{-1}(j_0+1)} C^{E_{j_0+1}\setminus j}_{v_+^{-1}(E_{j_0})}, \quad c_j \in \mathbf{C}^*.$$

Первые j_0 слагаемых лежат в $\mathcal{P}^+_{v_+}$, поэтому $x^j_{v_+^{-1}(j_0+1)} C^{E_{j_0+1}\setminus j}_{v_+^{-1}(E_{j_0})} \notin \mathcal{P}^+_{v_+}$. Это означает, что $x^{j_0+1}_{v_+^{-1}(j_0+1)} \notin \mathcal{P}^+_{v_+}$. Теперь из включения $\mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\rangle \subset \mathcal{P}^+_{v_+}$ следует требуемое.

Лемма 3.6 *Пусть* w_+, v_+, j_0 *из леммы* 3.2. *Тогда* $\mathcal{P}^+_{w_+} = \mathcal{P}^+_{v_+} \setminus \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\rangle$.

Доказательство. Докажем включение $\mathcal{P}^+_{v_+} \subset \mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\rangle$. Так как

$${}^+\mathcal{P}^{E_j}_{v_+^{-1}(E_j)} = {}^+\mathcal{P}^{E_j}_{w_+^{-1}(E_j)} \subset \mathcal{P}^+_{w_+} \subset \mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\rangle \quad \forall j \ne j_0,$$

то достаточно показать, что $C^{E_{j_0}}_I \in \mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\rangle \quad \forall C^{E_{j_0}}_I \in {}^+\mathcal{P}^{E_{j_0}}_{v_+^{-1}(E_{j_0})}$. Если $v_+^{-1}(j_0+1) \in I$, то разложим q- минор $C^{E_{j_0}}_I$ по строке с номером $v_+^{-1}(j_0+1)$ и по лемме 3.1 получим требуемое. Если $v_+^{-1}(j_0+1) \notin I$, то пусть $I' = I \cup v_+^{-1}(j_0+1)$. Заметим, что

$$I' = I \cup v_+^{-1}(j_0+1) >_{lex} v_+^{-1}(E_{j_0}) \cup v_+^{-1}(j_0+1) = v_+^{-1}(E_{j_0+1}) = w_+^{-1}(E_{j_0+1}).$$

Поэтому $C^{E_{j_0+1}}_{I'} \in \mathcal{P}^+_{w_+} \subset \mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\rangle$. Разложим $C^{E_{j_0+1}}_{I'}$ по $v_+^{-1}(j_0+1)$-й строке:

$$C^{E_{j_0+1}}_{I'} = \sum_{j=1}^{j_0+1} c_j x^j_{v_+^{-1}(j_0+1)} C^{E_{j_0+1}\setminus j}_{I'\setminus v_+^{-1}(j_0+1)}, \quad c_j \in \mathbf{C}^*.$$

Первые j_0 слагаемых лежат в $\mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\rangle$ согласно лемме 3.5. Значит, там же лежит $x^{j_0+1}_{v_+^{-1}(j_0+1)} C'^{E_{j_0+1}\setminus j_0+1}_I$. Так как по 3.5 $x^{j_0+1}_{v_+^{-1}(j_0+1)} \notin \mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\rangle$, то $C'^{E_{j_0+1}\setminus j_0+1}_I \in \mathcal{P}^+_{w_+} + \langle C^{E_{j_0}}_{w_+^{-1}(E_{j_0})}\rangle$. Включение доказано. Вместе с леммой 3.4 это означает точное равенство. Аналогично доказываются

Лемма 3.7 *Пусть w_-, v_-, i_0 из леммы* 3.2. *Тогда* $\widetilde{S}^-_{w_-} = \widetilde{S}^-_{v_-} \cup C^{E_n\setminus E_{n-i_0}}_{w_-^{-1}(E_n\setminus E_{n-i_0})}$.

Лемма 3.8 *Пусть w_-, v_-, i_0 из леммы* 3.2. *Тогда* $\mathcal{P}^-_{w_-} = \mathcal{P}^-_{v_-}\setminus\langle C^{E_n\setminus E_{n-i_0}}_{w_-^{-1}(E_n\setminus E_{n-i_0})}\rangle$.

Доказательство предложения 3.1. Пусть $e = (e,e) \in S_m \times S_m$ — пара единичных подстановок. Так же, как в доказательстве [4, теорема 1.24] можно убедиться, что $\widetilde{\mathcal{A}}_e$ является скрученной лорановской алгеброй, порожденной q-минорами из $\widetilde{S}_e$. Последовательно $l(w_+)$ раз (соответственно, $l(w_-)$ раз) применяя лемму 3.2, мы получим единичную подстановку из w_+ (соответственно, из w_-). Возникает цепочка алгебр $\widetilde{\mathcal{A}}_e, \ldots, \widetilde{\mathcal{A}}_w$, в которой каждая последующая алгебра, согласно леммам 3.3, 3,6 и 3.7, 3,8 получается из предыдущей присоединением одной переменной. Лемма 2.7 означает, что присоединяемая на каждом шаге переменная является нормальным элементом — предложение доказано.

Теорема о биекции. Введем скобку Пуассона в $\mathbf{C}[\mathcal{V}]$ (как это делается, например, в [7, § 6]) по формуле: $\forall f,g \in \mathbf{C}[\mathcal{V}]:\quad \{f,g\} = \lim_{q\to 1}\frac{f*g-g*f}{q-1}$, где $*$ означает умножение в $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$. Алгебра $\mathbf{C}[\mathcal{V}]$ становится пуассоновой алгеброй, ассоциированной с $\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$.

Обозначим R_w, Q^0, Q_w, $\widetilde{Q}_w$ множества миноров в $\mathcal{M}$, аналогичные множествам P_w, S^0, S_w, $\widetilde{S}_w$ q-миноров в $\mathcal{M}_q$. Обозначим $\mathcal{U}$ открытое всюду плотное множество в линейном пространстве комплексных $m\times n$-матриц, определенное условиями: $D^J_I \neq 0$ $\forall D^J_I \in Q^0$; $\mathcal{U}_w$ — алгебраическое многообразие в $\mathcal{U}$, определенное условиями: $D^J_I = 0$ $\forall D^J_I \in R_w$, $D^J_I \neq 0$ $\forall D^J_I \in Q_w$; $\widetilde{\mathcal{U}}_w$ — открытое всюду плотное множество в $\mathcal{U}_w$, определенное условиями $D^J_I \neq 0$ $\forall D^J_I \in \widetilde{Q}_w$. Предельный переход $q\to 1$ показывает, что тогда

$$\mathrm{Symp}\,\mathcal{V} = \mathrm{Symp}\,\mathcal{U},\quad \mathrm{Symp}\,\mathcal{U} = \bigsqcup_{w\in S_m\times S_m}\mathrm{Symp}\,\mathcal{U}_w,\quad \mathrm{Symp}\,\mathcal{U}_w = \mathrm{Symp}\,\widetilde{\mathcal{U}}_w.$$

Таким образом, множество симплектических листов в $\mathcal{V}$ разбивается на классы, классы параметризуются парами подстановок $w \in S_m\times S_m$ и $\mathrm{Symp}_w\mathcal{V} = \mathrm{Symp}\,\widetilde{\mathcal{U}}_w$.

Теорема 3.9 *Имеется биекция β между* $\mathrm{Prim}\,\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$ *и* $\mathrm{Symp}\,\mathcal{V}$ *такая, что*

1. $\beta(\mathrm{Prim}_w\,\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]) = \mathrm{Symp}_w\mathcal{V}$,
2. $\dim\beta(\mathcal{P}) = \mathrm{GKdim}\,\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]/\mathcal{P}\quad \forall\mathcal{P}\in\mathrm{Prim}\,\mathbf{C}_q[\mathcal{V}]$,

где GKdim *означает размерность Гельфанда-Кириллова.*

Доказательство. Согласно предложению 3.1, алгебра $\widetilde{\mathcal{A}}_w$ является скрученной. Следовательно [6] разд. 2.3, все ее примитивные идеалы порождаются максимальными идеалами ее центра. С другой стороны, симплектические листы в $\widetilde{\mathcal{U}}_w$ определяются набором функций Казимира (см. [7, § 2]), играющих в Пуассоновой алгебре $\mathbf{C}[\widetilde{\mathcal{U}}_w]$ роль центральных элементов. Если пара образующих C^J_I, C^L_K алгебры $\mathcal{A}_w$

связана соотношением $C_I^J C_K^L = q^{\varphi_{IK}^{JL}} C_K^L C_I^J$, то предельный переход $q \to 1$ показывает, что для соответствующих образующих D_I^J, D_K^L алгебры $\mathbf{C}[\mathcal{U}_w]$ справедливо: $\{D_I^J, D_K^L\} = \varphi_{IK}^{JL} D_I^J D_K^L$. Поэтому как образующие $\mathrm{Center}\,\widetilde{\mathcal{A}}_w$, так и образующие $\mathrm{Cazimir}\,\mathbf{C}[\widetilde{\mathcal{U}}_w]$ определяются целыми решениями одной и той же системы: $\Phi\overline{t} = 0$. Отсюда следует биекция. Утверждение о размерности вытекает из того, что

$$\mathrm{GKdim}\,\mathrm{Center}\,\mathcal{A}_w = \dim\ker\Phi = \mathrm{GKdim}\,\mathrm{Cazimir}\,\mathbf{C}_q[\mathcal{U}_w].$$

Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю Александру Николаевичу Панову за внимание и поддержку, а также господам Левассье и Жозефу за то, что они прислали ему оттиски своих работ.

Литература

[1] T. J. Hodges and T. Levassuer. Primitive ideals of $\mathbf{C}_q[SL(3)]$, Comm. Math. Phys., 156(1993), P.581-605.

[2] T. J. Hodges and T. Levassuer. Primitive ideals of $\mathbf{C}_q[SL(n)]$, J. Algebra, 168(1994), P.455-468.

[3] A. Joseph. On the Prime and Primitive Spectra of the Algebra of Functions on a Quantum Group, J. Algebra, 169(1994), P.441-511.

[4] В. Г. Мосин, А. Н. Панов. Тела частных и центральные элементы многопараметрических квантований, Мат. сборник, 1995, Т.187, N6, С.53-72.

[5] B. Parshall and Jian-pan Wang. Quantum linear groups, Mem. Amer. Math. Soc.

[6] K. P. Goodearl, E. S. Letzter. Prime Idiels in Skew and q-Skew Polinomial Rings, Mem. Amer. Soc., N521, 1994.

[7] I. Vaisman. "Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds", Progr. in Math., V118, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1994.

PRIMITIVE IDEALS AND SYMPLECTIC LEAVES OF QUANTUM MATRIXES.

V. G. Mosin.[2]

It is proved that there exist the bijection between primitive ideals of algebra of regular functions on quantum $m \times n$-matrixes and symplectic leaves of associated Poisson structure.

[2]Mosin Vladimir G., Dept. of Math. Samara State University