ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ СЛОЕ ФЛОТИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Б.В. Логинов, С.А. Карпова[1]

Исследуется течение несжимаемой жидкости в пространственном слое со свободной верхней границей. Изучен случай четырехмерного вырождения линеаризованного оператора. Используются методы группового анализа в теории бифуркаций (RZ Mat 1985 11Б1249K, 1989 8Б554, 1978 11Б883K). Получены асимптотики бифуркационного семейства решений.

1. Введение

Рассматриваются потенциальные течения несжимаемой флотирующей жидкости в пространственном слое со свободной верхней границей. Флотирующей называется жидкость, свободная поверхность которой является весомой с плотностью распределения вещества $\rho_0 = const$.

Постановка задачи о капиллярно-гравитационных волнах в плоском случае восходит к известным работам А.И.Некрасова [1, 2], T.Levi-Civita [3] и D.Struik [4]. Пространственная задача о капиллярно-гравитационных волнах рассматривалась в работах [5]–[10]. В [6]–[9] для построения и исследования уравнения разветвления (УР), асимптотики малых разветвляющихся решений использовалось групповое расслоение [8, 11, 12], а в [10] — методы группового анализа дифференциальных уравнений [13, 14] в применении к теории ветвления решений нелинейных уравнений [15] в условиях групповой инвариантности [16, 17, 18]. Отметим, что методы группового анализа для построения и исследования УР на основе теоремы о наследовании групповой симметрии [15] были развиты в [16, 17, 18]. Они нашли применение в ряде прикладных задач теории поверхностных волн и физики фазовых переходов (см. [16] и обзор [19]).

В [20, 21, 22] методами интегральных уравнений исследована плоская задача для флотирующей жидкости. Ниже рассмотрена соответствующая пространственная задача. Исследования проведены непосредственно по системе дифференциальных уравнений, описывающих течение флотирующей жидкости. Выписано дисперсионное соотношение, позволяющее определить размерность вырождения линеаризованного оператора (размерность УР). Полностью исследован случай четырехмерного

[1]Логинов Борис Владимирович, кафедра высшей математики Ульяновского технического университета, Карпова Светлана Александровна, Ульяновский педагогический университет.

подпространства нулей линеаризованного оператора. Случаи более высоких вырождений будут предметом дальнейших исследований. Полученные результаты анонсированы в [23, 25], поддержаны грантом N15–96 НГУ и грантом 96–01–00512 РФФИ.

2. Постановка задачи. Подпространство нулей линеаризованного оператора

Определяются периодические с периодами $\frac{2\pi}{a} = a_1$ и $\frac{2\pi}{b} = b_1$ по x и y потенциальные течения флотирующей тяжелой капиллярной жидкости в пространственном слое со свободной верхней границей $f(x,y)$ близкой к горизонтальной плоскости $z=0$, ответвляющиеся от основного движения с постоянной скоростью V в направлении оси $0x$. Потенциал скорости имеет вид $\phi(x,y,z) = Vx + \Phi(x,y,z)$, h - толщина слоя, σ - коэффициент поверхностного натяжения, ρ - плотность несущей жидкости, ρ_0 - поверхностная плотность флотируемого вещества, g - ускорение свободного падения. Описывающая ответвляющиеся течения система дифференциальных уравнений в безразмерных переменных ($k = \frac{\rho_0}{\rho h}$, $F = \frac{\sqrt{hg}}{V}$ - величина обратная числу Фруда, $\gamma = \frac{\sigma}{\rho g h^2}$ - число Бонда) записывается в виде

$$\Delta\Phi = 0, \qquad -1 < z < f(x,y); \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,y,-1) = 0 \quad \text{(условие непротекания на дне } z=-1\text{);} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} = (\nabla f, \nabla_{xy}\Phi) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{при z=f(x,y);} \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + F^2 f + \frac{k}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}[F^2 + (-\nabla f\nabla_{xy} + \frac{\partial}{\partial z})(\frac{\partial\Phi}{\partial x} +$$

$$+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2)] - \gamma F^2[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f_x}{\sqrt{1+{f_x}^2+{f_y}^2}}) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}] = \mathrm{const} \tag{4}$$

при $z = f(x,y)$.

Второе условие на свободной границе $z = f(x,y)$ представляет собой интеграл Бернулли для флотирующей жидкости [22]. Система инвариантна относительно двумерной группы сдвигов $L_\beta g(x,y) = g(x+\beta_1, y+\beta_2)$ и отражений

$$S_1 : x \to x, \Phi(x,y,z) \to -\Phi(-x,y,z), f(x,y) \to f(-x,y);$$

$$S_2 : y \to -y, \Phi(x,y,z) \to -\Phi(-x,y,z), f(x,y) \to f(-x,y).$$

Для "распрямления" свободной верхней границы выполним в (1)-(4) замену переменных $\zeta = \frac{z-f(x,y)}{1+f(x,y)}$, $\Phi(x,y,f(x,y)+\zeta(1+f(x,y))) = u(x,y,\zeta)$. Полагая $F^2 = F^2_{mn} + \varepsilon$, где F_{mn} критическое значение числа Фруда, получаем эквивалентную (1)-(4) систему

$$\Delta u = w^{(0)}(u,f) = 2(\zeta+1)(u_{x\zeta}f_x + u_{y\zeta}f_y)(1-f+\cdots)-$$

$$-(\zeta+1)^2 u_{\zeta\zeta}(f_x^2+f_y^2)(1-2f+\cdots) + (\zeta+1)u_\zeta(f_{xx}+$$

$$+f_{yy})(1-f+\cdots) - 2(\zeta+1)u_\zeta(f_x^2+f_y^2)(1-2f+\cdots)+$$

$$+u_{\zeta\zeta}(2f-3f^2+\cdots), \qquad -1<\zeta<0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta}(x,y,-1)=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta}-\frac{\partial f}{\partial x}=w^{(1)}(u,f)=u_\zeta(f-f^2+\cdots)+$$
$$u_x f_x-u_\zeta f_x^2(1-f+\cdots)+u_y f_y-u_\zeta f_y^2(1-f+\cdots),\quad \text{при}\quad \zeta=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial u}{\partial x\partial \zeta}+F_{mn}^2 f-\gamma F_{mn}^2\Delta f=w^{(2)}(u,f;\varepsilon)=f_x u_\zeta-$$
$$-\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2+u_\zeta^2)+\frac{1}{2}kF_{mn}(f_x^2+f_y^2)+k[f_x(u_{xx}+u_\zeta+u_{\zeta\zeta})+$$
$$+f_y u_{xy}+f u_{x\zeta}-u_x u_{x\zeta}-u_y u_{y\zeta}-u_\zeta u_{\zeta\zeta}]+(-ff_x u_\zeta+f_x u_x u_\zeta+$$
$$+f_y u_y u_{y\zeta}+fu_\zeta^2)+k[-u_{x\zeta}(\frac{3}{2}f_x^2+\frac{1}{2}f_y^2)-u_\zeta(f_x f_{xx}+f_y f_{xy}+$$
$$+2ff_x)-f_x f_y u_{y\zeta}-2ff_x u_{\zeta\zeta}-f^2 u_{x\zeta}+f_x u_x u_{xx}+f_y u_y u_{yy}+u_{xy}(f_x u_y+$$
$$+f_y u_x)+2u_\zeta(f_x u_{x\zeta}+f_y u_{y\zeta})+u_x(fu_{x\zeta}+f_x u_{\zeta\zeta}+f_x u_\zeta)+u_y(fu_{y\zeta}+$$
$$+f_y u_{\zeta\zeta}+f_y u_\zeta)+3fu_\zeta u_{\zeta\zeta}]-\varepsilon f+\gamma\varepsilon\Delta f-\gamma(F_{mn}^2+\epsilon)[\frac{3}{2}(f_x^2 f_{xx}+$$
$$+f_y^2 f_{yy})+\frac{1}{2}(f_x^2 f_{yy}+f_y^2 f_{xx})+2f_x f_y f_{xy}]+\cdots\text{при}\quad \zeta=0. \tag{8}$$

Система (5)–(8) записывается в виде нелинейного функционального уравнения $BX=R(X,\epsilon)$, $\quad R(0,\varepsilon)\equiv 0$, $\quad X=(u,f)$ — задачи о точках бифуркации [15] с линейным фредгольмовым оператором ($0<\alpha<1$)

$$B=B_{mn}:C^{2+\alpha}(\prod_0\times[0,1])\dot{+}C^{2+\alpha}(\prod_0)\to C^{\alpha}(\prod_0\times[0,1])\dot{+}C^{\alpha}(\prod_0)\dot{+}C^{\alpha}(\prod_0),$$

где $\prod_0$ – прямоугольник периодичности в плоскости (x,y) со сторонами $a_1=\frac{2\pi}{a}$ и $b_1=\frac{2\pi}{b}$. Действительно, поскольку мы ищем периодические по аргументам x,y решения, система (5)-(8) может рассматриваться как функциональное уравнение на торе. Фредгольмовость оператора B, необходимая для применимости общих результатов теории ветвления [8, 11, 12],[16]–[19] в случае пространств Гельдера следует из результатов [26], а для пространств Соболева - из [27, 28]. Отметим, что требование эллиптичности равенства Бернулли в сочетании со вторым дифференциальным уравнением на границе $\zeta=0$ приводит к естественному ограничению на безразмерные параметры

$$k<\gamma F_{mn}^2 \qquad (\text{или} \qquad h>\frac{\rho_0 V_{mn}^2}{\sigma}). \tag{9}$$

Рассмотрим однородное уравнение $BX=0$. Представляя $f(x,y)$ отрезком ряда Фурье $f(x,y)=\sum\limits_{m,n}(a_{mn}\cos max\cos nby+b_{mn}\cos max\sin nby+c_{mn}\sin max\cos nby+d_{mn}\sin max\sin nby)$ и решая задачу Неймана (5)–(7) для u методом разделения переменных, находим

$$u(x,y,\zeta)=ma\frac{ch[s_{mn}(\zeta+1)]}{s_{mn}shs_{mn}}[c_{mn}\cos max\cos nby+$$
$$+d_{mn}\cos max\sin nby-a_{mn}\sin max\cos nby-b_{mn}\sin max\sin nby],$$

где $s_{mn}^2=m^2a^2+n^2b^2$. Тогда уравнение (8) приводит к дисперсионному соотношению

$$m^2a^2(\frac{chs_{mn}}{s_{mn}shs_{mn}}+k)=F_{mn}^2(1+\gamma s_{mn}^2), \tag{10}$$

при выполнении которого оператор $B=B_{mn}$ имеет не менее чем четырехмерное ($n\neq 0$) или двумерное в плоском случае (n=0) подпространство нулей. Из (9) и (10) следует ограничение

$$k<\frac{\gamma m^2a^2}{1+\gamma n^2b^2}\frac{chs_{mn}}{s_{mn}shs_{mn}}. \tag{9*}$$

В качестве базиса $\hat{\varphi}_j=(\hat{u}_j,\hat{f}_j), j=\overline{1,4}$ в $N(B_{mn})$ выберем элементы

$$\begin{gathered}
\hat{\varphi}_1=\{-v_1(\zeta)\cdot\sin max\cdot\cos nby, v_2\cdot\cos max\cos nby\},\\
\hat{\varphi}_2=\{-v_1(\zeta)\cdot\sin max\sin nby, v_2\cdot\cos max\sin nby\},\\
\hat{\varphi}_3=\{v_1(\zeta)\cos max\cos nby, v_2\cdot\sin max\cdot\cos nby\},\\
\hat{\varphi}_4=\{v_1(\zeta)\cos max\sin nby, v_2\sin max\sin nby\},\\
\textit{где}\quad v_1(\zeta)=\frac{ma\sqrt{ab}}{\pi}ch[s_{mn}(\zeta+1)], v_2=\frac{\sqrt{ab}}{\pi}.
\end{gathered} \tag{11}$$

Переход к комплекснозначному базису значительно упрощает вычисления, поэтому мы выполним замену [8]

$$\varphi=C'\hat{\varphi},$$

$$\mathbf{C}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & i & -i & i\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ i & -i & -i & i\end{pmatrix},\qquad \mathbf{C}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i & 1 & 1 & -i\\ -i & 1 & 1 & i\\ i & -1 & 1 & i\\ -i & -1 & 1 & -i\end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered}
\varphi_1=\frac{1}{2}\{v_1(\zeta),-iv_2\}e^{i(max+nby)}=\frac{1}{2}\{v_1(\zeta),-iv_2\}e^{i<\bar{l}_1,q>},\\
\varphi_2=\frac{1}{2}\{v_1(\zeta),iv_2\}e^{-i(max+nby)}=\frac{1}{2}\{v_1(\zeta),iv_2\}e^{i<\bar{l}_2,q>},\\
\varphi_3=\frac{1}{2}\{v_1(\zeta),-iv_2\}e^{i(max-nby)}=\frac{1}{2}\{v_1(\zeta),-iv_2\}e^{i<\bar{l}_3,q>},\\
\varphi_4=\frac{1}{2}\{v_1(\zeta),iv_2\}e^{-i(max-nby)}=\frac{1}{2}\{v_1(\zeta),iv_2\}e^{i<\bar{l}_4,q>},\\
q=(x,y).
\end{gathered} \tag{12}$$

Если $\hat{t}(\eta,\varepsilon)=0$ УР в вещественных переменных, то при переходе к комплекснозначному базису (12) получаем эквивалентное УР в комплексных переменных ξ [8]

$$t_j(\xi,\varepsilon)=(C^{-1}\hat{t})_j(C\xi,\epsilon),\quad j=\overline{1,4}. \tag{13}$$

Согласно [29], составляем билинейную форму

$$0=S(\{u,f\},\{v,g\})=\int\limits_{\prod_0\times[-1,0]}v\Delta udxdyd\zeta+$$

$$+\int\limits_{\prod_0}g(u_x+ku_{x\zeta}+F_{mn}^2f-\gamma F_{mn}^2\Delta f)dxdy$$

и находим сопряженную по Лагранжу однородную систему

$$\Delta v = 0 \quad \text{в} \quad \prod\nolimits_0 \times [-1,0]; \quad v_\zeta(x,y,-1) = 0, \quad v_\zeta - g_x = 0, \quad \zeta = 0;$$
$$v_x + kg_{xx} + F_{mn}g - \gamma F_{mn}\Delta g = 0, \quad \zeta = 0,$$

откуда следует ее самосопряженность. Аналогичные построения, примененные к неоднородной системе (5)–(8), приводят к условиям ее разрешимости

$$-\int\limits_{\prod_0 \times [-1,0]} w^{(0)} u_j dxdyd\zeta + \int\limits_{\prod_0} w^{(1)}[v_j(x,y,0) + k\frac{\partial f_j}{\partial x}]dxdy+$$
$$+\int\limits_{\prod_0} w^{(2)} f_j dxdy = 0, \qquad j = \overline{1,4}, \tag{14}$$

используемым при построении УР.

Группа сдвигов L_β в $N(B_{mn})$ действует 2-стационарно [8, 11], т.е. для любого $\varphi = \sum \eta_k \hat{\varphi}_k \in N(B_{mn})$ существуют значения β_1иβ_2 такие, что $L_\beta \varphi = \tilde{\eta}_1 \hat{\varphi}_1 + \tilde{\eta}_2 \hat{\varphi}_2$. Это свойство позволяет понизить на две единицы порядок УР $\hat{t}(\eta,\varepsilon) = 0$ в вещественном базисе (11), положив $\eta_2 = 0, \eta_3 = 0$ (или $\eta_1 = 0, \eta_4 = 0$).

УР (13) инвариантно относительно кристаллографической группы G^1, порожденной основными трансляциями $\overline{a}_1 = \frac{2\pi}{a}\overline{e}_1$, $\quad \overline{a}_2 = \frac{2\pi}{b}\overline{e}_2 \quad$ ($\overline{e}_1$и$\overline{e}_2$ - единичные векторы по осям координат x и y) и, в частности, относительно группы $\tilde{G}^1$ симметрии прямоугольника. Обратная решетка также прямоугольная, порождается векторами $\overline{l}^{(1)} = a\overline{e}_1, \overline{l}^{(2)} = b\overline{e}_2$ и $\overline{l}(m,n) = ml^{(1)} + nl^{(2)}$ её произвольный вектор, $|\overline{l}(m,n)| = s_{mn}$. При принятой нумерации базисных элементов $\varphi_k = \varphi_{\overline{l}_{k(m,n)}}$, $\quad \overline{l}_1(m,n) = m\overline{l}^{(1)} + n\overline{l}^{(2)}$, $\quad \overline{l}_3(m,n) = m\overline{l}^{(1)} - n\overline{l}^{(2)}$, $\quad \overline{l}_{2j}(m,n) = -\overline{l}_{2j-1}(m,n)$ и отвечающих им вершин $(\pm m, \pm n)$ прямоугольника $\prod_0$ в обратной решетке, действие группы $\tilde{G}^1$ выражается подстановками индексов у переменных

$$\xi_k : p_1 = (12)(34), p_2 = (13)(24), p_3 = (14)(23),$$

а групповая симметрия УР (8) относительно $\tilde{G}^1$ равенствами

$$(p_s t)_j(\xi,\varepsilon) = t_j(p_s\xi,\varepsilon), \quad s = 1,2,3. \tag{15}$$

Действительно, преобразования векторных базисных элементов $\varphi_j = \{u_j, f_j\}$ в $N(B)$ при действии группы $\tilde{G}^1$ определяются формулами

$$p_1\varphi_j = \{p_1 u_j, -p_1 f_j\}, \quad p_2\varphi_j = \{p_2 u_j, p_2 f_j\}, p_3\varphi_j = \{p_3 u_j, -p_3 f_j\},$$

где $\;p_1 g(x,y) = g(-x,-y), \quad p_2 g(x,y) = g(x,-y) \;$ и $\; p_3 g(x,y) = g(-x,y)$. Система (5)–(8) вещественна и потому инвариантна относительно операции J комплексного сопряжения, что также наследуется УР (13).

3. Построение и исследование УР. Асимптотика разветвляющихся решений

Для построения УР воспользуемся наследуемой им инвариантностью относительно двумерной группы сдвигов

$$e^{i<\overline{l}_1,\beta>} t_j(\xi,\varepsilon) = t_j(\xi_1 e^{i<\overline{l}_1,\beta>}, \cdots, \xi_4 e^{i<\overline{l}_4,\beta>}, \varepsilon), j = \overline{1,4}. \tag{16}$$

Равенства (16) соответствуют тому факту, что группа L_β при действии в $N(B)$ (или в пространстве Ξ^4 векторов $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ индуцирует группу вращений-отражений с матрицей

$$A_{g(\beta)} = diag\{e^{i<\bar{l}_1,\beta>}, \cdots, e^{i<\bar{l}_4,\beta>}\}.$$

Группе $A_{g(\beta)}$ отвечает базисная система инфинитезимальных операторов

$$X_1 = \{\hat{X}_1(\xi), \hat{X}_1(t)\}, \hat{X}_1(\xi) = ma(-\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1} + \xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2} - \xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3} + \xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}),$$

$$X_2 = \{\hat{X}_2(\xi), \hat{X}_2(t)\}, \hat{X}_2(\xi) = nb(-\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1} + \xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2} + \xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3} - \xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}).$$

Общий ранг r матрицы из координат инфинитезимальных операторов X_1, X_2 равен двум. Поэтому система дифференциальных уравнений $X_1 I(\xi,t) = 0 \quad X_2 I(\xi,t) = 0$ определяет полную систему 6 функционально независимых инвариантов

$$I_s(\xi,t) = \frac{t_s}{\xi_s}, \quad s = \overline{1,4}, \quad I_5(\xi) = \xi_1\xi_2, \quad I_6(\xi) = \xi_3\xi_4. \tag{17}$$

Равенство (16) означает, что многообразие $T = \{(\xi,t) | \quad t - t(\xi,\varepsilon) = 0\}$ является инвариантным многообразием группы L_β и согласно теореме Л.В.Овсянникова [13, 14] о его выражаемости через полную систему функционально независимых инвариантов может быть представлено в виде $\Phi^s(I_1, \cdots, I_6) = 0, s = \overline{1,6}$. В силу независимости системы (17) по отношению к переменным t $\quad (rank||\frac{\partial I_k}{\partial t_j}|| = 4)$ общий вид УР рассматриваемой задачи

$$t_s(\xi,\varepsilon) \equiv a_0^s(\varepsilon)\xi_s + \sum_q a_q^s(\varepsilon)\xi_s(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2} = 0, s = \overline{1,4}, \tag{18}$$

где соотношения симметрии между коэффициентами определяются преобразованиями p_j группы прямоугольника, т.е. равенствами (15).

Эти равенства позволяют выразить уравнения системы разветвления через первое уравнение

$$t_1(\xi,\varepsilon) \equiv A\xi_1\varepsilon + \tilde{B}\xi_1^2\xi_2 + \tilde{C}\xi_1\xi_3\xi_4 + \cdots = 0,$$
$$A = t_{e_1;1}^{(1)}, \quad \tilde{B} = t_{2e_1+e_2;0}^{(1)}, \quad \tilde{C} = t_{e_1+e_3+e_4;0}^{(1)} \quad (e_1 = (1,0,0,0), \cdots,$$
$$e_4 = (0,0,0,1)), \quad t_k(\xi,\varepsilon) \equiv p_{k-1}t_1(\xi,\varepsilon) = 0, \quad k = 2,3,4.$$

Используя лемму Шмидта [15] и условия разрешимости (14), получаем формулу для вычисления коэффициентов $t_1(\xi,\varepsilon)$:

$$t_{\alpha;k}{}^{(1)} = -\int\limits_{\prod_0 \times[-1,0]} w_{\alpha;k}{}^{(0)}u_2 dxdyd\zeta + \int\limits_{\prod_0} w_{\alpha;k}{}^{(1)}[u_2(x,y,0) +$$
$$+ k\frac{\partial f_2}{\partial x}]dxdy + \int\limits_{\prod_0} w_{\alpha;k}^{(2)} f_2 dxdy.$$

Последовательно находим

$$u_{2e_1;0} = \frac{ima^2b}{16\pi^2 shs_{mn}}\{-4(\zeta+1)sh[s_{mn}(\zeta+1)] + ch[2s_{mn}(\zeta+1)]\cdot$$

$$\cdot\frac{3(1+\gamma s_{mn}^2+2\gamma s_{mn}^2 ch^2 s_{mn})+ks_{mn}shs_{mn}(-chs_{mn}+4\gamma s_{mn}^2 chs_{mn}+ks_{mn}shs_{mn})}{shs_{mn}[-sh^2 s_{mn}+\gamma s_{mn}^2(1+2ch^2 s_{mn})-3ks_{mn}shs_{mn}chs_{mn}]}\}\cdot$$
$$\cdot e^{i2(max+nby)},$$

$$f_{2e_1;0}=\frac{abs_{mn}chs_{mn}}{8\pi^2 shs_{mn}}e^{2i(max+nby)}\cdot$$
$$\cdot\frac{(1+\gamma s_{mn}^2)(1+2ch^2 s_{mn})+ks_{mn}shs_{mn}[4chs_{mn}(1+\gamma s_{mn}^2)+chs_{mn}+ks_{mn}shs_{mn}]}{[-sh^2 s_{mn}+\gamma s_{mn}^2(1+2ch^2 s_{mn})-3ks_{mn}shs_{mn}chs_{mn}]},$$

$$u_{e_1+e_2;0}=\mathrm{const},\quad u_{e_3+e_4;0}=\mathrm{const},\quad u_{e_1+e_4;0}=0,$$
$$f_{e_1+e_2;0}=f_{e_3+e_4;0}=-\frac{abs_{mn}(1+\gamma s_{mn}^2)}{4\pi^2 shs_{mn}(chs_{mn}+ks_{mn}shs_{mn})}-$$
$$-k\frac{abs_{mn}^2(1+\gamma s_{mn}^2)chs_{mn}}{\pi^2(chs_{mn}+ks_{mn}shs_{mn})}+k\frac{abs_{mn}^2}{4\pi^2},$$
$$u_{e_1+e_3;0}=\{-\frac{ima^2b}{2\pi^2 shs_{mn}}(\zeta+1)sh[s_{mn}(\zeta+1)]+\frac{ima^2b}{4\pi^2}\frac{ch[2ma(\zeta+1)]}{s_{mn}shs_{mn}}\cdot$$

$$[(1+\gamma s_{mn}^2)((m^2a^2-n^2b^2)ch^2 s_{mn}-3s_{mn}^2 shs_{mn})+2m^2a^2(1+4\gamma m^2a^2)ch^2 s_{mn}+$$
$$+k(-m^2a^2-5n^2b^2+4\gamma(m^4a^4-2m^2n^2a^2b^2-n^4b^4))s_{mn}shs_{mn}chs_{mn}+$$
$$+k^2(m^4a^4-n^4b^4)sh^2 s_{mn}]\{ma[(1+4\gamma m^2a^2)chs_{mn}-$$
$$-k(3+4\gamma n^2b^2)s_{mn}shs_{mn}]sh2ma-2(1+\gamma s_{mn}^2)s_{mn}shs_{mn}ch2ma\}^{-1}\}e^{2imax}.$$
$$f_{e_1+e_3;0}=\frac{ma^2b}{4\pi^2 s_{mn}shs_{mn}}\{[4mas_{mn}shs_{mn}chs_{mn}ch2ma+$$
$$+((m^2a^2-n^2b^2)ch^2 s_{mn}-3s_{mn}^2 sh^2 s_{mn})sh2ma](1+\gamma s_{mn}^2)+k(m^2a^2-$$
$$-n^2b^2)s_{mn}shs_{mn}sh2ma[(5+4\gamma s_{mn}^2)chs_{mn}+ks_{mn}shs_{mn}]\}\cdot$$
$$[ma((1+4\gamma m^2a^2)chs_{mn}-k(3+4\gamma n^2b^2)s_{mn}shs_{mn})sh2ma-$$
$$-2(1+\gamma s_{mn}^2)s_{mn}shs_{mn}ch2ma]^{-1}e^{2imax}.$$
$$f_{e_1+e_4;0}=\frac{ab}{4\pi^2(1+4\gamma n^2b^2)}\cdot e^{2inby}$$
$$\{(1+\gamma s_{mn}^2)[-m^2a^2+n^2b^2(ch^2 s_{mn}+sh^2 s_{mn})]-k(m^2a^2-$$
$$-n^2b^2)s_{mn}shs_{mn}[(3+4\gamma s_{mn}^2)chs_{mn}-ks_{mn}shs_{mn}]\}\cdot$$
$$\cdot[s_{mn}shs_{mn}(chs_{mn}+ks_{mn}shs_{mn})]^{-1}.$$

Получаем следующие значения отличных от нуля коэффициентов первого уравнения системы разветвления

$$A=-(1+\gamma s_{mn}^2)<0,$$

$$\tilde{B}=\frac{m^2a^3b}{\pi^2}\{\frac{s_{mn}}{4sh^3 s_{mn}}[ch^3 s_{mn}+ks_{mn}shs_{mn}(4ch^2 s_{mn}+sh^2 s_{mn})]\cdot$$
$$[3(1+\gamma s_{mn}^2+2\gamma s_{mn}^2 ch^2 s_{mn})+ks_{mn}shs_{mn}(-chs_{mn}+4\gamma s_{mn}^2 chs_{mn}+$$

$$+ks_{mn}shs_{mn})][3\gamma {s_{mn}}^2ch^2s_{mn}-(1+\gamma {s_{mn}}^2)sh^2s_{mn}-3ks_{mn}shs_{mn}chs_{mn}]^{-1}+$$

$$+\frac{s_{mn}chs_{mn}}{8(1+\gamma {s_{mn}}^2)sh^3s_{mn}}[1+\gamma {s_{mn}}^2+2k\gamma {s_{mn}}^3chs_{mn}shs_{mn}-2k^2{s_{mn}}^2sh^2s_{mn}]\cdot$$

$$\cdot\{(1+2ch^2s_{mn})(1+\gamma {s_{mn}}^2)+ks_{mn}shs_{mn}[4(1+\gamma {s_{mn}}^2)chs_{mn}+chs_{mn}+$$

$$+ks_{mn}shs_{mn}]\}[3\gamma {s_{mn}}^2ch^2s_{mn}-(1+\gamma {s_{mn}}^2)sh^2s_{mn}-3ks_{mn}chs_{mn}shs_{mn}]^{-1}+$$

$$+\frac{(1+\gamma {s_{mn}}^2)s_{mn}(1+4ks_{mn}chs_{mn}shs_{mn})}{4sh^3s_{mn}(chs_{mn}+ks_{mn}shs_{mn})}-\frac{s_{mn}chs_{mn}}{shs_{mn}}+$$

$$+\frac{3\gamma {s_{mn}}^3chs_{mn}}{8(1+\gamma {s_{mn}}^2)shs_{mn}}-k\frac{{s_{mn}}^2(4+\gamma s_{mn}^2)}{8(1+\gamma s_{mn}^2)}-k\frac{{s_{mn}}^2ch^2s_{mn}}{sh^2s_{mn}}\}$$

$$\tilde{C}=\frac{m^2a^3b}{\pi^2}\{[\frac{-{s_{mn}}^2+2n^2b^2ch^2s_{mn}}{4s_{mn}^3sh^3s_{mn}}+\frac{kn^2b^2(chs_{mn}+ks_{mn}shs_{mn})}{2(1+\gamma {s_{mn}}^2){s_{mn}}^2sh^2s_{mn}}]\cdot$$

$$\{\cdot(1+\gamma {s_{mn}}^2)(-{s_{mn}}^2+2n^2b^2ch^2s_{mn})-k(m^2a^2-n^2b^2)s_{mn}shs_{mn}[(3+$$

$$+4\gamma {s_{mn}}^2)chs_{mn}-ks_{mn}shs_{mn}]\}(1+4\gamma n^2b^2)^{-1}(chs_{mn}+ks_{mn}shs_{mn})^{-1}+$$

$$+[\frac{\mathrm{ma}}{2\mathrm{s_{mn}}^2\mathrm{sh}^2\mathrm{s_{mn}}}(2\mathrm{machs_{mn}ch2ma}-\mathrm{s_{mn}shs_{mn}sh2ma}+\mathrm{k}(3\mathrm{m}^2\mathrm{a}^2+$$

$$+n^2b^2)chs_{mn}sh2ma+2kmas_{mn}shs_{mn}ch2ma)\cdot[(1+\gamma {s_{mn}}^2)((m^2a^2-$$

$$-n^2b^2)ch^2s_{mn}-3{s_{mn}}^2sh^2s_{mn})+2m^2a^2(1+4\gamma m^2a^2)ch^2s_{mn}+$$

$$+k(-m^2a^2-5n^2b^2+4\gamma(m^4a^4-2m^2n^2a^2b^2-n^4b^4)s_{mn}chs_{mn}shs_{mn}+$$

$$+k^2(m^4a^4-n^4b^4)sh^2s_{mn}]+\frac{ma}{4{s_{mn}}^3sh^3s_{mn}}({s_{mn}}^2-2n^2b^2ch^2s_{mn}-$$

$$-2k{s_{mn}}^3chs_{mn}shs_{mn}+k\frac{2ma[(1+2\gamma {s_{mn}}^2)chs_{mn}-ks_{mn}shs_{mn}]s_{mn}shs_{mn}}{(1+\gamma {s_{mn}}^2)})\cdot$$

$$\cdot[(1+\gamma {s_{mn}}^2)(4mas_{mn}chs_{mn}shs_{mn}ch2ma+((m^2a^2-n^2b^2)ch^2s_{mn}-$$

$$-3{s_{mn}}^2sh^2s_{mn})sh2ma)+k(m^2a^2-n^2b^2)((5+4\gamma {s_{mn}}^2)chs_{mn}+$$

$$+ks_{mn}shs_{mn})s_{mn}shs_{mn}sh2ma)]]\cdot[ma((1+4\gamma m^2a^2)chs_{mn}-$$

$$-k(3+4\gamma n^2b^2)s_{mn}shs_{mn})sh2ma-2s_{mn}(1+\gamma {s_{mn}}^2)shs_{mn}ch2ma]^{-1}+$$

$$+\frac{s_{mn}(1+\gamma s_{mn}^2)}{4sh^3s_{mn}(chs_{mn}+ks_{mn}shs_{mn})}-(2m^2a^2-n^2b^2)\frac{chs_{mn}}{s_{mn}shs_{mn}}+$$

$$+\gamma\frac{chs_{mn}+ks_{mn}shs_{mn}}{4(1+\gamma {s_{mn}}^2)s_{mn}shs_{mn}}(3m^4a^4+3n^4b^4-2m^2n^2a^2b^2)-$$

$$-k\frac{1}{4sh^2s_{mn}}({s_{mn}}^2+(13m^2a^2-3n^2b^2)sh^2s_{mn})+k\frac{s_{mn}^2(1+\gamma s_{mn}^2)chs_{mn}}{sh^2s_{mn}(chs_{mn}+ks_{mn}shs_{mn})}$$

$$-k\frac{m^2a^2}{2}(3m^2a^2+5n^2b^2)\frac{ch^2s_{mn}}{{s_{mn}}^2shs_{mn}}\}.$$

Инвариантность задачи относительно L_β позволяет провести редукцию УР $\hat{t}(\eta,\varepsilon)=0$ в вещественном базисе (6), положив $\eta_2=0,\quad \eta_3=0$. К редуцированному УР приводит также подстановка $\xi_1=\eta_1+i\eta_2,\quad \xi_2=\eta_1-i\eta_2,\quad \xi_3=\eta_3+i\eta_4,\quad \xi_4=$

$\eta_3 - i\eta_4, \quad , \eta_2 = 0, \eta_4 = 0$. Используя (13), выпишем редуцированную систему разветвления, состоящую из двух уравнений с двумя неизвестными

$$A\eta_1\varepsilon + B\eta_1^3 + C\eta_1\eta_4^2 + \cdots = 0,$$
$$A\eta_1\varepsilon + C\eta_1^2\eta_4 + B\eta_4^3 + \cdots = 0, \tag{19}$$

где

$$B = \frac{1}{4}(\tilde{B} + \tilde{C}), \quad C = \frac{1}{4}(3\tilde{B} - \tilde{C}), \quad B + C = \tilde{B}, \quad B = \frac{1}{4}(\tilde{B} + \tilde{C}). \tag{20}$$

Система (19) имеет восемь решений

$$\eta_1 = \pm(-\frac{A\varepsilon}{B+C})^{\frac{1}{2}} + o(|\varepsilon|^{\frac{1}{2}}), \quad \eta_4 = \pm(-\frac{A\varepsilon}{B+C})^{\frac{1}{2}} + o(|\varepsilon|^{\frac{1}{2}}), \tag{21}$$

$$\mathrm{sign}\varepsilon = \mathrm{sign}(B+C) = \mathrm{sign}\tilde{B};$$
$$\eta_1 = \pm(-\frac{A}{B}\varepsilon^{\frac{1}{2}}) + o(|\varepsilon|^{\frac{1}{2}}), \quad \eta_4 = 0,$$
$$\mathrm{sign}\varepsilon = \mathrm{sign}B = \mathrm{sign}(\tilde{B} + \tilde{C}); \tag{22}$$
$$\eta_1 = 0, \quad \eta_4 = \pm(-\frac{A}{B}\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + o(|\varepsilon|^{\frac{1}{2}}),$$

возможны любые комбинации знаков.

Теорема. *Задача (1)-(4) в окрестности точки бифуркации F_{mn}^2 - четырехкратного собственного значения, определяемого дисперсионным соотношением (10) при выполнении (9),* (9*) *имеет с точностью до преобразования $y \to -y$ два двупараметрических семейства периодических решений*

$$\{\Phi^{(1)}, f^{(1)}\} = [-\frac{A}{B+C}(F^2 - F_{mn}^2)]^{\frac{1}{2}}\{-\frac{ma\sqrt{ab}}{\pi}\frac{ch[s_{mn}(\zeta+1)]}{s_{mn}shs_{mn}}\cdot$$
$$\cdot\sin[ma(x+\beta_1) - nb(y+\beta_2)], \quad \frac{\sqrt{ab}}{\pi}\cos[ma(x+\beta_1) -$$
$$-nb(y+\beta_2)]\} + o(|F^2 - F_{mn}^2|^{\frac{1}{2}}), \tag{23}$$
$$sign(F^2 - F_{mn}^2) = sign\tilde{B}, \quad \zeta = \frac{z - f^{(1)}(x,y)}{1 + f^{(1)}(x,y)};$$

$$\{\Phi^{(2)}, f^{(2)}\} = [-\frac{A}{B}(F^2 - F_{mn}^2)]^{\frac{1}{2}}\{\frac{ma\sqrt{ab}}{\pi}\frac{ch[s_{mn}(\zeta+1)]}{s_{mn}shs_{mn}}\cdot$$
$$\cdot\cos[ma(x+\beta_1)]\sin[nb(y+\beta_2)], \quad \frac{\sqrt{ab}}{\pi}\sin[ma(x+\beta_1)]\cdot$$
$$\cdot\sin[nb(y+\beta_2)]\} + o(|F^2 - F_{mn}^2|^{\frac{1}{2}}), \tag{24}$$
$$sign(F^2 - F_{mn}^2) = sign(\tilde{B} + \tilde{C}), \quad \zeta = \frac{z - f^{(2)}(x,y)}{1 + f^{(2)}(x,y)}.$$

Параметры β_1, β_2 свободные.

Действительно, решения (23), (24) соответствуют решениям (21), (22) редуцированного УР. Его инвариантность относительно циклических групп $\{\eta_1 \to \eta_4, \eta_4 \to \eta_1\}$ и $\{\eta_1 \to -\eta_4, \eta_4 \to -\eta_1\}$, индуцированная комбинациями сдвигов на

$\pm\frac{\pi}{2ma}$, $\pm\frac{3\pi}{2ma}$ по координате x и на $\pm\frac{\pi}{2nb}, \pm\frac{3\pi}{2nb}$ по y в подпространстве $N(B_{mn})$ приводит к тому, что последние два семейства периодических решений, порожденных (21) могут быть получены сдвигами из первых двух. Аналогично , сдвиги $\beta_1 = \frac{\pi}{2ma} + \tilde{\beta}_1$, $\beta_2 = \frac{\pi}{2nb} + \tilde{\beta}_2$ оставляют из четырех решений (22) только два. Инвариантность системы (1)–(4) относительно преобразования $y \to -y$ сокращает число двупараметрических семейств периодических решений до двух.

Замечания: 1. При $k = 0$ (отсутствие флотируемого вещества) получаем результаты [6]–[10].

2. В общем случае решений (23),(24) знак ε, т.е. характер ветвления (надкритическое, подкритическое), определить не удалось.

3. При нарушении условий (9), (9^*) интеграл Бернулли (4) дает гиперболическое уравнение. Этот случай будет рассмотрен в дальнейших работах.

4. Полученные результаты переносятся на случай двумерного ветвления при $n = 0$, где возможно определение характера ветвления. Здесь возможны решения с косоугольной трансляционной решеткой, определяемые подобно [8, 9].

5. Случаи более высоких вырождений и вопросы устойчивости разветвляющихся решений будут предметом дальнейших исследований.

Литература

[1] Некрасов А.И. О волнах установившегося вида . Известия Ивановского политехнического института , 6(1922). С.155-171.

[2] Некрасов А.И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М.: Издательство АН СССР, 1951.

[3] Levi-Civita T. Determination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. Math. Annallen, 93 (1925). C.264-324.

[4] Struik D.J. Determination rigoureuse des ondes irrotationelles periodiques. Math. Annallen, 95 (1926), 595-634.

[5] Секерж-Зенькович Я.И. Об установившихся капиллярно-гравитационных волнах конечной амплитуды на поверхности жидкости конечной глубины. В кн. "Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа". М.: Наука, 1972. С.445-458.

[6] Логинов Б.В. Построение периодических решений трехмерной задачи о волнах над ровным дном. ДАН СССР, 247(1979), N2, С.324-328.

[7] Логинов Б.В. Периодические решения трехмерной задачи о волнах над ровным дном. Динамика сплошной среды. 42(1979), С.3-22.

[8] Логинов Б.В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. Ташкент, Фан, 1985.

[9] Логинов Б.В., Кузнецов А.О. Вычисление периодических решений трехмерной задачи о капиллярно-гравитационных волнах над ровным дном. В кн. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Ташкент, Фан, 1986, С.296-314.

[10] Loginov B.V., Kuznetsov A.O. Capillary-gravity waves over the flat surface. European Journal of Mechanics / B Fluids. 15 (1996), N2, P.259-280.

[11] Логинов Б.В., Треногин В.А. Об использовании групповых свойств для определения многопараметрических семейств решений нелинейных уравнений. Матем. сборник, 85 (1971), N3, С.440-454.

[12] Логинов Б.В., Треногин В.А. Об использовании групповой инвариантности в теории ветвления. Диф.уравнения, 11 (1975), N8, С.1518-1521.

[13] Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений.Новосибирск, НГУ, 1966.

[14] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. (AP, NY 1982).

[15] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

[16] Логинов Б.В., Рахматова Х.Р., Юлдашев Н.Н. О построении уравнения разветвления по его группе симметрии (кристаллографические группы). В кн. Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. Ташкент, Фан, 1987, С.183-195.

[17] Loginov B.V. On the construction of the general form of branching equation by its group symmetry. EquaDiff-YП. Enlarged Abstracts, Praxa (1989), P.48-50.

[18] Loginov B.V. Group analysis methods for construction and investigation of the bifurcation equation. Applications of Mathematics 37 (1992), N4, P.241-248.

[19] Логинов Б.В. Групповой анализ в задачах теории ветвления с нарушением симметрии. Материалы международной конференции: Дифференциальные уравнения и их приложения. (20-22.12.94) Саранск 1995, С.103-119.

[20] Габов С.А. О существовании установившихся волн конечной амплитуды на поверхности флотирующей жидкости. ЖВМ и МФ, 28(1988), N 10, P.1507-1519.

[21] Габов С.А., Тверской М.Б. О вычислении параметров установившихся волн конечной амплитуды на поверхности флотирующей жидкости. Математическое моделирование, 1 (1989), N2, С.109-118.

[22] Габов С.А., Свешников А.Г. Математические задачи динамики флотирующей жидкости. Итоги науки и техники. Математический анализ. М, ВИНИТИ, 28 (1990), С.3-86.

[23] Логинов Б.В, Карпова С.А. Ветвление решений задачи о капиллярно-гравитационных волнах в пространственном слое флотирующей жидкости. Сборник научных трудов Всероссийского симпозиума: Математическое моделирование и компьютерные технологии. Кисловодск, П (ч.1) (1997), С.62-64.

[24] Логинов Б.В., Карпова С.А. Вычисление асимптотики капиллярно- гравитационных волн в пространственном слое флотирующей жидкости. Тезисы докладов П Казанской летней школы-конференции: Алгебра и анализ, 16-22. 5.97.

[25] Loginov B.V., Karpova S.A., Trenogin V.A. Bifurcation, symmetry and parameter continuation in some problems about capillary-gravity waves. Progress in Industrial Mathematics at ECMI-96. B.G.Teubner, Stuttgart (1997), P.432-439.

[26] Агранович М.С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы. УМН, 20 (1965), 5, С.3-120.

[27] Агранович М.С. Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М., ВИНИТИ, 63 (1990), С.5-129.

[28] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М., Мир, 1967.

[29] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

[30] Любарский Г.Я. Теория групп и её применение в физике. М., ГИФМЛ, 1958.

COMPUTATION OF PERIODICAL SOLUTIONS IN THE PROBLEM ABOUT CAPILLARY–GRAVITY WAVES IN FLOATING FLUID SPATIAL LAYER.

B.V. Loginov[2]

Potential of flowes of incompressible fluid in spatial layer with free upper boundary are investigated. The case of four–dimensional degeneration of linearized operator is studied. At the usage of group analysis methods in bifurcation theory (RZ Mat 1985 11Б1249K, 1989 8Б554, 1978 11Б883K), asymptotics of bifurcating solution families is calculated.

[2]Loginov Boris Vladimirovich, Dept. of Mathematics Ulyanovsk Technical University, Karpova Svetlana Aleksandrovna, Ulyanovsk Pedagogic University.