БИРАЦИОНАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АРИФМЕТИКА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП, II

В.Е.Воскресенский[1]

Данная статья является продолжением работы автора [12]. В ней методы бирациональной геометрии прилагаются к изучению теории инвариантов конечных групп преобразований. Вторая часть посвящена исследованию связей между геометрией и арифметикой алгебраических групп.

Содержание

[1] Воскресенский Валентин Евгеньевич. Кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета

Глава III. ИНВАРИАНТЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§7. ПОЛЯ ИНВАРИАНТОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Результаты, изложенные в предыдущих параграфах, позволили сдвинуть с места старую проблему рациональности полей инвариантов конечных групп преобразований, действующих линейно на конечномерном пространстве. Первые примеры нерациональных полей инвариантов были получены над незамкнутым полем автором [2,4] и Суоном [2], над замкнутым Солтманом [1]. Их изложение представляет собой прекрасную иллюстрацию, показывающую достоинства современных алгебраических методов в бирациональной геометрии многообразий. В этом параграфе, если не будет оговорено, поле k имеет характеристику нуль.

7.1. Поля инвариантов и их модели. Пусть G – конечная группа, линейно и точно действующая на k-пространстве V. Она действует тогда на кольце полиномов $k[V]$ и поле рациональных функций $k(V)$. Ясно, что поле инвариантов $k(V)^G$ является унирациональным, вопрос о рациональности поля $k(V)^G$ долгое время оставался открытым. Наиболее известной является задача Э.Нетер. Пусть $k[V] = k[x_1, .., x_n]$ и группа G действует тривиально на k и перестановками на переменных x_i. Когда поле инвариантов $k(V)^G$ рационально над k ? Это так, если G есть полная симметрическая группа S_n, тогда поле $k(V)^G$ и даже кольцо инвариантов $k[V]^G$ порождено независимыми основными симметрическими полиномами. Но для произвольных подгрупп симметрической группы ответ оказался не всегда положительным. Переведем нашу задачу на геометрический язык. Поле $k(V)^G$ есть поле частных кольца инвариантов $k[V]^G$. Пусть $Y = \operatorname{Spec} k[V]^G$ – аффинное многообразие над полем k. Ясно, что $k(V)^G = k(Y)$, Y будем называть аффинной моделью поля инвариантов и обозначать $Y = V/G$; по Мамфорду, это категорный фактор. Разрешая особенности многообразия Y, перейдем к гладкой проективной k-модели X поля $k(V)^G$. Тогда имеем бирациональные инварианты BrX, $p(X)$, которые в ряде случаев удается вычислить и иногда они оказываются нетривиальными. Рассмотрим ряд важных редукций, которые позволяют проводить индуктивные доказательства. Пусть $k[G]$ - групповое кольцо, являющееся линейным пространством над k размерности $|G|$.

I. Предположим, что $V = V_0 \oplus V_1$ есть разложение пространства V в прямую сумму $k[G]$-модулей и действие группы G на V_0 является точным. Тогда

$$k(V)^G = k(V_0)^G(V_1),$$

т.е. поля $k(V)^G$ и $k(V_0)^G$ стабильно эквивалентны. Действительно, пусть $L = k(V_0)$, $F = L^G$. Тогда G есть группа Галуа расширения L/F и $k(V)^G = L(V_1)^G$. Поскольку группа G действует на V_1 линейно, то $L(V_1)^G$ есть поле функций на форме аффинного F-пространства $F \otimes_k V_1$, которая тривиальна. На языке категорных факторов это можно записать в виде

$$V/G \cong V_0/G \times_k V_1. \tag{1}$$

II. Рассмотрим групповое кольцо $\Lambda = k[G]$ как модуль регулярного представления группы G. Модуль $k[G]$ разлагаеттся в прямую сумму $k \oplus I(G)$, где $I(G)$ - идеал кольца Λ, являющийся точным G-модулем. По формуле (1)

$$k[G]/G \cong I[G]/G \times_k \mathbf{A}^1. \tag{2}$$

Пусть $G = G_1 \times G_2$ - прямое произведение, тогда

$$k[G] \cong k[G_1] \otimes_k k[G_2] \cong k \oplus I(G_1) \oplus I(G_2) \oplus (I(G_1) \otimes_k I(G_2)).$$

Модуль $I(G_1) \oplus I(G_2)$ есть точный подмодуль модуля $k[G]$, тогда по формуле (1)

$$k[G]/G \cong I[G_1]/G_1 \times_k I(G_2)/G_2 \times_k \mathbf{A}^{d+1},$$

где $d = n_1 n_2 - n_1 - n_2$, $n_1 = |G_1|$, $n_2 = |G_2|$. Учитывая (2), получаем бирациональную эквивалентность

$$k[G]/G \cong k[G_1]/G_1 \times_k k[G_2]/G_2 \times_k \mathbf{A}^d. \tag{3}$$

7.2. Инварианты конечных абелевых групп. Пусть теперь G – конечная абелева группа, линейно и точно действующая на k-пространстве V. Разложим $k[G]$-модуль V на неприводимые части

$$V = V_1 \oplus .. \oplus V_t \tag{1}$$

и пусть φ_i - ограничение действия группы G на подпространстве V_i. Пусть

$$\varphi_i(G) = G_i \subset GL(V_i),\ \dim V_i = n_i,\ \sum_{i=1}^{t} n_i = n = \dim V.$$

Обозначим через A_i обертывающую алгебру группы G_i в алгебре всех квадратных матриц $M(n_i, k)$. Так как представление φ_i неприводимо, то A_i есть поле и $(A_i : k) = n_i$. Прямая сумма $A = A_1 \oplus .. \oplus A_t$ всех этих полей есть максимальная коммутативная подалгебра алгебры $M(n, k) = \mathrm{End}\,(V)$, а ее группа обратимых элементов A^* есть группа рациональных k-точек максимального алгебраического тора $S \subset GL_k(n)$, определенного над k

$$S(k) = A_1^* \times .. \times A_t^*.$$

Сам тор S записывается с помощью символов Вейля

$$S = R_{A/k}(G_m) = \prod\nolimits_{i=1}^{t} R_{A_i/k}(G_m),\ \dim S = n. \tag{2}$$

Наша конечная группа G есть подгруппа в S, G – постоянная группа: $G(L) = G(k)$ для любого $L \supset k$. Уточним строение полей A_i. Обозначим через e показатель группы G, т.е. наименьшее натуральное число с условием $g^e = 1$ для всех $g \in G$. Пусть ζ_m - первообразный корень из единицы степени m. Так как группа G диагонализируема над круговым расширением $k(\zeta_e)$, то все поля A_i имеют вид $k(\zeta_d)$, $d|e$. Тор S расщепляется над полем $k(\zeta_e)$ и это его минимальное поле разложения.

Теорема 1. Пусть G - конечная абелева группа линейных преобразований пространства V размерности n над полем k. Тогда поле инвариантов $k(V)^G$ есть поле рациональных функций на алгебраическом торе $T = S/G$, где S - максимальный тор группы $GL_{n,k}$, определенный над k и содержащий группу G. Один из таких торов однозначно определяется равенством (2), исходя из разложения (1). $\triangle$

Следствие 1. Поля инвариантов $\mathbf{R}(V)^G$ рациональны над $\mathbf{R}$ для любых конечных абелевых групп.

Это следует из того, что все торы над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$ являются произведениями торов, размерности ≤ 2, а такие торы рациональны. $\triangle$

Следствие 2. Если поле k содержит число ζ_e, где $e = \exp(G)$, то поле $k(V)^G$ рационально над k.

Действительно, в данном случае тор S разложим над k, а образ разложимого тора снова разложим, следовательно, рационален. $\triangle$

Всякая конечная абелева группа G разлагается в прямое произведение циклических групп

$$G = G_1 \times .. \times G_t.$$

Формула (3) п.7.1 показывает, что мы имеем бирациональный k-изоморфизм

$$k[G]/G \cong k[G_1]/G_1 \times .. \times k[G_t]/G_t \times \mathbf{A}^d, \tag{3}$$

$$d = n_1 \cdot \cdot n_t - n_1 .. - n_t, \ n_t = |G_i|.$$

Изучим бирациональные свойства многообразия $k[G]/G$ для циклической группы G порядка n. Поскольку поле функций на $k[G]/G$ однозначно определяется полем k и числом n, то обозначим его через (k, G) или просто (k, n). Разложение модуля $k[G]$ на неприводимые части происходит параллельно разложению многочлена $x^n - 1$ на неприводимые множители над полем k. Особенно просто это происходит для $k = Q$ или $\mathbf{C}$. Но во всех случаях поле $L_n = k(\zeta_n)$, рассматриваемое как $k[G]$-модуль, является точным неприводимым подмодулем модуля $k[G]$. Пусть T_n - тор, определяемый модулем L_n из факторизации

$$1 \ \to G \to R_{L_n/k}(G_m) \to T_n \to \ 1. \tag{4}$$

Из формулы (1) п.7.1 получаем редукцию

$$k[G]/G \cong T_n \times_k \mathbf{A}^r, \ r = n - [L_n : k]. \tag{5}$$

Выясним строение П-модуля рациональных характеров $\hat{T}_n$ тора T_n, где П есть группа Галуа расширения L_n/k. Последовательность, дуальная (4), имеет вид

$$0 \ \to \hat{T}_n \to \mathbf{Z}[\Pi] \xrightarrow{\varphi} \mu_n \to \ 1, \tag{6}$$

где $\varphi(1) = \zeta_n$, $\varphi(\sigma) = \sigma\varphi(1) = \zeta_n^a$, $\sigma \in \Pi$, $a = a(\sigma)$ есть элемент в мультипликативной группе $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$. Модуль $\hat{T}_n = \operatorname{Ker}\varphi$ является идеалом кольца $\mathbf{Z}[\Pi]$ индекса n, и, поскольку он содержит n и $\sigma - a(\sigma)$ для всех $\sigma \in \Pi$, то

$$\hat{T}_n = (n, \ \sigma_1 - a_1, \ .., \ \sigma_s - a_s),$$

где σ_i - система образующих группы П. Заметим, что в конструкции $\hat{T}_n$ группа G уже не участвует. Необходимым условием рациональности поля (k, n) является равенство $p(\hat{T}_n) = 0$. Рассмотрим возникающие здесь ситуации сначала для примарных чисел: $n = p^\alpha$, p - простое число.

7.3. Поля $(k, \ p^\alpha)$, $p > 2$. В этом случае группа П циклична с образующим элементом σ, пусть m - порядок группы П, $m|p^{\alpha-1}(p-1)$. Идеал $\hat{T}_q$ принимает вид

$$\hat{T}_q = (q, \ \sigma - a), \ q = p^\alpha,$$

где $a^m \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$ и a принадлежит показателю m по модулю q. Покажем, что П-модуль $\hat{T}_q$ является проективным. Можно выбрать a так, чтобы $a^m - 1$ не делилось на $p^{\alpha+1}$. Тогда $a^m - 1 = qt$, $(t, \ q) = 1$. Рассмотрим идеал $M = (\sigma - a, \ t)$ кольца $\mathbf{Z}[\Pi]$. Тогда ясно, что $\hat{T}_q + M = \mathbf{Z}[\Pi]$, откуда $\hat{T}_q \cap M = \hat{T}_q M$. Поэтому имеем точную последовательность П-модулей

$$0 \ \to \hat{T}_q M \to \hat{T}_q \oplus M \xrightarrow{u} \mathbf{Z}[\Pi] \to \ 0, \tag{1}$$

где $u(f,g) = f - g$. Далее, нетрудный подсчет показывает, что $\hat{T}_q M$ есть главный идеал с образующим элементом $\sigma - a$ и, очевидно, что он свободен. Последовательность (1) расщепляется, что и доказывает проективность П-модуля $\hat{T}_q M$. Принимая во внимание соотношение (6) п. 7.2, видим, что П-модуль μ_q когомологически тривиален для $q = p^\alpha$, $p > 2$. Теорема 3 п.5.3 и изоморфизм (5) п.7.2 показывают, что рациональность многообразия $(k,\ p)$ равносильна условию $p(T_q) = 0$, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что для каждого $d|m$ идеал

$$(\hat{T}_q)_{\Phi_d} = (p^\alpha,\ \zeta_d - a)$$

кольца $\mathbf{Z}[\zeta_d]$ является главным. Бирациональные характеристики торов с циклическим полем разложения и арифметика круговых полей дают следующие соотношения.

Теорема 1. Пусть $p > 2$ - простое число, $q = p^\alpha$, $[k(\zeta_q) : k] = m = fp^{\alpha-\beta}$, $f|p-1$, $1 \le \beta \le \alpha$, $F = \mathbf{Q}(\zeta_m)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) поле инвариантов $(k,\ q)$ рационально над k;

2) поле $(k,\ q)$ стабильно рационально над k;

3) существует $\alpha \in \mathbf{Z}[\zeta_m]$ такой, что

$$N_{F/\mathbf{Q}}(\alpha) = \begin{cases} p, & если \quad \beta < \alpha \\ p^\alpha, & если \quad \beta = \alpha \end{cases} . \quad \triangle$$

Выделим отдельно случай $k = \mathbf{Q}$. В этом случае

$$[\mathbf{Q}(\zeta_q) : \mathbf{Q}] = \varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1).$$

Теорема 2. Пусть $p > 2$ - простое число. Следующие условия эквивалентны:

1) поле $(\mathbf{Q},\ p^\alpha)$ рационально над $\mathbf{Q}$;

2) поле $(\mathbf{Q},\ p^\alpha)$ стабильно рационально над $\mathbf{Q}$;

3) идеал $(\zeta_{\varphi(q)} - a,\ p)$, где a - первообразный корень по модулю q, является главным в кольце $\mathbf{Z}[\zeta_{\varphi(q)}]$;

4) существует элемент $\alpha \in \mathbf{Z}[\zeta_{\varphi(q)}]$ такой, что $|N_{F/Q}(\alpha)| = p$. $\triangle$

Известно, что для $m < 23$ поле $\mathbf{Q}(\zeta_m)$ одноклассно, теорема 2 показывает тогда, что поля $(\mathbf{Q}, n)$ рациональны над $\mathbf{Q}$ при $n = 5,7,11,13,17,19,23,25,31,43,49$. Конечно, нужно приписать еще 2 и 4.

Пример 1. Поле $(k, 3^n)$ рационально над k при любом $n \ge 1$. Действительно, простое число p есть норма главного идеала в круговом поле $\mathbf{Q}(\zeta_{p^n})$ для любого $n \ge 1$. Так как $\varphi(3^n) = 2 \cdot 3^{n-1}$, то $\mathbf{Q}(\zeta_{\varphi(3^n)}) = \mathbf{Q}(\zeta_{3^{n-1}})$. Поэтому выполняется условие 4) теоремы 2 для $p = 3$, следовательно, поле $(\mathbf{Q}, 3^n)$ рационально над $\mathbf{Q}$, а тогда и подавно $(k, 3^n)$ рационально над k.

Последнее утверждение теоремы 2 показывает, что из рациональности поля $(\mathbf{Q}, p^n)$ следует рациональность полей $(\mathbf{Q}, p^m)$ для $m < n$. Однако, все поля $(\mathbf{Q}, p^2)$ не рациональны над $\mathbf{Q}$, за исключением случаев $p = 2,3,5,7$, Ленстра [2].

Пример 2. Пусть $F = \mathbf{Q}(\sqrt{-23})$ - мнимое квадратичное поле, $d = -4 \cdot 23$ - его дискриминант, элементы 1, $\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-23})$ составляют целый базис расширения $F/\mathbf{Q}$; норма элемента, записанного в этом базисе, является положительно определенной квадратичной формой $N(x + y\omega) = x^2 - xy + 6y^2$. Рассмотрим поле $(\mathbf{Q}, 47)$. Поскольку $23 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$, то поле F содержится в круговом поле $\mathbf{Q}(\zeta_{23}) = \mathbf{Q}(\zeta_{46}) = L$. Число 47 не является нормой главного идеала в $\mathbf{Q}(\zeta_{46})$, иначе уравнение $47 = x^2 - xy + 6y^2$ имело бы решение в целых числах.

Среди полей $(\mathbf{Q}, p)$, где p простое нечетное, поле $(\mathbf{Q}, 47)$ - первое, не являющееся рациональным над $\mathbf{Q}$. Ленстра показал [1], что множество P_k простых чисел p,

для которых поле (k,p) является рациональным над k, имеет нулевую плотность Дирихле во множестве всех простых чисел. Здесь k - поле конечного типа над простым полем. Возможно, что множество P_k конечно, во всяком случае, все найденные простые из $P_{\mathbf{Q}}$ не превосходят 71.

7.4. Поля $(k,\ 2^\alpha)$**.** Известно, что группа $(\mathbf{Z}/2^\alpha\mathbf{Z})^*$ является циклической для $\alpha =$ 1,2 и имеет две образующие $-1, 5$ для $\alpha \geq 3$. Пусть $q = 2^\alpha,\ L = k(\zeta_q),\ \Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$. Как и выше

$$k[G]/G \cong T_q \times \mathbf{A}^r_k.$$

Теорема. Поле инвариантов $(k,\ 2^\alpha)$ рационально над k тогда и только тогда, когда расширение L/k - циклическое. Если группа Π не является циклической и π - подгруппа типа (2,2) группы Π, то

$$H^1(\pi, p(T_q)) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.\ \triangle$$

Пример. Поле инвариантов $(\mathbf{Q}, 8)$ не является стабильно рациональным над $\mathbf{Q}$. Это первое не рациональное поле инвариантов в последовательности $(\mathbf{Q}, n)$.

7.5. Общий случай. Разложим абелеву группу G экспоненты e в прямое произведение циклических примарных групп G_q порядка q :

$$G = \prod_q G_q^{n(q)},$$

где $q = p^m,\ p$ - простое, $q|e$. Формула (3) п.7.2 показывает, что поле (k,G) рационально, если все поля (k,G_q) рациональны, обратное конечно верно не всегда.

Пример 1. Если экспонента группы G делит число

$$2^2 \cdot 3^m \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71,$$

то поле (k,G) чисто трансцендентно над k.

Каждое многообразие $k[G_q]/G_q$ бирационально эквивалентно произведению $T_q \times_k \mathbf{A}^r$, имеем тогда бирациональный k-изоморфизм

$$k[G]/G \cong \prod_q T_q^{n(q)} \times \mathbf{A}^r = \prod_{(q,2)=1} T_q^{n(q)} \times \prod_{q=2^m} T_q^{n(q)} \times \mathbf{A}^r.$$

Пусть $L_q = k(\zeta_q),\ \Pi_q = \mathrm{Gal}\,(L_q/k)$ - циклическая группа для нечетных q, модуль $\hat{T}_q$ есть проективный идеал в $\mathbf{Z}[\Pi_q]$ индекса q для $(q,2) = 1$. Для класса Пикара получаем равенство

$$p(k[G]/G) = \sum_{(q,2)=1} n(q)p(T_q) + \sum_{q=2^m} n(q)p(T_q).$$

Пусть $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L_e/k)$, предположим, что многообразие $k[G]/G$ стабильно рационально над k. Тогда $p(k[G]/G) = 0$ и $H^1(\pi, p(k[G]/G)) = 0$ для всех подгрупп π группы Π. Поскольку для нечетных q модули $\hat{T}_q$ проективны, то $H^1(\pi, p(T_q)) = 0$ для четных q. Из п.7.4 следует тогда, что расширения L_q/k цикличны для четных q, а торы T_q являются k-рациональными для $q = 2^m$. Имеем

$$k[G]/G \cong \prod_{(q,2)=1} T_q^{n(q)} \times \mathbf{A}^t$$

в случае стабильно рационального поля (k, G). Пусть

$$T = \prod_{(q,2)=1} T_q^{n(q)}.$$

Торы T_q и $R_{L_q/k}(G_m)$ изогенны. Пусть

$$S = \prod_{(q,2)=1} R_{L_q/k}(G_m)^{n(q)}$$

квазиразложимый тор. Из условий

$$\sum_{(q,2)=1} n(q)p(\bar{T}_q) = \sum_{(q,2)=1} n(q)p(\mathbf{Z}[\Pi_q]) = 0$$

цикличности групп Π_q, проективности $\bar{T}_q$ и теоремы 3 п.5.3 следует, что торы T и S бирационально эквивалентны над k.

Теорема I. Следующие условия эквивалентны:

1) поле $(k,\ G)$ рационально над полем k;

2) поле $(k,\ G)$ стабильно рационально над k;

3) $p(k[G]/G) = 0$. $\triangle$

Пример 2. Поле $(\mathbf{Q},\ n)$ рационально над $\mathbf{Q}$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) число n не делится на 8;

2) для всякого $q|n,\ q = p^m,\ p > 2$, кольцо $\mathbf{Z}[\zeta_{\varphi(q)}]$ содержит главный идеал индекса p.

Достаточность этих условий следует из предыдущих пунктов. Проиллюстрируем на этом примере доказательство необходимости. Пусть $n = 2^m p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$ - каноническое разложение числа n. Из рациональности поля $(\mathbf{Q}, n)$ следует, что $m \leq 2$, а из условия

$$\sum_{i=1}^{s} p(\hat{T}_{q_i}) = 0, \quad q_i = p^{m_i}$$

следует, что $p(\hat{T}_{q_i}) = 0, \quad 1 \leq i \leq s$. Осталось обратиться к п.7.3.

Большинство изложенных здесь утверждений верно для любого поля, по крайней мере, если характеристика поля констант не делит порядка группы. Подробности имеются в работе Ленстра [1].

Пример 3. Отметим еще один любопытный факт. Пусть G – абелева группа нечетного порядка. Тогда существует натуральное число h такое, что поле (k, G^h) является рациональным над k, где G^h означает прямую степень. Достаточно проверить этот факт для циклической p-группы G. Модуль $\hat{T}_q$ будет проективным, поэтому существует число h такое, что прямая сумма $h\hat{T}_q$ является свободным Π-модулем, где Π – группа разложения тора T. Поэтому тор T^h является k-рациональным, а вместе с ним и поле (k, G^h).

Что касается полей инвариантов нерегулярных представлений группы G, то результаты здесь более скромные. Пусть V – точный $k[G]$-модуль абелевой группы G. Так как каждый неприводимый $k[G]$-модуль изоморфен идеалу кольца $k[G]$, то существует точный подмодуль V_0 модуля V, изоморфный подмодулю модуля $k[G]$. Тогда имеем бирациональные k-изоморфизмы

$$V/G \ \cong \ V_0/G \times_k \mathbf{A}^{\mathbf{r}},\ k[G]/G \ \cong \ V_0/G \times_k \mathbf{A}^{\mathbf{s}}.$$

Мы видим, что многообразия V/G и $k[G]/G$ стабильно эквивалентны над полем k. Сверх того

Теорема 2. Поле инвариантов $k(V)^G$ стабильно рационально над k тогда и только тогда, когда поле (k,G) является k-рациональным. Далее, если $\dim V \geq |G|$, то из стабильной рациональности поля $k(V)^G$ следует его рациональность. $\triangle$

7.6. Инварианты конечных групп над замкнутым полем. В данном случае предыдущая теория инвариантов конечных абелевых групп, действующих на линейном пространстве, становится тривиальной: поле $k(V)^G$ чисто трансцендентно над k для любой конечной абелевой группы $G \subset \mathrm{GL}(V)$ и замкнутого поля k. Ограничимся алгебраически замкнутым полем k характеристики нуль. Сначала несколько соображений общего характера. Пусть X – неприводимое алгебраическое многообразие над полем k, $F = k(X)$ – поле рациональных функций на X. Если X – гладкое проективное, то группа $\mathrm{Br}\, X = H^2_{\acute{e}t}(X, \mathrm{G}_m)$ является бирациональным инвариантом и она допускает чисто алгебраическое описание в качестве подгруппы $\mathrm{Br}_{nr}(F)$ группы $\mathrm{Br}\, F$, см. п. 2.1. Имеем

$$\mathrm{Br}_{nr}(F) = \cap_v \mathrm{Br}\, A_v = \mathrm{Ker}\,[\mathrm{Br}\, F \to \oplus_v H^1(A_v/m_v, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}],$$

где A_v – кольцо дискретного нормирования v ранга 1 поля F, m_v – максимальный идеал в A_v. В работах Богомолова [2] и Солтмана [1] разработаны методы, позволившие в ряде случаев вычислить группы $\mathrm{Br}_{nr}(F)$, что дало примеры нерациональных полей инвариантов линейных групп над полем k. В обзоре [4] Кольо-Телен и Сансюк изложили свое видение проблемы, кстати, весьма четкое и прозрачное. Проследим за ходом рассуждений первопроходцев. Во-первых, если $L = k(Y)$ и F подполе в L , то естественное отображение $\mathrm{Br}\, F \to \mathrm{Br}\, L$ индуцирует гомоморфизм $\mathrm{Br}_{nr}(F) \to \mathrm{Br}_{nr}(L)$. Пусть теперь G – конечная группа k-автоморфизмов поля L, H – ее подгруппа, тогда имеем вложение $L^G \subset L^H$. Следующее утверждение является ключевым

Теорема. Пусть $L = k(Y)$ – функциональное поле, тогда

$$\mathrm{Br}_{nr}(L^G) = \{\alpha \in \mathrm{Br}\,(L^G) \mid \alpha_B \in \mathrm{Br}_{nr}(L^B) \ \ \forall B \in BI\}, \tag{1}$$

где BI – множество всех абелевых бициклических подгрупп группы G, т.е. абелевых подгрупп, имеющих не более, чем две образующие, α_B – образ элемента α при отображении $\mathrm{Br}\, L^G \to \mathrm{Br}\, L^B$.

Соображения при выводе соотношения (1) следующие. Пусть $F = L^G$, тогда L есть расширение Галуа поля F с группой G. Возьмем $\alpha \in \mathrm{Br}\,(F)$ и пусть существует нормирование v такое, что $\alpha \notin \mathrm{Br}\, A_v$. Чтобы доказать (1), необходимо построить группу $B \in BI$ такую, что $\alpha_B \notin \mathrm{Br}_{nr}(L^B)$. Пусть w – дискретное нормирование поля L, продолжающее v, A_w – соответствующее кольцо нормирования, A_w получается локализацией целого замыкания $\tilde{A}_v$ кольца A_v в L. Имеем группу разложения D, группу инерции I, $I \subset D \subset G$, группа I есть нормальный делитель в G. Поскольку поле констант алгебраически замкнуто характеристики нуль, то группа I является циклической, а действие группы D сопряжениями на I является тривиальным, т.е. группа I лежит в центре группы D. Если $\alpha \notin \mathrm{Br}_{nr}(L^I)$, то все доказано. Если же $\alpha \in \mathrm{Br}_{nr}(L^I)$, то, ввиду того, что $\alpha \notin \mathrm{Br}\,(A_v)$, можно выбрать элемент $g \in D$ таким образом, что $\alpha_B \notin \mathrm{Br}_{nr}(L^B)$, где $B =< g, I >$ – абелева подгруппа в G, порожденная двумя элементами. $\triangle$

7.7. Инварианты конечных линейных групп. Пусть теперь $G \subset \mathrm{GL}(V)$ – конечная группа линейных преобразований векторного пространства V конечной

размерности. В этом случае поле L^A чисто трансцендентно над k для любой абелевой подгруппы $A \subset G$, $L = k(V)$. Формула (1) п.7.6 принимает вид

$$\mathrm{Br}_{nr}(k(V)^G) = \mathrm{Ker}\,[\mathrm{Br}\,(k(V)^G) \to \prod_B \mathrm{Br}\,(k(V)^B)], \tag{1}$$

где B пробегает BI. Преобразуем ее к виду, удобному для вычислений. Пусть H – произвольная подгруппа в G , имеем цепочку вложений $L^H \subset L \subset \bar{L}$, причем расширение L/L^H – нормально. Из формулы Хохшильда-Серра имеем точную последовательность

$$0 \to H^2(H, (k(V)^*)^H) \to \mathrm{Br}\,(k(V)^H) \to \mathrm{Br}\,(k(V)).$$

Формула (1) принимает вид

$$\mathrm{Br}_{nr}(k(V)^G) = \mathrm{Ker}\,[H^2(G, k(V)^*) \to \prod_B H^2(B, k(V)^*)].$$

Далее, имеем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H^2(G,k^*) & \to & H^2(G,k(V)^*) & \to & H^2(G,\mathrm{Div}\,(V)) \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \to & \prod_B H^2(B,k^*) & \to & \prod_B H^2(B,k(V)^*) & \to & \prod_B H^2(G,\mathrm{Div}\,(V)). \end{array}$$

Модуль $\mathrm{Div}\,(V)$ является пермутационным и отображение w есть мономорфизм, поскольку

$$\mathrm{Ker}\,[H^2(G,M) \to \prod_{g\in G} H^2(< g >, M)] = 0, \quad M = \mathbf{Z}[G/H].$$

Таким образом, $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(v)$. Пусть $\mu(k)$ – группа всех корней из единицы в поле k, $\mu(k) \cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, фактор-группа $k^*/\mu(k)$ когомологически тривиальна, поэтому

$$H^2(G,k^*) = H^2(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = H^3(G,\mathbf{Z}).$$

Формула (1) принимает достаточно удобный вид

$$\mathrm{Br}_{nr}(k(V)^G) = \mathrm{Ker}\,[H^2(G,k^*) \to \prod_B H^2(B,k^*)] =$$

$$= \mathrm{Ker}\,[H^2(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \prod_B H^2(B,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})] = \mathrm{Ker}\,[H^3(G,\mathbf{Z}) \to \prod_B H^3(B,\mathbf{Z})]. \tag{2}$$

Сверх того $\mathrm{Br}_{nr}(\mathbf{C}(V)^G) = H^3(X,\mathbf{Z})_{tors}$, где X - гладкая проективная модель поля $\mathbf{C}(V)^G$, см. п.2.3. Как и следовало ожидать, формула (2) показывает, что инвариант $\mathrm{Br}_{nr}(k(V)^G)$ зависит только от группы G, но не от выбора точного представления V этой группы. Для краткости обозначим группу $\mathrm{Br}_{nr}(k(V)^G)$ через B_G . Богомолов предложил следующую элегантную конструкцию, позволяющую строить примеры нерациональных полей инвариантов. Он рассматривает центральное расширение

$$1 \to C \to G \xrightarrow{\varphi} A \to 1 \tag{3}$$

конечной абелевой группы A, причем C есть коммутант $[G,G]$ группы G. Заметим, что $H_2(A,\mathbf{Z}) = \Lambda^2(A)$, где $\Lambda_2(A)$ – вторая внешняя степень группы A. Формула универсальных коэффициентов определяет тогда точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Ext}\,(A,M) \to H^2(A,M) \xrightarrow{\Theta} \mathrm{Hom}\,(\Lambda^2(A),M) \to 0 \tag{4}$$

для любого A-модуля M. В частности, имеем изоморфизм

$$H^2(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}\,(\Lambda^2(A), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

и эпиморфизм

$$H^2(A, C) \to \mathrm{Hom}\,(\Lambda^2(A), C).$$

Пусть $[G]$ – элемент из $H^2(A, C)$, соответствующий расширению (3); $\lambda = \Theta([G])$ есть эпиморфизм $\Lambda^2(A) \to C$, определяемый по правилу $\lambda(a_1 \wedge a_2) = [g_1, g_2] \in [G, G] = C$, где g_i – элементы из группы G такие, что $\varphi(g_i) = a_i,\ i = 1, 2$. Пусть $S = \mathrm{Ker}\,(\lambda)$. Имеем точную последовательность абелевых групп

$$0 \ \to S \to \Lambda^2(A) \to C \to \ 0$$

и дуальную последовательность характеров

$$0 \ \to C^* \to \Lambda^2(A)^* \to S^* \to \ 0. \tag{5}$$

В ситуации (3) имеем спектральную последовательность

$$H^p(A, H^q(C, M)) \Longrightarrow H^n(G, M) \tag{6}$$

для G-модуля M. Последовательность (6) позволяет написать длинную точную последовательность Хохшильда-Серра с тривиальным модулем $M = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$

$$0 \ \to H^1(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \stackrel{res}{\to} H^1(C, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^2(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to$$

$$\to \mathrm{Ker}\,[H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^2(C, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})] \to H^1(A, C^*),$$

которая по условию (3) значительно сокращается

$$0 \ \to C^* \to H^2(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathrm{Ker}\,[H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^2(C, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})] \to H^1(A, C^*). \tag{7}$$

Сравнивая соотношения (5) и (7), видим, что

$$S^* = Im[H^2(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})].$$

Так как C – абелева группа, то группа B_G лежит в ядре отображения $H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^2(C, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Сверх того, образ группы B_G в $H^1(A, C^*)$ равен нулю. Для этого достаточно показать, что B_G отображается в нуль в группе $H^1(A', C^*)$ для всякой циклической подгруппы A' группы A. Пусть G' – подгруппа в G, являющаяся расширением группы A' посредством группы C. Поскольку G' – абелева, то $B_{G'} = 0$. Образ группы B_G в $H^1(A', C^*)$ равен образу группы $B_{G'}$, поэтому

$$B_G \subset Im[H^2(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})] = S^*.$$

Пусть B – абелева бициклическая подгруппа группы G, g_1, g_2 –образующие группы B, S_B – подгруппа в группе S, порожденная элементом $a_1 \wedge a_2$, $a_i = \varphi(g_i)$. Обозначим символом S_b подгруппу в S, порожденную всеми подгруппами S_B, $B \in BI$. Элементы группы B_G аннулируют подгруппу S_b, сверх того,

$$B_G = \mathrm{Ker}\,[S^* \to S_b^*] = (S/S_b)^*.$$

Группы G с условием $B_G \neq 0$ можно теперь строить следующим образом. Рассмотрим конечную абелеву группу A и подгруппу S в $\Lambda^2(A)$ такую, чтобы $S_b \neq S$.

Пусть $\lambda : \Lambda^2(A) \to \Lambda^2(A)/S$ естественная проекция, которая определяет по формуле (4) центральное расширение

$$1 \to C \to G \to A \to 1$$

с ядром $C = \Lambda^2(A)/S = [G, G]$ и группой $B_G = S/S_b$.

Пример. Наиболее естественно изучить эту ситуацию сначала для векторных групп A над конечным полем $\mathbf{F}_p$. Простейший нетривиальный пример доставляет группа $A = \mathbf{F}_p^4$. Имеем $\Lambda^2(A) \cong \mathbf{F}_p^6$. Разложимые 2-векторы в $\Lambda^2(A)$ образуют конус V над четырехмерной квадрикой Плюккера Q в $P(\Lambda^2(A)) = \mathbf{P}^5(\mathbf{F}_p)$, задаваемой уравнением

$$q = z^{12}z^{34} - z^{13}z^{24} + z^{14}z^{23} = 0,\ u = \sum_{i<j} z^{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2(A),\ 1 \le i, j \le 4.$$

Необходимо выбрать собственное линейное подпространство S в $\Lambda^2(A)$ таким образом, чтобы $S \neq S_b$, где S_b порождено пересечением $S \cap V$. Условие $S \neq S_b$ эквивалентно тому, что проективизация $P(S)$ не порождается своим пересечением $P(S) \cap Q$. Решая эту алгебро-геометрическую задачу над конечным полем, Богомолов перечисляет все возможные случаи. Их пять:

1) $P(S)$ - точка, не лежащая на Q. В этом случае $\dim S = 1$, $S_b = 0$, $B_G = \mathbf{F}_p$, $|G| = p^9$;

2) $P(S)$ - прямая, касательная к Q в точке пересечения $P(S) \cap Q$, $\dim S = 2$, $\dim S_b = 1$, $B_G = \mathbf{F}_p$, $|G| = p^8$;

3) $P(S)$ - плоскость, пересекающая Q по двойной прямой,

$$B_G = \mathbf{F}_p,\ |G| = p^7;$$

4) $P(S)$ - прямая, не пересекающая Q, $B_G = \mathbf{F}_p^2$, $|G| = p^8$;

5) $P(S)$ - плоскость, пересекающая Q в одной точке, в которой она касается Q, $B_G = \mathbf{F}_p^2$, $|G| = p^7$.

Богомолов показывает также, что минимальный возможный порядок p-группы G с условием $B_G \neq 0$ равен p^6.

7.8. Инварианты конечных групп,действующих на торах. Конечные группы G, точно действующие на линейном k-пространстве V, являются простейшими примерами подгрупп в группе Кремоны $Cr(n, k)$ – группы k-бирациональных преобразований аффинного пространства $\mathbf{A}_k^n$ или группы всех k-автоморфизмов поля рациональныхх функций от n независимых переменных $k(x_1, .., x_n)$. Другую естественную серию конечных подгрупп в группе $Cr(n, k)$ доставляют конечные подгруппы группы автоморфизмов тора $\mathbf{G}_m^n$. Пусть $M = X(\mathbf{G}_m^n)$ - группа рациональных характеров тора $\mathbf{G}_m^n$. Как мы видели

$$\mathrm{Aut}_{gr}(\mathbf{G}_m^n) \cong \mathrm{Aut}(M) = \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}^n) \cong GL(n, \mathbf{Z}).$$

Если $x_1, .., x_n$ – образующие группы M, то $\mathrm{G}_{m,k}^n = \mathrm{Spec}\, k[M]$, где $k[M] = k[x_1, .., x_n, x_1^{-1}, .., x_n^{-1}]$ – групповое кольцо. Обозначим через $k(M)$ поле рациональных функций на $\mathrm{G}_{m,k}^n$, $k(M) = k(x_1, .., x_n)$ – поле частных кольца $k[M]$. Элементы группы $\mathrm{Aut}(\mathrm{G}_m^n)$, которые можно отождествить с целочисленными матрицами, действуют на образующих x_i мультипликативно

$$\sigma(x_j) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ij}},\quad A = (a_{ij}) -$$

матрица оператора σ. Поле инвариантов конечной группы $G \subset \mathrm{Aut}\,(\mathrm{G}\,{}^{n}_{m})$ есть поле рациональных функций на категорном факторе $\mathrm{G}\,{}^{n}_{m,k}/G$. Пусть A - бициклическая подгруппа в G. В работах Берже [1] и Солтмана [3] показано, что $\mathrm{Br}_{nr}(k(M)^A) = 0$, поэтому можно использовать те же рассуждения, что и в линейном случае. Поскольку $\mathrm{Pic}\,\mathbf{G}_m^n = 0$, то имеем точную последовательность G-модулей

$$1 \to k[M]^* \to k(M)^* \to \mathrm{Div}\,(\mathbf{G}_m^n) \to 0,$$

$k[M]^* \cong k^* \oplus M$, $\mathrm{Div}\,(\mathbf{G}_m^n)$ - пермутационный G-модуль. Как и в п.7.7, получаем соотношение

$$\mathrm{Br}_{nr}(k(M)^G) = \mathrm{Ker}\,[H^2(G, k^* \oplus M) \to \prod_{A \in BI} H^2(A, k^* \oplus M)]. \qquad (1)$$

Остановимся на соотношении $\mathrm{Br}_{nr}(k(M)^A) = 0$ для бициклической группы A, важнейшем для получения равенства (1). Совершенно прозрачное объяснение этому явлению предложено в работе Берже[1], где обнаружено ключевое соотношение в двумерных гомологиях, характерное для бициклических групп. Пусть Γ - произвольная группа, $f : \mathbf{Z}^2 \to \Gamma$ гомоморфизм групп, имеем гомоморфизм $f_* : H_2(\mathbf{Z}^2, \mathbf{Z}) \to H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$. Заметим, что $H_2(\mathbf{Z}^2, \mathbf{Z}) = \Lambda^2(\mathbf{Z}^2) = \mathbf{Z}$. Элементы группы $H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$, лежащие в $Im(f_*)$, называются торическими классами. Бициклические группы обладают важным свойством, а именно, если Γ - полупрямое произведение бициклической группы B и конечного коммутативного нормального делителя F, то группа $H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$ порождена торическими классами, по-другому, естественный гомоморфизм

$$\bigoplus_{A \in BI} H_2(A, \mathbf{Z}) \to H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$$

является эпиморфизмом. По двойственности, тогда гомоморфизм

$$H^2(\Gamma, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \bigoplus_{A \in BI} H^2(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \qquad (2)$$

является инъективным. Пусть теперь решетка M является B-модулем, где B - бициклическая конечная группа. Предположим, сначала, что существует пермутационный B-модуль S, содержащий M в качестве подмодуля конечного индекса. Имеем точную последовательность B-модулей

$$0 \to M \to S \to F \to 0.$$

Переходя к диагональным группам, получаем дуальную последовательность

$$1 \to D_k(F) \to D_k(S) \to D_k(M) \to 1,$$

причем группа B действует на этих схемах k-автоморфизмами. В §6 мы встречались с такой конструкцией. Выбор пермутационного базиса в группе характеров S тора $D_k(S)$ определяет представление группы $D_k(S)$, а следовательно, и $D_k(F)$ линейными операторами в пространстве V, $dim V = dim D_k(S)$, откуда

$$k(D_k(M)) = k(M) = k(V)^{\bar{F}},$$

где $\bar{F} = D_k(F)$ - конечная абелева группа. Группа B действует линейно на k-пространстве V перестановками базиса характеров из S, оставляя на месте единицу группы $D_k(S)$; группа $\bar{F}$ действует сдвигами на $D_k(S)$; группа Γ, порожденная

группами B и $\bar{F}$ в $\mathrm{GL}(V)$, является полупрямым произведением $B \cdot \bar{F}$, причем $\bar{F}$ - нормальный делитель в Γ. Ясно, что $k(V)^{\Gamma} = k(M)^{B}$. Таким образом,

$$\mathrm{Br}_{nr}(k(M)^{B}) = \mathrm{Br}_{nr}(k(V)^{\Gamma}) = \mathrm{Ker}\,[H^2(\Gamma, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \prod_{A \in BI} H^2(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})] = 0$$

по соотношению (2). Переходя к общему случаю, рассмотрим сначала вялую резольвенту B-модуля M

$$0 \to M \to S \to N \to 0,$$

из которой следует, что $N \oplus N$ можно рассматривать как подмодуль конечного индекса пермутационного B-модуля S. По предыдущему тогда $\mathrm{Br}_{nr}(k(M \oplus N)^{B}) = 0$. Поскольку $\mathrm{Br}_{nr}(k(M)) = 0$, то группу $\mathrm{Br}_{nr}(k(M)^{B})$ можно рассматривать как подгруппу в группе $H^2(B, k(M)^*)$. Осталось показать, что отображение $H^2(B, k(M)^*) \to H^2(B, k(M \oplus N)^*)$, индуцированное вложением B-модулей $f : k(M) \to k(M \oplus N)$, является инъективным. Заметим, что $(k(M)[N])^* = k(M)^* \oplus N$. Вложение f можно разложить в цепочку вложений

$$k(M)^* \xrightarrow{f_1} k(M)^* \oplus N \xrightarrow{f_2} k(M \oplus N)^*.$$

Гомоморфизм f_1 имеет B-сечение, поэтому гомоморфизм

$$H^2(B, k(M)^*) \to H^2(B, (k(M)[N])^*)$$

инъективен. Далее, $k(M)[N]$ есть координатное кольцо тора $D_{k(M)}(N)$, причем $\mathrm{Pic}\,(D_{k(M)}(N)) = 0$. B-модуль $\mathrm{Div}\,(D_{k(M)}(N))$ является пермутационным, поэтому группа $H^2(B, k(M)[N]^*)$ отображается инъективно в $H^2(B, k(M \oplus N)^*)$. Итак, для любой B-решетки M, где B-бициклическая конечная группа,

$$Br_{nr}(k(M)^{B}) = 0.$$

Следующий пример показывает, что расширить класс групп B нельзя.

Пример 1. Пусть G - группа порядка $q = p^n$, $n \geq 3$, которая не является бициклической. Пусть M - точный G-модуль (решетка) с элементом $\alpha \in H^2(G, M)$ порядка q. Если A - бициклическая подгруппа в G, то $A \neq G$ и, следовательно, элемент $p^{n-1}\alpha \neq 0$ становится нулевым при ограничении на A. По формуле (1) тогда $p^{n-1}\alpha \in \mathrm{Br}_{nr}(k(M)^{G})$, значит, $\mathrm{Br}_{nr}(k(M)^{G}) \neq 0$.

Следующий пример показывает, что точный G-модуль M с условием $H^2(G, M) = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ всегда существует, $m = |G|$.

Пример 2. Пусть G - произвольная конечная группа порядка m. Рассмотрим стандартные последовательности п.4.8

$$0 \to I_G \to \mathbf{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

$$0 \to M \to \mathbf{Z}[G \times G] \to I_G \to 0.$$

Модуль M является точным G-модулем и $H^2(G, M) = \bar{H}^0(G, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Фактически уже доказан следующий критерий Берже [1].

Теорема. Пусть G - конечная группа, тогда следующие условия эквивалентны:

1) для всякой G-решетки M группа $\mathrm{Br}_{nr}(k(M)^{G})$ равна нулю;

2) всякая силовская подгруппа группы G является бициклической. $\triangle$

Минимальный пример нерационального поля инвариантов дает группа $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$. $\triangle$

7.9. Инварианты связных алгебраических групп. Если $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ - представление связной алгебраической группы линейными операторами над алгебраически замкнутым полем k, то вопрос о рациональности поля инвариантов $k(V)^G$ до сих пор остается открытым. Будем считать, что характеристика поля k равна нулю. Известно, что поле $k(V)^G$ рационально, если G - связная разрешимая алгебраическая группа, Винберг [1]. Для связных редуктивных групп G проблема рациональности поля $k(V)^G$ была сдвинута с места после долгого перерыва работами Кацыло [1] и Богомолова - Кацыло [1]. Весьма важную роль в исследовании полей инвариантов играет редукционная теорема, аналогичная соотношению (1) в п.7.1. Чтобы ее сформулировать, напомним, что представление φ называется *почти свободным* (п.с.), если стабилизатор действия группы G на V тривиален в общих точках пространства V, связность группы G в этом определении несущественна. Для конечной группы G понятие почти свободного действия эквивалентно точности представления φ.

Теорема 1. Пусть алгебраическая группа G линейно действует на векторном пространстве V. Если пространство V может быть разложено в прямую сумму инвариантных подпространств V_1 и V_2 таким образом, что действие группы G на V_1 почти свободно, то $k(V)^G = k(V_1)^G(V_2)$. $\triangle$

Эта теорема использовалась в различных работах. Она показывает, что, если V_G и W_G – два п.с. представления группы G, то поля $k(V)^G$ и $k(W)^G$ стабильно эквивалентны. Применение группы Брауэра к исследованию полей $k(V)^G$ приводит к следующему факту,установленному Богомоловым [2].

Теорема 2. Пусть G –связная алгебраическая группа и V – п.с. линейное представление группы G. Тогда $\mathrm{Br}_{nr}(k(V)^G) = 0$. $\triangle$

Более тщательное исследование приводит к следующей теореме.

Теорема 3. Пусть G –связная односвязная алгебраическая группа, не содержащая E_8 в качестве фактор-группы, V – п.с. линейное представление группы G. Тогда поле $k(V)^G$ стабильно рационально. $\triangle$

Кроме того, поле $k(V)^G$ стабильно рационально для п.с. представлений неодносвязных групп G вида $O(n)$ или $SO(n)$.

Рассмотрим теперь более подробно классическую задачу о приведении пары матриц к простейшему виду, к решению которой весьма успешно была привлечена техника алгебраических торов.

Пример. Проблема рациональности поля матричных инвариантов. Пусть $M(n) = M(n, \mathbf{C})$ – кольцо квадратных матриц порядка n с комплексными коэффициентами, $V_{m,n} = M(n) \oplus .. \oplus M(n)$ – прямая сумма m копий пространств $M(n)$, на которой покомпонентно действует группа $\mathbf{G}L(n, \mathbf{C})$ сопряжениями

$$(X_1, .., X_m) \to (gX_1g^{-1}, .., gX_mg^{-1}),$$

$X_i \in M(n)$, $g \in GL_n$, $m \geq 2$, $n \geq 2$. Обозначим через $V_{m,n}/\mathbf{G}L_n$ – категорный фактор относительно этого действия, а через $K_{m,n}$ – поле рациональных функций на многообразии $V_{m,n}/GL_n$, т.е., поле инвариантов $\mathbf{C}(V_{m,n})^{\mathrm{GL}_n}$. Ядром эффективности действия группы GL_n служит подгруппа $\mathbf{G}_m$, поэтому действие группы $PGL_n = GL_n/G_m$ на $V_{m,n}$ является точным. Сверх того, действие группы PGL_n на $V_{2,n}$ почти свободно, поэтому многообразие $V_{m,n}/GL_n$ бирационально эквивалентно прямому произведению $V_{2,n}/GL_n \times M(n)^{m-2}$. Таким образом, поле $K_{m,n}$ есть чисто трансцендентное расширение поля $K_{2,n}$. Если поле $K_{m,n}$ чисто трансцендентно, то это позволяет найти нормальную форму для набора m матриц порядка n общего положения относительно одновременного сопряжения. Вопрос о рациональности поля

$K_{2,n}$ поставлен давно. Ответ на него интересует математиков по разному поводу. Во-первых, это вопрос о подобии пары матриц. Поле $K_{2,n}$ порождено всеми матричными инвариантами вида $tr(X^aY^b),\ a,\ b \geq 0$, где X и Y – матрицы порядка n общего вида. Еще Сильвестр показал, что $K_{2,2} = \mathbf{C}(trX,\ trY,\ tr(X^2),\ tr(Y^2),\ tr(XY))$. Рациональность полей $K_{2,3}$ и $K_{2,4}$ (а, следовательно, $K_{m,3}$ и $K_{m,4}$) доказал Форманек [1,2]. Других рациональных полей вида $K_{2,n}$ пока не найдено, хотя, как мы увидим дальше, стабильная рациональность полей $K_{2,n}$ установлена сейчас для всех n, делящих 420.

Далее в работе Халека [1] показано, что поле $K_{2,n}$ изоморфно полю рациональных функций пространства модулей стабильных векторных расслоений $\mathbf{P}^2$ ранга n с классами Чженя $c_1 = 0,\ c_2 = n$. В-третьих, в работе Ван дер Берга [1] установлено, что поле $K_{2,n}$ есть поле функций общего якобиевого многообразия гладких плоских кривых степени n.

Развивая идею Прочези [1], Форманек показал, что поле $K_{2,n}$ можно реализовать как поле рациональных функций на явно описываемом алгебраическом торе. Для этого берется чисто трансцендентное расширение $L_n = \mathbf{C}(x_{ij}, y_{ij})$ поля $\mathbf{C}$, порождаемое независимыми элементами x_{ij}, y_{ij} матриц $X,\ Y,\ 1 \leq i,j \leq n$. В матричной алгебре $M(n, L_n)$ рассматривается подалгебра, порожденная над $\mathbf{C}$ общими матрицами X и Y. Эта подалгебра является некоммутативной областью целостности, пусть D_n ее кольцо частных; известно, что D_n есть алгебра с делением размерности n^2 над своим центром Z_n. В работе Форманека [1] показано, что Z_n в точности совпадает с $K_{2,n}$. Далее, поле Z_n допускает следующее описание. Пусть S_n – симметрическая группа, действующая перестановками на базисе $e_1, .., e_n$, $U_n = \mathbf{Z}e_1 + .. + \mathbf{Z}e_n$ – соответствующий пермутационый S_n-модуль. Имеем точную последовательность S_n-модулей

$$0\ \to V_n \to U_n \otimes U_n \xrightarrow{\varphi} U_n \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to\ 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon(u_i) = 1,\ \varphi(u_i \otimes u_j) = u_i - u_j$. С подобными последовательностями мы встречались в п.4.8. Пусть $\mathbf{C}[M]$ – групповое кольцо свободной абелевой группы M, $\mathbf{C}(M)$ – его поле частных. Поле $K_{2,n}$ изоморфно полю инвариантов $\mathbf{C}(U_n \oplus V_n)^{S_n}$. Заметим, что в V_n есть подмодуль $\mathbf{C}u_1 \otimes u_1 + .. + \mathbf{C}u_n \otimes u_n$, изоморфный U_n, причем $V_n \cong U_n \oplus W_n$. Таким образом,

$$K_{2,n} = \mathbf{C}(U_n \oplus U_n \oplus W_n)^{S_n},\ W_n = \mathrm{Ker}\Big[\bigoplus_{i \neq j} \mathbf{C}u_i \otimes u_j \to U_n\Big].$$

Пусть $F_n = \mathbf{C}(U_n)$, $K_{2,n} = F_n(U_n \oplus W_n)^{S_n}$, причем S_n действует точно автоморфизмами на поле F_n. Мы видим, что $K_{2,n}$ есть поле рациональных функций на P_n-торе T_n, где $P_n = F_n^{S_n}$, а модуль характеров $\hat{T}_n$ изоморфен модулю $U_n \oplus W_n$. Более того, $T_n \cong R_{A_n/P_n}(\mathbf{G}_m) \times_{P_n} T_{n,n}$, где $T_{n,n}$ есть P_n-тор с модулем характеров W_n, $A_n = F_n^{S_{n-1}}$. Поле P_n есть поле симметрических функций от переменных $x_1, .., x_n$, $x_i = e^{u_i}$, следовательно, P_n является чисто трансцендентным расширением поля $\mathbf{C}$ размерности n. Таким образом, рациональность поля $K_{2,n}$ следует из рациональности тора $T_{n,n}$ над P_n. Если $n = 2$, то $\dim T_{2,2} = 1$ и, следовательно, $K_{2,2}$ – чисто трансцендентно над $\mathbf{C}$. Точная последовательность (1) позволяет вычислить бирациональный инвариант $H^1(S_{n,p}(T_{n,n}))$. Он оказался нулевым. Из этого факта, как показали Кольо-Телен и Сансюк [2], следует, что $\mathrm{Br}_{nr}(K_{2,n}) = 0$. Сейчас мы получаем этот результат из теоремы Богомолова. Если $n = 3$, то можно воспользоваться теоремой Б.Кунявского [3], который показал, что все торы с группой разложения S_3 являются рациональными над полем определения. Итак, поле $K_{2,3}$

чисто трансцендентно над $\mathbf{C}$. Однако, нетрудно проверить, что тор $T_{4,4}$ не рационален над P_4, тем не менее поле $K_{2,4}$ чисто трансцендентно над $\mathbf{C}$. Это удалось доказать следующим приемом. Поле F_n есть поле разложения P_n-тора $T_{n,n}$. Предположим, что нам удалось найти в категории P_n-торов, разложимых над F_n, тор H_n стабильно эквивалентный тору $T_{n,n}$, со свойствами:

1) S_n-модуль характеров $\hat{H}_n$ является точным модулем;
2) поле инвариантов $\mathbf{C}(\hat{H}_n)^{S_n}$ является стабильно рациональным над $\mathbf{C}$.

Тогда поле $K_{2,n} = \mathbf{C}(U_n \oplus U_n \oplus W_n)^{S_n}$ стабильно эквивалентно полю

$$\mathbf{C}(\hat{H}_n)(U_n \oplus U_n)^{S_n} = k(R_{B/k}(\mathbf{G}_m) \times R_{B/k}(\mathbf{G}_m)) = k(\mathbf{A}^{2n}),$$

$$k = L^{S_n},\ L = \mathbf{C}(\hat{H}_n),\ B = L^{S_n - 1}.$$

Поскольку поле k стабильно рационально по условию, то при таком подборе тора H_n поле $K_{2,n}$ является стабильно рациональным. Рассмотрим часть последовательности (1)

$$0 \ \to I_n \to U_n \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to \ 0.$$

Группу I_1 можно снабдить строением S_n-модуля, полагая $\sigma e = sgn(\sigma)e$. Имеем точную последовательность S_n-модулей

$$0 \ \to I_n \otimes I_n \to U_n \otimes I_1 \to I_1 \to \ 0.$$

Форманек показывает, что в качестве $\hat{H}_4$ можно взять модуль $(I_4 \otimes I_1)^*$ и доказывает рациональность поля $K_{2,4}$. Этот путь доказательства обстоятельно исследован в недавней работе Бессенрод и Ле Брюна [1]. Они показывают, что для S_n-модуля I_n^* поле инвариантов $\mathbf{C}(I_n^*)^{S_n}$ рационально над $\mathbf{C}$ и $p(I_n^*) = p(W_n)$ для $n = 5, 7$. Отсюда следует, что поля $K_{2,5}$ и $K_{2,7}$ стабильно рациональны над $\mathbf{C}$. В работе показано также, что для простых чисел $n > 7$, $p(I_n^*) \neq p(W_n)$, так что нужно искать другие объекты. В работе Шофильда [1] доказана следующая редукция: если поля $K_{2,a}$ и $K_{2,b}$ стабильно рациональны и $(a, b) = 1$, то поле $K_{2,ab}$ также стабильно рационально. Учитывая этот факт и результаты Форманека, Бессенрод и Ле Брюн доказывают стабильную рациональность полей $K_{2,n}$ для всех n, делящих 420. Заметим также, что в работе Кольо-Телена и Сансюка [3] доказано, что тор $T_{p,p}$ является прямым сомножителем рационального многообразия над полем P_p, p – простое.

§8. ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОЕКТИВНЫЕ МОДЕЛИ ДЕМАЗЮРА

Как мы видели, вопросы бирациональной классификации многообразий линейных алгебраических групп приводят к необходимости рассматривать гладкие проективные многообразия, содержащие данную группу в качестве открытого подмножества. Существование таких проективных моделей в характеристике нуль следует из теоремы Хиронаки о разрешении особенностей. Во многих случаях удается получить ценную информацию из самого факта существования такой гладкой модели, но более деликатные вопросы требуют если не явной конструкции модели, то хотя бы знания модуля Пикара ее. Для алгебраических торов имеется достаточно простая, можно сказать каноническая, конструкция полных моделей, предложенная Демазюром [1]. Несколько позже появилось обстоятельное исследование Кемпфа и др. [1], обобщающее результаты Демазюра. Поскольку нас интересуют более всего модели, определенные над незамкнутым полем, то основное внимание будет уделено торическим многообразиям с максимальными группами симметрий.

8.1. Конусы и вееры. Пусть T – алгебраический k-тор, $\hat{T}$ его группа рациональных характеров. Рассмотрим сначала абсолютный случай алгебраически замкнутого поля k. Группа $\hat{T}$ – свободная абелева ранга $n = \dim T$, пусть $\hat{T}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \otimes \hat{T}$ соответствующее линейное пространство с естественным вложением $\hat{T} \subset \hat{T}_{\mathbf{Q}}$. Конусом σ в $\hat{T}_{\mathbf{Q}}$ будем называть полиэдральный конус, порожденный конечной системой элементов $m_1, .., m_N$ из $\hat{T}$

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i | \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Если конус σ не содержит никаких подпространств из $\hat{T}_{\mathbf{Q}}$ кроме (0), то будем говорить, что конус σ имеет вершину. В данной теории есть жесткая необходимость иметь две реализации группы $\hat{T}$: аддитивную и мультипликативную. Мультипликативная запись необходима при построении подколец группового кольца $k[\hat{T}]$, аддитивная структура удобна в геометрических конструкциях. Группу $\hat{T}$ с аддитивной структурой будем часто называть решеткой. Пусть $m_1, .., m_n$ – базис решетки $\hat{T}$, $x_i = e^{m_i}$ – символы, порождающие мультипликативную группу $\hat{T}$. В этой записи мультипликативная группа $\hat{T}$ состоит из элементов x^m, причем $x^{m+m'} = x^m x^{m'}$. Обозначим через A_σ полугрупповую k-алгебру $k[\sigma \cap \hat{T}]$, которая состоит из многочленов Лорана $\sum a_m x^m$, где $a_m \in k$, $m \in \sigma \cap \hat{T}$ и почти все коэффициэнты a_m равны нулю. Заметим, что полугруппа $\sigma \cap \hat{T}$ имеет конечное число образующих, Данилов [1], Кемпф и др. [1]. Аффинным торическим многообразием называется схема $X_\sigma = \operatorname{Spec} A_\sigma$. Диагональное вложение $A_\sigma \to A_\sigma \otimes_k k[\hat{T}]$ определяет действие тора T на схеме X_σ. Удобно использовать и двойственные объекты. Пусть $\hat{T}^0 = \operatorname{Hom}(\hat{T}, \mathbf{Z})$ – двойственная решетка, а $\sigma^0 = \{r \in \hat{T}^0_{\mathbf{Q}} \mid r(m) \geq 0, \ \forall m \in \sigma\}$ – двойственный конус в пространстве $\hat{T}^0_{\mathbf{Q}}$. Схема X_σ гладкая тогда и только тогда, когда двойственный конус σ^0 порождается частью базиса решетки $\hat{T}^0$. Построение полного торического многообразия осуществляется склеиванием аффинных торических многообразий, порядок склеивания определяется некоторым набором конусов, называемых веером. В дальнейшем нам удобнее работать с веерами в пространстве $\hat{T}^0_{\mathbf{Q}}$.

Определение. *Веером* в пространстве $\hat{T}^0_{\mathbf{Q}}$ называется конечный набор Σ конусов, удовлетворяющих условиям:

а) все конусы из Σ обладают вершиной;

б) если τ грань конуса $\sigma \in \Sigma$, то $\tau \in \Sigma$;

в) для $\sigma, \ \sigma' \in \Sigma$ пересечение $\sigma \cap \sigma'$ является гранью как в σ, так и в σ'.

Пусть $\sigma \in \Sigma$, σ^0 – двойственный конус в пространстве $\hat{T}_{\mathbf{Q}}$. Символ X_σ теперь означает $\operatorname{Spec} k[\sigma^0 \cap \hat{T}]$. Заметим, что каждое X_σ содержит открытое подмножество, на котором тор T действует регулярно, $\dim X_\sigma = n$. Если τ грань конуса $\sigma \in \Sigma$, то имеем канонический морфизм $X_\tau \to X_\sigma$, являющийся открытым вложением. Склеивая аффинные куски X_σ относительно открытых вложений

$$X_{\sigma \cap \sigma'} \to X_\sigma, \ X_{\sigma \cap \sigma'} \to X_{\sigma'},$$

получаем нормальное алгебраическое многообразие X_Σ, определеное над k с квазирегулярным действием тора T на X_Σ. Веер называется полным, если $\cup \sigma = \hat{T}^0_{\mathbf{Q}}$, $\sigma \in \Sigma$. Это необходимое и достаточное условие полноты многообразия X_Σ. Гладкость многообразия X_Σ означает, что все конусы $\sigma \in \Sigma$ симплициальны и натянуты на части базиса решетки $\hat{T}^0$. Именно такие вееры и рассматривал Демазюр. В размерностях

больших двух полные торические многообразия могут и не быть проективными. Критерий проективности состоит в том, что веер Σ должен состоять из конусов, порожденных гранями выпуклого многогранника $D \subset \hat{T}^0_{\mathbf{Q}}$, содержащего O своей внутренней точкой. Веер Σ допускает еще одну интерпретацию на языке орбит тора T, действующего на X_Σ. Для открытого аффинного T-инвариантного подмножества $U \subset X_\Sigma$ обозначим через $\hat{T}(U)$ множество характеров, которые можно продолжить до регулярных функций на U, пусть $\sigma(U) = \{r \in \hat{T}^0_{\mathbf{Q}} \mid r(m) \geq 0 \ \ \forall m \ \in \hat{T}(U)\}$. Тогда $\sigma(U) \in \Sigma$. С другой стороны, каждое такое U содержит единственную замкнутую в U орбиту (орбиту наименьшей размерности). Это устанавливает взаимно однозначное соответствие $\sigma \to O_\sigma$ между конусами из Σ и орбитами O_σ тора T на X_Σ. При этом $\sigma \subset \tau \Leftrightarrow O_\tau \subset O_\sigma$ и $\dim \sigma = \operatorname{codim} O_\sigma$. Например, орбиты коразмерности один взаимно однозначно соответствуют одномерным конусам (лучам) из Σ. Каждый такой луч $\sigma \in \Sigma$ порожден единственным примитивным вектором $r \in \hat{T}^0$, пусть $|\Sigma|$ – совокупность этих примитивных векторов, $O_r, \ r \in |\Sigma|$ – соответствующая орбита коразмерности один, $D_r = \bar{O}_r$ ее замыкание в X_Σ. Пусть $X = X_\Sigma$ гладкое полное торическое многообразие. Вложение $T \subset X$ определяет точную последовательность решеток

$$0 \ \to \hat{T} \stackrel{\alpha}{\to} \hat{S} \to \operatorname{Pic} X_\Sigma \to \ 0, \tag{1}$$

где $\hat{S}$ – свободный $\mathbf{Z}$-модуль, порожденный простыми дивизорами из дополнения $X \setminus T$. Оказывается, дивизоры $D_r, \ r \in |\Sigma|$, образуют базис группы $\hat{S}$, так что ранг $\hat{S}$ равен порядку множества $|\Sigma|$. Отображение α определяется по правилу

$$\alpha(m) = \sum_r r(m) D_r, \ r \in |\Sigma|, \ m \in \hat{T}.$$

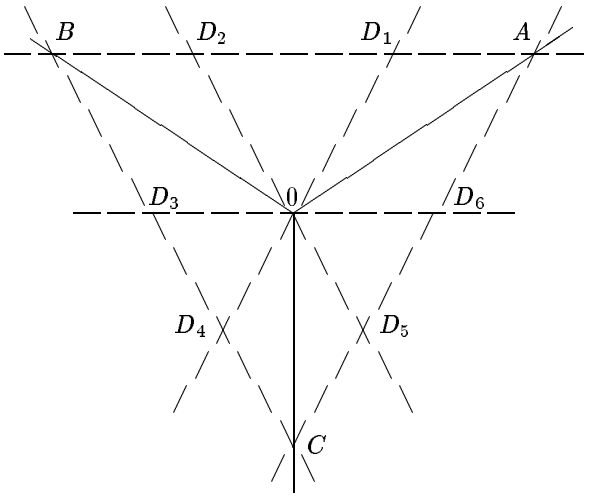
На этом языке критерий проективности полного гладкого торического многообразия X_Σ состоит в следующем. Дивизор $D = \sum n_r D_r, \ r \in |\Sigma|$ обилен тогда и только тогда, когда функция $f_D : \hat{T}^0_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{Q}$, линейная на всех конусах $\sigma \in \Sigma$ и принимающая на $r \in |\Sigma|$ значения $f_D(r) = -n_r$, является выпуклой: $f_D(x+y) \geq f_D(x) + f_D(y)$, причем равенство достигается лишь в случае, когда x и y лежат в одном конусе $\sigma \in \Sigma$. Для гладких торических многообразий обильность эквивалентна очень обильности. Если X_Σ – полное неособое торическое многообразие, то его антиканонический дивизор имеет вид: $-K = \sum D_r, \ r \in |\Sigma|$.

Пример 1. Торические многообразия Фано. Это гладкие проективные многообразия, у которых антиканонический класс обилен. Приведенное выше условие обильности означает в этом случае для X_Σ, что веер Σ состоит из конусов, порожденных гранями выпуклой оболочки $conv|\Sigma|$ множества $|\Sigma|$. В этом случае многогранник $P = conv|\Sigma|$ назовем многогранником Фано. Из гладкости X следует, что вершины каждой грани $\Delta \subset P$ коразмерности 1 образуют базис решетки $\hat{T}^0$. В частности, P – симплициальный многогранник. Оказывается, существует лишь конечное число попарно неизоморфных полных неособых торических многообразий Фано данной размерности n. Это задача на перечисление различных возможных многогранников Фано, в работе Воскресенского и Клячко [1] показано, что веер Фано Σ содержит не более $n^2 + 1$ лучей, если $n \geq 3$, в работе Батырева [1] перечислены все торические многообразия Фано в размерности три.

Говорят, что веер Σ' вписан в Σ, если для любого $\sigma' \in \Sigma'$ найдется $\sigma \in \Sigma$ такой, что $\sigma' \subset \sigma$. Имеем естественный морфизм $X'_\Sigma \to X_\Sigma$, являющийся бирациональным. Если Σ' является разбиением веера Σ, то морфизм $X'_\Sigma \to X_\Sigma$ является конечным и сюръективным. Используя критерий гладкости торического многообразия,

нетрудно указать алгоритм разрешения особенностей многообразия X_Σ. Это чистая задача комбинаторной геометрии. Сначала путем барицентрического подразделения превращают веер Σ в веер Σ_1, все конусы которого являются симплициальными. Затем, при необходимости, каждый конус веера Σ_1 разбивают на конусы, порожденные элементами базиса решетки $\hat{T}^0$. Полученный веер Σ' является искомым и мы имеем морфизм гладкого многообразия X'_Σ на X_Σ. Наиболее просто это происходит в размерности два. Пусть σ – двумерный конус в веере Σ и Δ – выпуклая оболочка в $\hat{T}^0_{\mathbf{Q}}$ множества $\sigma \cap \hat{T}^0 - \{0\}$. Пусть $m_1, .., m_s$ – элементы из $\hat{T}^0$, лежащие на компактных отрезках границы Δ. Тогда лучи $< m_1 >, .., < m_s >$ дают нужное разбиение конуса σ.

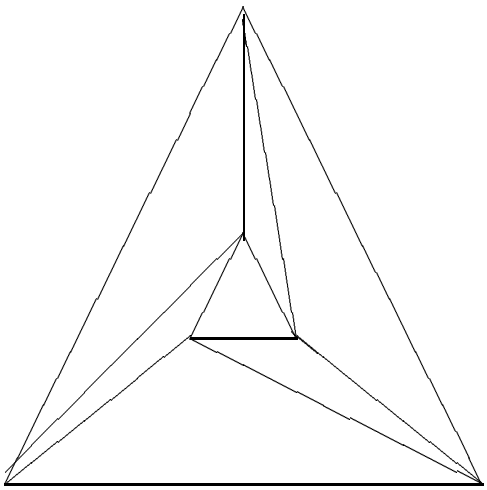
Пример 2. Пусть T – максимальный тор в группе $SL(3, \mathbf{C})$, его уравнение $xyz = 1$. Рассмотрим проективизацию X многообразия $T : x_1x_2x_3 = x_0^3$. Кубическая поверхность X является торической поверхностью, она имеет три особые точки. На дополнении $X - T$ лежат три прямые, на их пересечении и находятся особые точки. Пусть Σ – веер многообразия X, множество $|\Sigma|$ состоит из трех векторов. Нетрудный расчет показывает, что мы имеем следующую симметрическую картину:



$|\Sigma| = \{OA, OB, OC\}$, группа, порожденная векторами OA, OB, имеет индекс 3 в $\hat{T}^0$, поэтому X есть фактор $\mathbf{P}^2/W$, где W – группа порядка 3. Каждый двумерный конус, например, $\sigma =< OA, OB >$ разбивается на 3 базисных, в результате получаем гладкий веер Σ', у которого множество $|\Sigma'|$ состоит из 9 векторов $OA, OB, OC, OD_i, 1 \leq i \leq 6$. Веер Σ' является разбиением и веера Σ_1, у которого множество $|\Sigma_1| = \{OD_i,\ 1 \leq i \leq 6\}$. Проективное многообразие X_{Σ_1} является гладким, это поверхность Дель-Пеццо степени 6. Имеем бирациональные морфизмы

$$X_\Sigma \leftarrow X_{\Sigma'} \rightarrow X_{\Sigma_1}.$$

Пример 3. В размерности $n \geq 3$ существуют полные, но не проективные торические многообразия. Простейшим примером является полный симплициальный веер Σ в трехмерном пространстве, конусы которого определяют следующую триангуляцию сферы с центром в вершинах конусов.



Множество $|\Sigma|$ состоит из 6 векторов, исходящих из центра, на рисунке они изображены точками. Одномерный скелет веера состоит из 6 лучей, исходящих из центра. Соединяя точки на сфере отрезками прямых по указанному правилу, мы получаем многогранник с треугольными гранями. Никаким растяжением радиусов, соединяющих центр с вершинами, невозможно превратить данный многогранник в строго выпуклый. Конечно, разбиением полного веера Σ всегда можно перейти к проективному гладкому вееру.

В конструкции X_Σ поле k играло весьма вспомогательную роль. Если взять вместо колец $k[\sigma^0 \cap \hat{T}]$ кольца $\mathbf{Z}[\sigma^0 \cap \hat{T}]$, то получим склеиванием $\mathbf{Z}$-схему $X_{\Sigma,\mathbf{Z}}$, которую в дальнейшем будем снова обозначать X_Σ , а всякое торическое k-многообразие X для замкнутого поля k имеет вид $X = X_\Sigma \otimes k$.

8.2. Проективные инвариантные вееры. Напомним некоторые факты из §3. Пусть T – алгебраический n-мерный тор, определенный над незамкнутым полем k, тор T однозначно определяется представлением группы $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}\,(k_s/k)$ на характерах $\hat{T}$ тора T. Пусть $h : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}\,(n, \mathbf{Z})$ – соответствующее целочисленное представление, группа разложения $h(\mathcal{G})$ является конечной подгруппой в $\mathrm{GL}\,(n, \mathbf{Z})$. Тор T восстанавливается по h следующим образом. На группе $\mathrm{G}_m^n \otimes k_s$ действуют два представления группы $\mathcal{G}$ – геометрическое : $g \to h(g) \otimes 1$ и арифметическое: $g \to 1 \otimes g$, $g \in \mathcal{G}$. Они коммутируют друг с другом, поэтому можно взять представление $u(g) = h(g) \otimes g$ группы $\mathcal{G}$ в группу $\mathrm{Aut}_k(\mathbf{G}_m^n \otimes k_s)$. Тогда тор T изоморфен фактору $(\mathbf{G}_m^n \otimes k_s)/u(\mathcal{G})$. Выберем в решетке $\hat{T}^0$ гладкий проективный веер Σ, инвариантный относительно конечной группы $h(\mathcal{G}) \subset GL(n, \mathbf{Z})$, действующей на Σ по правилу переноса структур. Как показано в работе Брилинского [1], это всегда можно сделать подходящим разбиением, исходя из любого полного веера. Тогда группа $h(\mathcal{G})$ естественно действует автоморфизмами на X_Σ и мы имеем эквивариантное вложение $\mathbf{G}_m^n \subset X_\Sigma$. Фактор $X = (X_\Sigma \otimes k_s)/u(\mathcal{G})$ является k-формой многообразия $X_\Sigma \otimes k$, содержащей тор T в качестве открытого подмножества. Это доказывает существование гладкой проективной модели тора T над произвольным полем. Схему X назовем моделью Демазюра тора T. Она весьма удобна при вычислении $\mathcal{G}$-модуля $\mathrm{Pic}\,(X \otimes_k k_s)$, поскольку $\mathcal{G}$-модуль $\mathrm{Pic}\,(X \otimes_k k_s)$ изоморфен $\mathcal{G}$-модулю $\mathrm{Pic}\,X_\Sigma$, на котором группа $\mathcal{G}$ действует геометрически. Последовательность (1) п.8.1 позволяет вычислить действие группы $\mathcal{G}$ на $\mathrm{Pic}\,X_\Sigma$, зная действие группы на $\hat{T}$ и на ребрах веера Σ. Заметим также, что группа $\mathrm{Aut}_k(X_\Sigma)$ содержит в качестве подгруппы полупрямое произведение $h(\mathcal{G})T(k_s)$, где $T(k_s)$ – группа сдвигов, $h(\mathcal{G})$ нормализует

группу $T(k)$. Поэтому среди k-форм многообразия $X_\Sigma \otimes k$ имеются и все пополнения главных однородных пространств k-тора T.

Теперь перейдем к вопросу практического построения инвариантных проективных вееров и многообразий Демазюра размерности n. По теореме Жордана существует конечное число несопряженных конечных подгрупп в группе $GL(n, \mathbf{Z})$. Для каждой такой группы W мы можем построить инвариантный веер Σ в решетке $M^0 = \mathbf{Z}^n$ и модель Демазюра X_Σ. Конечно, здесь возникает вопрос о наиболее экономном построении, с меньшим числом симплексов, что будет означать для X_Σ относительную минимальность (в смысле, который легко уточнить). Конечно, для неравных групп $W_1 \subset W_2 \subset \mathbf{G}L(n, \mathbf{Z})$ их минимальные вееры Σ_1 и Σ_2 могут совпадать. Если не заботиться о минимальности модели, то достаточно построить проективный инвариантный веер для максимальной конечной подгруппы W группы $\mathbf{G}L(n, \mathbf{Z})$. Максимальных подгрупп значительно меньше, чем всех, к примеру, для $n = 2$ всех групп 17, максимальных 2; для $n = 3$ всех групп 73, максимальных 4; для $n = 4$ всех групп 710, максимальных 9.

Хорошо известно, что всякая конечная подгруппа группы $\mathbf{G}L(n, \mathbf{Z})$ оставляет инвариантной некоторую положительно определенную целочисленную квадратичную форму. Это обстоятельство часто помогает при построении инвариантного веера. Полные группы целочисленных автоморфизмов положительно определенных квадратичных форм от n переменных носят название групп Браве, в частности, все максимальные группы являются группами Браве. Поэтому максимальную группу можно отмечать соответствующей квадратичной формой. В малых размерностях n максимальная конечная подгруппа группы $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$ может быть реализована в качестве группы автоморфизмов некоторой системы корней n-мерного пространства. Это позволяет сравнительно просто строить минимальные проективные торические модели с максимальной группой автоморфизмов.

Пример 3. 1). Гладкая проективная одномерная торическая модель только одна – это проективная прямая $\mathbf{P}^1$.

2). В случае $n = 2$ имеются две максимальные несопряженные подгруппы W_1 и W_2 в $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z})$. Группа W_1 имеет порядок 8, это группа автоморфизмов системы корней типа B_2. Решетка корней B_2 является обычной квадратной решеткой с инвариантной квадратичной формой $x^2 + y^2$. Веер Σ состоит из 4-х базисных конусов и всех его частей.

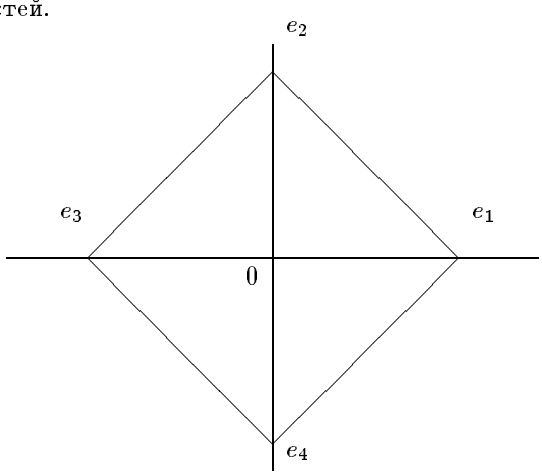
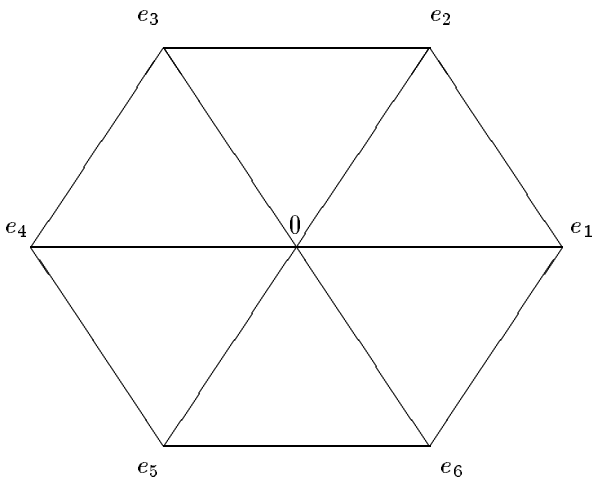


Схема $X_\Sigma = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, e_1, e_2 – базис решетки B_2. Антиканонический дивизор

$D = -K$ равен $D_1 + D_2 + D_3 + D_4$, он инвариантен относительно группы W_1, D_i соответствует лучу $< 0, e_i >$. Все k-формы многообразия $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ являются k-рациональными, если они имеют рациональную k-точку.

Группа W_2 имеет порядок 12, это группа автоморфизмов системы корней типа $\mathbf{A}_2$, инвариантная квадратичная форма $x^2 + xy + y^2$. Веер Σ содержит 6 базисных конусов, $|\Sigma| = \{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6\}$.



Веер Σ_0, порожденный базисами $(e_1,\ e_3)$, $(e_3,\ e_5)$, $(e_5,\ e_1)$, является полным и определяет проективную плоскость $\mathbf{P}^2$. Поэтому схема $X_\Sigma \otimes k$ есть поверхность Дель-Пеццо степени 6, полученная из $\mathbf{P}^2$ раздутием трех точек $O_1,\ O_2,\ O_3$. Группа W_2 есть прямое произведение $S_3 \times S_2$, где S_3 – симметрическая группа, действующая проективно на $\mathbf{P}^2$, а S_2 – квадратичное преобразование плоскости $\mathbf{P}^2$ с фундаментальными точками $O_1,\ O_2,\ O_3$. Всякая k-форма X схемы $X_\Sigma \otimes k$, имеющая рациональную k-точку, является k-рациональной.

3). В размерности 3 имеются четыре максимальные несопряженные подгруппы группы $\mathbf{G}L(3, \mathbf{Z})$. Три из них являются неэквивалентными представлениями прямого произведения симметрической группы S_4 и группы второго порядка S_2.

а) Группа W_1 является группой автоморфизмов обычной кубической решетки L_0 в евклидовом пространстве, она сохраняет форму $x^2 + y^2 + z^2$, веер содержит 8 октантов, множество $|\Sigma|$ состоит из 6 ребер, схема X_Σ есть $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Вопрос о бирациональной тривиальности k-форм этого типа будет рассмотрен в примере 4.

б) Группа W_2 связана с решеткой L_1, которая получается из кубической добавлением центров кубов. Эта решетка натянута на базис $f_1,\ f_2,\ f_3$ евклидова пространства E^3, при этом длина $\|f_i\|$ базисных векторов равна $\sqrt{3}$, а скалярные произведения $(f_i,\ f_j) = -1,\ i \neq j$. Инвариантный веер Демазюра этой решетки построим следующим образом. Возьмем 4 вектора $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ \ f_4 = -f_1 - f_2 - f_3$. Любая тройка этой системы образует базис решетки. Если взять все тройки этой системы, то получим максимальные элементы полного веера Σ_0, определяющего пространство $\mathbf{P}^3$. На веере Σ_0 действует симметрическая группа S_4. Чтобы получить веер, инвариантный и относительно центральной симметрии, придется веер Σ_0 разбить на части. Каждый симплекс максимальной размерности разобъем на 6 частей. Например, симплекс $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ разбивается на следующие симплексы:

$$(f_1,\ f_1 + f_2,\ \mu),\ (f_2,\ f_2 + f_3,\ \mu),\ (f_3,\ f_1 + f_3,\ \mu),\ (f_1,\ f_1 + f_3,\ \mu),$$

$$(f_2,\ f_1+f_2,\ \mu),\ (f_3,\ f_2+f_3,\ \mu),\ \mu=f_1+f_2+f_3.$$

Обозначим полученный веер через Σ. Он содержит 14 ребер, следовательно $\operatorname{Pic} X_\Sigma$ имеет ранг 11. Поскольку веер Σ получен разбиением из веера Σ_0, то схема X_Σ получается из $\mathbf{P}^3$ с помощью последовательных раздутий. Граф дивизоров из $|\Sigma|$ можно описать с помощью выпуклого многогранника в $\mathbf{R}^3$. Он состоит из 8 шестиугольников и 6 четырехугольников. Это в точности "многогранник" дивизоров, получаемых из $\mathbf{P}^3$ последовательным раздутием 4-х вершин и 6 ребер координатного тетраэдра $x_0x_1x_2x_3=0$, где x_i – однородные координаты в $\mathbf{P}^3$. Группа W_2 есть группа всех целочисленных автоморфизмов квадратичной формы

$$3(x^2+y^2+z^2)-2(xy+xz+yz).$$

в) Группа W_3 есть группа автоморфизмов решетки L_2, получаемой из кубической, добавлением центров граней. Решетки L_1 и L_2 дуальны друг другу: $L_2=\operatorname{Hom}(L_1,\mathbf{Z})$. Инвариантный веер состоит из 32 базисов, множество $|\Sigma|$ имеет 18 элементов, $\operatorname{Pic} X_\Sigma$ имеет ранг 15. Инвариантная квадратичная форма имеет вид

$$x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz.$$

г) Наконец, группа W_4 есть группа автоморфизмов решетки, являющейся прямой суммой одномерной решетки и двумерной, составленной из правильных треугольников. Инвариантная модель Демазюра X_Σ есть $\mathbf{P}^1\times X$, где X – поверхность Дель-Пеццо степени 6.

Используя эти явные геометрические конструкции, Б.Кунявский [2] получил полную бирациональную классификацию трехмерных торов. Из 73 трехмерных решеток выделены 15, для которых соответствующие торы не являются рациональными и не являются стабильно эваивалентными между собой. Все торы размерности 3, кроме этих отмеченных, являются k-рациональными. В частности, все стабильно рациональные трехмерные торы на самом деле рациональны.

Пример 4. Пусть $f=x_1^2+..+x_n^2$. Этой форме соответствует кубическая решетка L_0 в евклидовом пространстве E^n, порожденная ортонормированным базисом $e_1,..,e_n$, $W=O(n,f)$ – группа всех целочисленных преобразований, сохраняющих форму f; $|W|=2^n n!$. Рассмотрим веер Σ, порожденный n-мерными симплексами $g\sigma$, $g\in W$, $\sigma=<0,e_1,..,e_n>$. Множество $|\Sigma|$ состоит из $2n$ ребер, соответствующая схема Демазюра X_Σ есть $\mathbf{P}^1\times..\times\mathbf{P}^1$ (n раз). Пусть T – тор размерности n над полем k, определенный представлением $h:\mathcal{G}\to W\subset\mathrm{GL}(n,\mathbf{Z})$, где $\mathcal{G}$ действует на $\hat{T}^0$. Тогда тор T вкладывается в k-форму X схемы $X_\Sigma\otimes k$ и мы имеем точную последовательность $\mathcal{G}$-модулей

$$0\ \to\hat{T}\xrightarrow{\alpha}\hat{S}\to\operatorname{Pic}X_\Sigma\to\ 0, \tag{1}$$

где $\hat{S}$ – пермутационный $\mathcal{G}$-модуль, порожденный ребрами веера Σ. Множество $|\Sigma|$ состоит из векторов (дивизоров) $e_1,..,e_n,f_1,..,f_n$, где $f_i=-e_i$. (В группе $\hat{S}$ все они считаются независимыми!) Ранг $\mathbf{Z}$-модуля $\operatorname{Pic}X_\Sigma$ равен n. Вложение α определено формулой

$$\alpha(m)=\sum u(m)u,\ u\in|\Sigma|.$$

Пусть $m_1,..,m_n$ – базис в $\hat{T}$, дуальный базису $e_1,..,e_n\in\hat{T}^0$. Тогда $\alpha(m_i)=e_i-f_i$, т.е. дивизоры e_i и f_i линейно эквивалентны и только они. Классы дивизоров $cl(e_i)$ образуют $\mathbf{Z}$-базис $\mathcal{G}$-модуля $\operatorname{Pic}X_\Sigma=\hat{N}$. Группа $\mathcal{G}$ действует перестановкой на базисе $|\Sigma|$ и очевидно, что перестановкой она действует и на базис $cl(e_i)$ модуля $\hat{N}$. Таким

образом, тор T стабильно рационален над полем k. Для доказательства рациональности тора T рассмотрим точную последовательность торов над k, двойственную последовательности (1)

$$1 \to N \xrightarrow{u} S \xrightarrow{v} T \to 1.$$

Выбор базы $|\Sigma|$ в $\hat{S}$ позволяет считать S, а значит и N, группой линейных преобразований пространства $\mathbf{A}_k^{2n}$. Строение отображения $cl : \hat{S} \to \hat{N}$ показывает, что представление u есть прямая сумма двух точных представлений степени n, скажем, $V_1 \oplus V_2$. Пусть $x \in V_1(k)$ – точка, орбита которой $u(N)x$ биективна $N(k)$. Тогда v отображает $x \times V_2$ бирационально на T. Таким образом, k-торы T, у которых целочисленное представление $\mathcal{G}$-модуля $\hat{T}^0$ (или $\hat{T}$) эквивалентно над $\mathbf{Z}$ ортогональному, являются k-рациональными.

8.3. Бирациональные инварианты торов без аффекта в полупростых группах. Пусть T – алгебраический k-тор, X – его гладкая проективная модель. Как было отмечено в §4, группа $H^1(k, \operatorname{Pic} \bar{X}) = H^1(k, p(T))$ является бирациональным инвариантом k-тора T, $\bar{X} = X \otimes_k k_s$. Рассмотрим этот инвариант более тщательно. Пусть L/k – расширение Галуа конечной степени, расщепляющее тор T, $\Pi = \operatorname{Gal}(L/k)$, тогда $H^1(k, \operatorname{Pic} \bar{X}) = H^1(\Pi, \operatorname{Pic} X_L)$. Вялая резольвента

$$0 \to \hat{T} \to \hat{S} \to \hat{N} \to 0, \ \hat{N} = \operatorname{Pic} X_L$$

вместе с равенством $H^1(\Pi, \hat{S}) = 0$ дает коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H^1(\Pi, \hat{N}) & \to & H^2(\Pi, \hat{T}) & \to & H^2(\Pi, \hat{S}) \\ & & \downarrow res & & \downarrow res & & \downarrow res \\ 0 & \to & H^1(< g >, \hat{N}) & \to & H^2(< g >, \hat{T}) & \to & H^2(< g >, \hat{S}). \end{array}$$

Так как модули $\hat{S}$ и $\hat{N}$ являются вялыми, то эта диаграмма показывает наличие естественного мономорфизма

$$H^1(\Pi, \hat{N}) \to \operatorname{Ker}[H^2(\Pi, \hat{T}) \xrightarrow{res} \bigoplus_{g \in \Pi} H^2(< g >, \hat{T})].$$

Из инъективности отображения

$$H^2(\Pi, \hat{S}) \xrightarrow{res} \bigoplus_{g} H^2(< g >, \hat{S})$$

следует изоморфизм

$$H^1(\Pi, p(T)) = \operatorname{Ker}[H^2(\Pi, \hat{T}) \xrightarrow{res} \bigoplus_{g} H^2(< g >, \hat{T})]. \tag{2}$$

Это соотношение имеется в статье Сансюка [1]. Кунявский [4], изучая трехмерные торы, обнаружил следующий эффект. Хотя имеются конечные подгруппы $\Pi \subset \mathbf{G}L(3, \mathbf{Z})$, для которых $H^1(\Pi, \operatorname{Pic} X_\Sigma) \neq 0$, но для всех максимальных конечных подгрупп $\Pi \subset \mathbf{G}L(3, \mathbf{Z})$ и соответствующих инвариантных вееров Σ справедливо равенство $H^1(\Pi, \operatorname{Pic} X_\Sigma) = 0$. Пример 1 п.8.2 показывает, что решетки L_0, L_1, L_2 являются решетками корней или весов полупростых групп ранга 3. Дальнейшие исследования Кунявского [4] показали, что для максимального k-тора T без аффекта в связной присоединенной полупростой группе классического типа группа $H^1(\Pi, p(T)) = 0$. Окончательную ясность в эту ситуацию внес А.А.Клячко [4]. Итак, пусть T – максимальный k-тор без аффекта в связной полупростой группе G, R – система корней,

$W(R)$ – группа Вейля, $A(R)$ – группа автоморфизмов системы R, $Q(R)$ – решетка корней, $P(R)$ – решетка весов, $Q(R) \subset \hat{T} \subset P(R)$; Π – группа разложения тора T; поскольку T – тор без аффекта, то $W(R) \subset \Pi \subset A(R)$. Вычисление $H^1(\Pi, p(T))$ по формуле (2) сводится к вычислению двумерных когомологий Π-модуля $\hat{T}$. Полезно знать и одномерные когомологии. Клячко [4] получает формулу

$$H^1(W, \hat{T}) = \frac{< m_\alpha \in \hat{T} \mid s_\alpha m_\alpha = -m_\alpha,\ \alpha \in \Delta >}{< (1 - s_\alpha)\ m \mid m \in \hat{T},\ \alpha \in \Delta >}, \tag{3}$$

где Δ – базис системы корней R, s_α – отражение в корне $\alpha \in R$. Из формулы (3) имеем:

$$H^1(W, Q(R)) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad R \neq A_1,\ B_n, \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, & \textit{если} \quad R = A_1,\ B_n; \end{cases}$$

$$H^1(W, P(R)) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad R \neq A_1,\ C_n, \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, & \textit{если} \quad R = A_1,\ C_n. \end{cases}$$

Если система R – неприводима, то

$$H^1(W, \hat{T}) = \begin{cases} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, & \textit{если} \quad R = A_1, \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, & \textit{если} \quad R = C_n,\ \hat{T} = P(R), \\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, & \textit{если} \quad R = B_n,\ \hat{T} = Q(R), \\ 0 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Формула (3) показывает также, что группа $H^2(W, \hat{T})$ является 2-группой. Таким образом,

$$H^1(W, p(T)) = \mathrm{Ker}\,[H^2(W, \hat{T}) \overset{res}{\to} \bigoplus_{\alpha \in \Delta} H^2(< s_\alpha >, \hat{T})].$$

Клячко показывает, что это ядро тривиально для всех промежуточных решеток $\hat{T}$, $Q(R) \subset \hat{T} \subset P(R)$. Если же система R – неприводима, то группу W можно заменить на $\Pi \supset W(R)$. Используя равенство $H^1(W, p(T)) = 0$ и редукцию Хохшильда-Серра, показывается, что $H^1(\Pi, p(P(R))) = 0$ для всех $\Pi \supset W(R)$. Для решетки $Q(R)$ строится веер Σ в $\hat{T}^0 = P(R^\vee)$, веер состоит из камер Вейля в пространстве $P(R^\vee) \otimes \mathbf{R}$ и всех его граней. В терминах веера Σ торического многообразия X можно описать все компоненты кольца Чжоу $CH(X) = \oplus CH^d(X)$. Клячко [2] показывает, что

$$H^1(\Pi, CH^d(X)) = H^{-1}(\Pi, CH^{n-d}(X))$$

и доказывает, что $H^{-1}(\Pi, CH^d(X)) = 0$ для всех $\Pi \supset W(R)$. Переход от H^1 к H^{-1} ценен тем, что при проверке равенства $H^{-1}(\Pi, CH^d(X)) = 0$ дело сводится к нахождению Π-инвариантов в некоторых модулях, а таковые оказываются ненулевыми из-за того, что группа Π весьма велика.

Теорема. Пусть $W(R)$ и $A(R)$ – группа Вейля и группа автоморфизмов системы корней R, $Q(R)$ и $P(R)$ решетки корней и весов соответственно. Тогда:

1) $H^1(W, p(T)) = 0$ для любой W-решетки $\hat{T}$, $Q(R) \subseteq \hat{T} \subseteq P(R)$;

2) $H^1(\Pi, p(P(R))) = H^1(\Pi, p(Q(R))) = 0$, $W(R) \subseteq \Pi \subseteq A(R)$;

3) если система R неприводима, то

$$H^1(\Pi, p(T)) = 0,\ W(R) \subseteq \Pi \subseteq A(R),\ Q(R) \subseteq \hat{T} \subseteq P(R).\ \triangle$$

Данная теорема имеет интересные приложения к арифметике линейных алгебраических групп.

8.4. Градуированное кольцо торического многообразия. Пусть X – гладкое проективное торическое многообразие над полем k, содержащее тор T в качестве открытой орбиты, $\bar{X} = X \otimes_k k_s$. Многообразие $\bar{X}$ определяется веером Σ в пространстве $\hat{T}^0_{\mathbf{Q}}$, на котором действует группа $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}\,(k_s/k)$, переставляя конуса. Пусть D_r – простые дивизоры дополнения $\bar{X} - \bar{T}$, $r \in |\Sigma|$, группа $\mathcal{G}$ переставляет их местами: $g(D_r) = D_{g(r)}$, $g \in \mathcal{G}$. Пусть $\hat{S}$ – пермутационный $\mathcal{G}$-модуль, порожденный дивизорами D_r. Для всякого $D = \sum n_r D_r$, $r \in |\Sigma|$, пространство глобальных сечений $\Gamma(\bar{X}, O(D))$ пучка $O(D)$ имеет базис над полем k_s, состоящий из функций e^m, $m \in \Delta(D) \cap \hat{T}$, где $\Delta(D)$ – многогранник в пространстве $\hat{T}_{\mathbf{R}}$, заданный неравенствами $\Delta(D) = \{m \in \hat{T}_{\mathbf{R}} \mid r(m) \geq -n_r,\ \forall r \in |\Sigma|\}$.

Пусть $0 \to \hat{T} \xrightarrow{\alpha} \hat{S} \xrightarrow{\beta} \mathrm{Pic}\,\bar{X} \to 0$ – стандартная вялая резольвента модуля $\hat{T}$, мономорфизм α продолжается до линейного отображения $\hat{T}_{\mathbf{R}} \to \hat{S}_{\mathbf{R}}$. Пусть $\hat{N} = \mathrm{Pic}\,\bar{X}$, N – тор Нерона-Севери многообразия X. Поскольку X – проективно, то существует очень обильный дивизор на X, пусть это будет D. Тогда можно считать D эффективным, т.е. $n_r \geq 0, r \in |\Sigma|$.

Пусть $\Omega(nD) = \alpha(\Delta(nD)) + nD$ – многогранник, лежащий в $\hat{S}_R$, он может быть задан следующей системой линейных уравнений и неравенств

$$W = \sum \lambda_r D_r \in \Omega(nD) \Longleftrightarrow \{\beta(W) = \beta(nD), \quad \lambda_r \geq 0, \quad r \in |\Sigma|\}.$$

Как мы уже видели, выбор базиса D_r в группе $\hat{S}$ определяет точное линейное представление тора S в пространстве $\mathbf{A}^q$, q – количество элементов в $|\Sigma|$. Пусть $y_r = e^{D_r}$ – мультипликативный базис в группе $\exp \hat{S}$, B – кольцо многочленов от q переменных y_r с коэффициэнтами из k_s. Пространство $\Gamma(\bar{X}, O(nD))$ может быть отождествлено с пространством B_n многочленов из B, порожденных мономами e^W, $W \in \Omega(nD) \cap \hat{S}$. Обозначим через χ – мультипликативный характер тора N, соответствующий элементу $\beta(D)$, $\chi = e^{\beta(D)}$. Из определения $\Omega(nD)$ следует, что B_n состоит из всех полуинвариантов веса χ^n группы $N(k_s)$, линейно действующей в кольце многочленов B. Таким образом

$$\bar{X} = Proj\ C,\ C = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n.$$

Чтобы получить аналогичное утверждение и для многообразия X, выберем в качестве D эффективный, обильный дивизор из $\hat{S}$, инвариантный относительно группы Галуа $\mathcal{G}$. Тогда все пространства B_n будут $\mathcal{G}$-модулями, χ будет определен над k и пространство $A_n = \Gamma(X, O(nD))$ можно отождествить с $B_n^{\mathcal{G}}$, т.е. считать A_n состоящим из полуинвариантов веса χ^n в кольце многочленов $B^{\mathcal{G}} = k[\mathbf{A}^q]$. Таким образом, $X = ProjA$, $A = \oplus_{n=0}^{\infty} A_n$.

Пример 5. Пусть V_r – линейное пространство над полем k, $\dim V_r = r$. Имеем тензорное представление прямого произведения $\mathbf{G}L(V_m) \times \mathbf{G}L(V_n)$ в пространстве $V = V_m \otimes_k V_n : (g_1, g_2)(x \otimes y) = g_1 x \otimes g_2 y$. Пусть S_r – максимальный k-тор в группе $\mathbf{G}L(V_r)$, через $N = S_m S_n$ обозначим образ группы $S_m \times S_n$ в $\mathbf{G}L(V)$ при тензорном представлении. Вопрос о рациональности поля инвариантов $k(V)^N$ возникал по разному поводу, см. п.6.2 и пример 6. Рассмотрим самый жесткий случай. Пусть V_r является расширением поля k степени r, S_r – k-тор, возникающий из регулярного представления мультипликативной группы V_r^* поля V_r, тогда любой характер группы S_r, определенный над k, имеет вид χ_r^p, где χ_r – норменное отображение, $p \in \mathbf{Z}$. В случае, когда V_m и V_n поля и $(m, n) = 1$, все характеры тора $N = S_m S_n$, определенные над k, порождены одним характером $\chi = \chi_m^n \chi_n^m$. Пусть A_p – пространство

всех полуинвариантов группы N веса χ^p в кольце $k[V]$. Мы увидим, что A_p – конечномерно, тогда можно рассмотреть $X = ProjA,\ A = \bigoplus_0^\infty A_p$. Оказывается,$X$ есть гладкая проективная торическая модель тора $T = S/N$, где S – максимальный k-тор в группе $\mathbf{G}L(V)$, содержащий N. Действительно, имеем точные последовательности

$$0 \ \to I_m \to \hat{S}_m \stackrel{\varepsilon_m}{\to} \mathbf{Z} \to \ 0,$$

$$0 \ \to I_n \to \hat{S}_n \stackrel{\varepsilon_n}{\to} \mathbf{Z} \to \ 0.$$

Модуль $\hat{T}$ есть не что иное, как $I_m \otimes I_n$ и имеем длинную точную последовательность $\mathcal{G}$-модулей

$$0 \ \to I_m \otimes I_n \stackrel{\alpha}{\to} \hat{S}_m \otimes \hat{S}_n \stackrel{\beta}{\to} \hat{S}_m \oplus \hat{S}_n \stackrel{\gamma}{\to} \mathbf{Z} \to \ 0,$$

$Im(\beta) = \hat{N},\ \beta(a \otimes b) = (\varepsilon_n(b)a, \varepsilon_m(a)b),\ \gamma(u,v) = \varepsilon_m(u) - \varepsilon_n(v)$. Двойственная решетка $\hat{T}^0$ изоморфна $I_m^0 \otimes I_n^0$. Пусть $e_1, .., e_{m-1}$ – базис в $I_m^0,\ f_1, .., f_{n-1}$ – базис в $I_n^0,\ e_m = -e_1 - .. - e_{m-1},\ f_n = -f_1 - .. - f_{n-1}$. Элементы $e_i \otimes f_j,\ 1 \le i \le m-1,\ 1 \le j \le n-1$ образуют базис решетки $\hat{T}^0$. Пусть $|\Sigma|$ – множество элементов $e_i \otimes f_j,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$. Поскольку $|\Sigma|$ содержит базис группы $\hat{T}^0$, то линейная функция $m \in \hat{T}_{\mathbf{R}}$ вполне определяется своими значениями в точках $e_i \otimes f_j$. Пусть $m(e_i \otimes e_j) = x_{ij}$. Имеем $\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0$. Решетка $\hat{S}_m \otimes \hat{S}_n$ может быть описана как свободный $\mathbf{Z}$-модуль, порожденный символами $[e_i \otimes f_j],\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$. Отображение α имеет вид:

$$\alpha(m) = \sum_{i,j} m(e_i \otimes f_j)[e_i \otimes f_j].$$

Пусть $[e_i]$ – базис $\hat{S}_m,\ [f_j]$ – базис $\hat{S}_n$, тогда

$$\beta(\sum_{i,j} n_{ij}[e_i \otimes f_j]) = n\sum_i n_{ij}[e_i] \oplus m\sum_j n_{ij}[f_j].$$

Рассмотрим выпуклую оболочку P элементов множества $|\Sigma|$ в $\hat{T}^0_{\mathbf{R}}$ и пусть

$$\Delta = \{m \in \hat{T}_{\mathbf{R}} \mid m(x) \ge -1\ \forall x \in P\} -$$

двойственный многогранник. Матрица (x_{ij}) координат многогранника $\alpha(\Delta)$ удовлетворяет условиям $\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0,\ x_{ij} \ge -1$. Элементы из $\alpha(\Delta \cap \hat{T})$ представимы матрицами с целыми координатами. Вместо $\alpha(\Delta)$ удобно взять его сдвиг на матрицу $a = (a_{ij})$, где $a_{ij} = 1\ \forall i,j$. Обозначим полиэдр $\alpha(\Delta) + a$ через $\Omega_{m,n}$

$$\Omega_{m,n} = \{(y_{ij}) \mid \sum_{i=1}^m y_{ij} = m,\ \sum_{j=1}^n y_{ij} = n,\ y_{ij} \ge 0\}.$$

Полиэдр $\Omega_{m,n}$ – известная фигура в теории транспортных задач. Это так называемый классический центральный транспортный многогранник порядка $m \times n$. Известно, что $\Omega_{m,n}$ – целочисленный, т.е. все вершины имеют целые координаты, $\dim\Omega_{m,n} = (m-1)(n-1)$ и $\Omega_{m,n}$ является простым, если $(m,n) = 1$. Выпуклый многогранник называется простым, если двойственный ему является симплициальным. Итак, в нашем случае полиэдр P является симплициальным. В работе Клячко [1] показано, что каждый симплекс многогранника P натянут на базис решетки $\hat{T}^0$. Следовательно, грани полиэдра P определяют в $\hat{T}^0$ гладкий проективный веер Σ,

множеством примитивных векторов которого является исходное множество $|\Sigma|$. Антиканонический дивизор $-K = \sum_{i,j} e_i \otimes f_j$ очень обилен и

$$\beta(-K) = n\sum_{i=1}^{m}[e_i] + m\sum_{j=1}^{n}[f_j] \in \hat{N}.$$

Обозначим $\beta(-K)$ через χ, это характер группы N и, если записать его в мультипликативной форме, то $\chi = \chi_m^n \chi_n^m$ – тот самый базисный характер, с помощью которого было построено кольцо полуинвариантов $A = \oplus_{p=0}^{\infty} A_p$. Таким образом, $ProjA$ есть гладкое торическое проективное многообразие X, построенное с помощью веера Σ в $\hat{T}^0$. Заметим также, что $\dim A_p$ равна количеству целых точек транспортного многогранника $p\Omega_{m,n}$.

Частный случай : $m = 2$, n – нечетное. В работе Клячко [1] получены следующие формулы: $\dim A_p = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin[(p+1/2)\alpha]}{\sin\alpha/2}\right)^n d\alpha.$

Например, $\dim A_1 = \dim\Gamma(X, O(-K)) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k}\binom{2k}{k}$,

$$\deg(-K) = \frac{2^{n-1}\ (n-1)!}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^n d\beta = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k\binom{n}{k}(n-2k)^{n-1}.$$

Пример 6. Максимальные торы присоединенных полупростых групп типа A_n. Имеется гипотеза, что присоединенные связные полупростые группы рациональны над полем определения. В связи с этим имеет смысл изучить бирациональную природу максимальных торов присоединенных групп. Окончательная классификация пока еще не получена, работа достаточно трудоемкая. Здесь мы остановимся на максимальных торах в присоединенных группах типа A_n. Случаи $n = 1, 2$ мы опускаем, так как все торы в этих случаях рациональны. Решетка корней $Q(R)$ строится следующим образом: в $\mathbf{Z}^{n+1}$ выбирается подрешетка, состоящая из точек с нулевой суммой координат, в обозначениях примера 5 $Q(R) = I_{n+1}$. На $Q(R)$ естественно действует симметрическая группа $S_{n+1} = W(R)$. Полная группа автоморфизмов $A(R)$ есть прямое произведение $W(R) \times S_2$, где второй множитель действует на $Q(R)$ умножением на -1. Обозначим через I_2 ядро отображения ε_2 и рассмотрим $A(R)$-модуль $I_{n+1} \otimes I_2$. Интересующий нас максимальный тор T в присоединенной группе типа A_n имеет модуль рациональных характеров $\hat{T} = I_{n+1} \otimes I_2$ и группа Галуа действует на $\hat{T}$ через группу $A(R)$. Рассмотрим два случая:

1) G – внутренняя форма типа A_n. В этом случае группа Галуа действует через $W(R)$, множитель I_2 не нужен, имеем точную последовательность

$$0 \ \to \hat{T} \to \hat{S} \to \mathbf{Z} \to \ 0,$$

тор T вкладывается над полем k в $\mathbf{P}^n$, все максимальные торы и сама группа G k-рациональны;

2) G – внешняя форма типа A_n, $\hat{T}_n = I_{n+1} \otimes I_2$. В этом случае пример 5 показывает, что k-тор T_n стабильно рационален для четных n, впрочем, из п.6.2 следует, что T_n k-рационален. Таким образом, присоединенная группа G типа A_n является k-рациональной для четных n. Тор типа T_3 нерационален для группы разложения $S_4 \times S_2$.

Глава IV. АРИФМЕТИКА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

В данной работе до сих пор излагалась достаточно общая теория бирациональных характеристик линейных групп, исключениями являлись некоторые примеры. Весьма интересным является приложение данных методов в теории алгебраических групп, определенных над полем алгебраических чисел. Бирациональная геометрия позволила получить как ряд новых результатов, так и по-новому взглянуть на причинно-следственные связи в грандиозном образовании, носящем название арифметики алгебраических групп.

Полем алгебраических чисел будем называть конечное расширение k поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Пусть $O = O_k$ – кольцо целых элементов поля k, $\wp$ – простой идеал кольца O, $\wp \neq (0)$, $\mathbf{F}_\wp = O/\wp$ – конечное поле вычетов, $N(\wp) = |\mathbf{F}_\wp| = p^f$, где p – характеристика поля $\mathbf{F}_\wp$, $f = [\mathbf{F}_\wp : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}]$. Далее, пусть $k_\wp$ – пополнение поля k по норме, определяемой идеалом $\wp$, $O_\wp$ – кольцо целых элементов поля $k_\wp$, максимальный идеал кольца $O_\wp$ снова обозначим символом $\wp$.

§9. ТОРЫ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

9.1. Пусть T – алгебраический тор, определенный над конечным полем k характеристики p , $[k] = q = p^f$, $f = (k : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, $\dim T = d$, $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}\,(\bar{k}/k)$. По формуле §3 имеем $T(k) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\hat{T}, \bar{k}^*)$. Группа $\mathcal{G}$ имеет одну топологическую образующую σ, действующую на поле $\bar{k}$ по правилу: $\sigma(\alpha) = \alpha^q$. Выберем $\mathbf{Z}$-базис $m_1, .., m_d$ решетки $\hat{T}$, имеем

$$\sigma(m_j) = \sum_{i=1}^{d} h_{ij}(\sigma) m_i.$$

Матрица $h(\sigma) = (h_{ij}(\sigma))$ принадлежит группе $\mathrm{GL}\,(d, \mathbf{Z})$. Возьмем рациональную точку $\alpha \in T(k) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\hat{T}, \bar{k}^*)$. Это равносильно соотношению

$$\alpha(\sigma(m)) = \sigma(\alpha(m)),\ m \in \hat{T}.$$

Рассмотрим изоморфизм $\alpha \to (\alpha(m_1), .., \alpha(m_d))$ групп $\mathrm{Hom}\,(\hat{T}, \bar{k}^*)$ и $(\bar{k}^*)^d = \mathrm{G}_m^d(\bar{k})$. При этом изоморфизме подгруппа $T(k)$ описывается в $\mathrm{G}_m^d(\bar{k})$ следующими уравнениями. Пусть $\alpha(m_i) = y_i$. Условие $\alpha(\sigma(m_j)) = \sigma(\alpha(m_j))$ можно переписать в виде

$$\alpha(\sum_{i=1}^{d} h_{ij}(\sigma) m_i) = (\alpha(m_j))^q$$

или

$$\prod_{i=1}^{d} y_i^{h_{ij}(\sigma)} = y_j^q. \tag{1}$$

Пусть $y = (y_1, .., y_d) \in \mathrm{G}_m^d(\bar{k})$. Положим

$$y^{h(\sigma)} = z, \quad z = (z_1, .., z_d), \quad z_j = \prod_{i=1}^{d} y_i^{h_{ij}(\sigma)}.$$

Тогда формулы (1) принимают весьма простой вид : $y^{h(\sigma)} = y^q$, откуда следует:

Теорема 1. Пусть T – алгебраический тор размерности d, определенный над конечным полем k из q элементов . Тогда группа $T(k)$ изоморфна подгруппе группы $\mathrm{G}_m^d(\bar{k})$, удовлетворяющей соотношению $y^{h(\sigma)} = y^q$, где $h : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}(d, \mathbf{Z})$ – представление, определяемое $\mathcal{G}$-модулем $\hat{T}$, σ – топологическая образующая группы $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. $\triangle$

Теорема 2. В условиях теоремы 1 имеем

$$|T(k)| = \det(qE - h(\sigma)).$$

Доказательство. Пусть $A = qE - h(\sigma) \in M(d, \mathbf{Z})$. Тогда $T(k) = \mathrm{Ker}\, f$, где f – гомоморфизм группы $\mathrm{G}_m^d(\bar{k})$ в себя, определяемый отображением $x \to x^A$. Это следует из теоремы 1. Заметим, что ядра отображений $x \to x^A$ и $x \to x^B$ изоморфны, если $B = UAV$, где U и V лежат в $\mathrm{GL}(d, \mathbf{Z})$. Выбирая подходящие U и V, можно привести матрицу A к диагональному виду $B = diag\ (b_1, .., b_d)$, $b_i \geq 1$. Тогда

$$x^B = E \ \Leftrightarrow \ x_i^{b_i} = 1, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Поэтому $|T(k)| = b_1 \cdots b_d = \det(B) = |\det(A)| = |\det(qE - h(\sigma))|$. Заметим еще, что $\det(qE - h(\sigma)) > 0$, ибо $q \geq 2$, а характеристические корни матрицы $h(\sigma)$ лежат на единичной окружности. $\triangle$

Пусть k_m – расширение поля k степени m, $|k_m| = q^m$, $\mathcal{G}_m = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k_m)$. Тор T однозначно определяется представлением

$$h : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}(d, \mathbf{Z}),$$

а тор $T \otimes_k k_m$ – ограничением представления h на подгруппу $\mathcal{G}_m$. Если σ – топологическая образующая группы $\mathcal{G}$, то σ^m является топологической образующей подгруппы $\mathcal{G}_1$. Таким образом, тор $T \otimes_k k_m$ определяется матрицей $h(\sigma^m) = h(\sigma)^m$. Так как $T(k_m) = (T \otimes_k k_m)(k_m)$, то теорема 2 несколько усиливается, а именно

$$T(k_m) = \det(q^m E - h^m(\sigma)). \tag{2}$$

Равенство (2) позволяет получить явное выражение для дзета-функции тора T.

9.2. Определение. Дзета-функция схемы X конечного типа над кольцом $\mathbf{Z}$ определяется посредством эйлеровского произведения

$$\zeta_X(s) = \prod_{x \in X_0} (1 - \frac{1}{N(x)^s})^{-1},$$

где X_0 есть множество всех замкнутых точек схемы X, а $N(x)$ – число элементов конечного поля вычетов $k(x)$ точки x.

В общем случае доказано, что произведение в определении дзета-функции абсолютно сходится при $Res > \dim X$, Серр [1]. Для торов над конечным полем этот факт будет следовать из простых вычислений. Пусть A – кольцо конечного типа над конечным полем $k = \mathbf{F}_q$, $X = \mathrm{Spec}\, A$ – схема над k. Введем следующие обозначения:

$$n(q^a) = \{x \in X_0 \mid N(x) = q^a\},$$

$$\nu(q^a) = |X(\mathbf{F}_{q^a})|.$$

Замечание. Числа $n(q^a)$ и $\nu(q^a)$ – конечны. Это следует из того, что $\mathrm{Spec}\, A$ есть замкнутая подсхема в $\mathrm{Spec}\, k[t_1, .., t_n] = \mathbf{A}_k^n$, поэтому

$$\nu_X(q^a) \leq \nu_{\mathbf{A}^n}(q^a) = q^{an}.$$

Лемма. $\nu(q^a) = \sum_{b|a} bn(q^b)$.

Доказательство. Каждая точка $f \in X(\mathbf{F}_{q^a})$ есть k-гомоморфизм $f : A \to \mathbf{F}_{q^a}$ и его ядро является максимальным идеалом кольца A, т.е. замкнутой точкой x схемы X. Рассмотрим все k-гомоморфизмы $A \to \mathbf{F}_{q^a}$ с заданным ядром x. Тогда образом каждого такого гомоморфизма является единственное подполе $\mathbf{F}_{q^b} \subset \mathbf{F}_{q^a}$, где $q^b = N(x)$. Всего гомоморфизмов с фиксированным ядром и образом $\mathbf{F}_{q^b}$ имеется столько, сколько есть k-автоморфизмов поля $\mathbf{F}_{q^b}$, т.е. ровно b. Далее, $\mathbf{F}_{q^b}$ содержится в $\mathbf{F}_{q^a}$ тогда и только тогда, когда $b|a$. Поэтому

$$\nu(q^a) = \sum_{b|a} b \sum_{x, Nx = q^b} 1 = \sum_{b|a} bn(q^b). \quad \triangle$$

Для схемы X над полем $\mathbf{F}_q$ формулу, определяющую $\zeta_X(s)$, можно несколько упростить. Сделаем замену $t = q^{-s}$. Тогда

$$\zeta_X(s) = \prod_{x \in X_0} (1 - \frac{1}{N(x)^s})^{-1} = \prod_{b=1}^{\infty} (1 - t^b)^{-n(q^b)} = Z_X(t).$$

Вычислим $\ln Z_X(t)$ пока чисто формально

$$\ln Z_X(t) = -\sum_{b=1}^{\infty} n(q^b) \ln(1 - t^b) = \sum_{b=1}^{\infty} n(q^b) \sum_{c=1}^{\infty} \frac{t^{bc}}{c} =$$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b|a} \frac{t^a bn(q^a)}{a} = \sum_{a=1}^{\infty} \frac{t^a}{a} \sum_{b|a} bn(q^b) = \sum_{a=1}^{\infty} \nu(q^a) \frac{t^a}{a}.$$

Отсюда

$$\frac{Z'_X(t)}{Z_X(t)} = \sum_{a=1}^{\infty} \nu(q^a) t^{a-1},$$

или

$$t \frac{Z'_X(t)}{Z_X(t)} = \sum_{a=1}^{\infty} \nu(q^a) t^a.$$

Замечание, сделанное выше, показывает, что ряд, стоящий справа, абсолютно сходится в некотором круге с центром в начале координат и, следовательно, функция $Z_X(t)$ регулярна в этом круге. Дворк [1] доказал, сверх того, что $Z_X(t)$ есть рациональная функция от t. Для торов это будет следовать из дальнейших вычислений. Формула (2) показывает, что

$$\nu(q^n) = \det(q^n E - h^n(\sigma)).$$

Пусть $\lambda_1, .., \lambda_d$ – характеристические корни матрицы $h(\sigma)$, $d = \dim T$, $n = (k_n : k)$. Тогда

$$\det(q^n E - h^n(\sigma)) = \prod_{i=1}^{d} (q^n - \lambda_i^n) = \sum_{m=0}^{d} (-1)^m q^{n(d-m)} \sum_{i_1 < \cdots < i_m} (\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_m})^n, \ \lambda_{i_0} = 1.$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(q^n) t^n = \sum_{m=0}^{d} (-1)^m \sum_{i_1 < \cdots < i_m} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_m} q^{d-m} t)^n =$$

$$= \sum_{m=0}^{d} (-1)^m \sum_{i_1<\cdots<i_m} \frac{\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_m} q^{d-m} t}{1-\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_m} q^{d-m} t},$$

поэтому

$$\frac{Z'_X(t)}{Z_X(t)} = \sum_{m=0}^{d} (-1)^m \sum_{i_1<\cdots<i_m} \frac{\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_m} q^{d-m}}{1-\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_m} q^{d-m} t}.$$

Учитывая, что $Z_T(0) = 1$, получаем

$$\ln Z_T(t) = \sum_{m=0}^{d} (-1)^{m+1} \sum_{i_1<\cdots<i_m} \ln(1-\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_m} q^{d-m} t),$$

или

$$Z_T(t) = \prod_{m=0}^{d} \prod_{i_1<\cdots<i_m} (1-\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_m} q^{d-m} t)^{(-1)^{m+1}}.$$

Обозначим через $\Lambda^m h$ – внешнюю степень представления h. Тогда можно записать

$$Z_T(t) = \prod_{m=0}^{d} \det[E - q^{d-m} t(\Lambda^m h)(\sigma)]^{(-1)^{m+1}}. \tag{3}$$

Мы видим, что $Z_T(t)$ – рациональная функция и, сверх того, справедливо

Предложение. Пусть k – конечное поле, T и T' – изогенные над полем k торы. Тогда дзета-функции $\zeta_T(s)$ и $\zeta_{T'}(s)$ совпадают.

Доказательство следует из формулы (2) , которая показывает, что $|T(k_m)|$ и $|T'(k_m)|$ совпадают для всех m, поскольку представления h и h' эквивалентны над $\mathbf{Q}$, а, следовательно, соответствующие определители совпадают. $\triangle$

§10. ТОРЫ НАД ЛОКАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ

10.1. Торы над полем вещественных чисел. Пусть $\mathbf{R}$ – поле вещественных чисел, T – тор, определенный над $\mathbf{R}$. Тогда он разложим над $\mathbf{C}$, группа $\Pi = \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ имеет порядок 2. Имеется всего 3 неразложимых Π-модуля: это $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}[\Pi]$ и $I = J$ – идеал аугментации. Следовательно, тор T разложим в прямое произведение $\mathbf{R}$-торов

$$T = \mathrm{G}_m^{\,a} \times R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(\mathrm{G}_m)^b \times R^{(1)}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(\mathrm{G}_m)^c, \tag{1}$$

$\dim T = a + 2b + c$. Ясно, что тор T всегда рационален над $\mathbf{R}$. Из представления (1) следует, что

$$T(\mathbf{R}) = (\mathbf{R}^*)^a \times (\mathbf{C}^*)^b \times SO(2,\mathbf{R})^c,$$

где $SO(2,\mathbf{R})$ – специальная ортогональная группа (окружность $x^2 + y^2 = 1$).

10.2. Торы над неархимедовым полем. Пусть k – локально-компактное поле, топология которого определяется нетривиальным неархимедовым нормированием v (логарифмическим). Известно, что k есть либо конечное расширение поля p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$, либо поле формальных степенных рядов от одной переменной с конечным полем констант. Пусть

$$O = \{\alpha \in k \mid v(\alpha) \geq 0\} -$$

кольцо целых элементов поля k,

$$\wp = \{\alpha \in k \mid v(\alpha) > 0\} -$$

максимальный идеал кольца O,

$$E = \{\alpha \in k \mid v(\alpha) = 0\} -$$

группа обратимых элементов (единиц) кольца O. Пусть F – конечное расширение поля k. Нормирование v поля k однозначно продолжается до нормирования w поля F, пусть O_F, $\wp_F$, E_F – соответствующие объекты поля F. Известно, (Боревич - Шафаревич [1]), что

$$\wp O_F = \wp_F^e,\ [O_F/\wp_F : O/\wp] = f,\ ef = n,\ n = (F:k),\ N_{F/k}(\wp_F) = \wp^f.$$

Если расширение F/k является расширением Галуа с группой П, то O_F, $\wp_F$, E_F являются П-модулями.

Пусть теперь T – тор, определенный над неархимедовым локальным полем k. Поскольку тор T представим в качестве замкнутой подгруппы полной линейной группы $\mathrm{GL}_k(m)$ для некоторого m и группа $\mathrm{GL}(m,k)$ локально-компактна в топологии, определяемой топологией поля k, то группа точек $T(k)$ также локально-компактна в этой топологии. Замечательным фактом является наличие канонической целой структуры в торе T.

10.3. Целые структуры в линейных алгебраических группах. Рассмотрим сначала более общую задачу. Пусть k есть поле частных некоторого коммутативного кольца O и G – произвольная линейная алгебраическая группа, определенная над полем k. *Целой формой* группы G будем называть групповую схему X конечного типа над кольцом O с условием, чтобы $X \otimes_O k \cong G$. Если $A = O[X]$ – кольцо регулярных функций на схеме X, то наличие групповой структуры на X эквивалентно существованию в O-алгебре A структуры алгебры Хопфа, (см. §1), причем алгебры Хопфа $A \otimes_O k$ и $k[G]$ должны быть изоморфными. Фиксируя изоморфизм, можно считать, что A есть O-порядок в кольце $k[G]$, причем структуры алгебр Хопфа на A и $k[G]$ согласованы. Таким образом, вопрос об описании всех групповых O-форм k-группы G сводится к нахождению всех подколец A в кольце $k[G]$ со свойствами:

1) $A \cap k = O$, $A \otimes_O k \cong kA = k[G]$,

2) A есть алгебра Хопфа конечного типа над O, индуцирующая строение алгебры Хопфа на $k[G]$.

Целые формы группы G всегда существуют, один из методов их построения следующий. Группа G допускает точное представление в полную линейную группу $\mathrm{GL}_k(n)$. Таким образом, имеем эпиморфизм k-алгебр Хопфа $\varphi : k[\mathrm{GL}_k(n)] \to k[G]$. Кольцо $k[\mathrm{GL}_k(n)]$ имеет вид $k[x_{11}, .., x_{nn}, y^{-1}]$, $y = \det(x_{ij})$; O-алгебра $O[x_{11}, .., x_{nn}, y^{-1}]$ определяет в $\mathrm{GL}_k(n)$ целую групповую структуру $\mathrm{GL}_O(n)$ и $\varphi(O[x_{11}, .., x_{nn}, y^{-1}]) = A$ есть O-алгебра Хопфа в $k[G]$, $\mathrm{Spec}\, A = X$ есть O-форма k-группы G. Заметим, что все формы, получаемые из линейных представлений, имеют конечный тип над O, они приведены и строго плоские над O. Вопрос о классификации всех O-форм данной k-группы G, на мой взгляд, даже не ставился, это далеко не простая задача.

Вернемся к нашему случаю локального неархимедова поля k с кольцом целых O и максимальным идеалом $\wp$. Вопрос о редукции группы G по модулю $\wp$ состоит в построении для группы G, O-формы X, тогда групповая $\mathbf{F}_\wp$-схема $X \otimes_O \mathbf{F}_\wp = \bar{X}$ называется *редукцией* схемы G по модулю $\wp$, $\mathbf{F}_\wp = O/\wp$. Ясно, что редукция зависит от выбора целой формы X. Нетривиальный вопрос заключается в существовании схемы X такой, чтобы редукция $\bar{X}$ зависела бы только от группы G, но не от выбора случайного вложения $G \to \mathrm{GL}_k(n)$. Для алгебраических торов T такую схему найти можно. Пусть F – конечное расширение поля k, U_F – максимальная компактная

подгруппа локально-компактной группы $T(F)$, она определена однозначно. Выберем какое нибудь k-линейное вложение $T \subset \mathrm{GL}(V)$, где V – векторное пространство конечной размерности над полем k, и выберем в пространстве V O-решетку M, инвариантную относительно действия группы $U = U_k$. Такая решетка всегда существует, ибо группа U компактна. В самом деле, пусть M_1 – произвольная решетка в V и U_1 – множество таких элементов $g \in U$, что $gM_1 = M_1$. Тогда U_1 является открытой подгруппой в U и фактор U/U_1 конечен. Следовательно, решетка M, порожденная решетками gM_1, $g \in U/U_1$, будет уже инвариантной относительно действия группы U. Базис решетки M определяет алгебру Хопфа $O[x_{11}, .., x_{nn}, y^{-1}]$ в $k[\mathrm{GL}(V)]$, ограничение которой на тор T есть O-алгебра Хопфа A в алгебре $k[T]$. Сконструированная O-форма $X = \mathrm{Spec}\, A$ k-тора T обладает следующими характеристиками:

1) $X(O_F) = U_F$;

2) X имеет конечный тип над O;

3) $A = \{f \in k[T] \mid f(a) \in O_F \ \ \forall a \in U_F\}$,

где F пробегает все конечные расширения поля k.

Описание алгебры Хопфа A формулой 3) следует из аналогичной характеристики алгебры $O[x_{11}, .., x_{nn}, y^{-1}]$ в $k[x_{11}, .., x_{nn}, y^{-1}]$ и условия 1), т.е. из выбора решетки M. Но теперь мы видим, что условие 3) не зависит от линейного вложения тора T, O-алгебра A однозначно определяется самим тором T, поэтому O-форму $X = \mathrm{Spec}\, A$ естественно назвать *канонической целой формой* тора T. Редукцией тора T по простому модулю будем называть редукцию его канонической целой формы. Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. Кольцо A, определяемое формулой 3), является алгеброй конечного типа над кольцом O, $A \cap k = O$; алгебра A строго плоская над O и обладает структурой алгебры Хопфа над O, индуцирующей исходную структуру алгебры Хопфа на $k[T]$. Схема $X = \mathrm{Spec}\, A$ есть O-форма тора T, причем $X(O_F) = U_F$, $F \supset k$, $(F : k) < \infty$. $\triangle$

Пусть L – нормальное сепарабельное поле разложения тора T, конечной степени над k, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$, $\hat{T}$ – Π-модуль рациональных характеров тора T. Положим

$$\tilde{A} = \{f \in L[T] \mid f(a) \in O_F \ \ \forall a \in U_F, \ \ F \supset L\ \}.$$

Предложение 1. $\tilde{A} = O_L A \ \cong \ O_L \otimes_O A$, $A = \tilde{A}^{\Pi}$.

Доказательство. Ясно, что $O_L A \subset \tilde{A}$. Пусть $f \in \tilde{A}$, $f(a) = a_1\omega_1 + \cdots + a_n\omega_n$, где $\omega_1, .., \omega_n$ – целый базис расширения O_L/O, $a_i \in O$. Функции x_i, $x_i(a) = a_i$ лежат в A, следовательно, $f = \omega_1 x_1 + \cdots + \omega_n x_n \in O_L A \ \cong \ O_L \otimes_O A$. $\triangle$

Предложение 2. Кольцо $\tilde{A}$ содержит групповое кольцо $O_L[\hat{T}]$.

Доказательство. Пусть $\chi \in \hat{T}$. Тогда $\chi(U_F)$ есть компактная группа в F^*, следовательно, $\chi(U_F) \subset O_F^* \subset O_F$. Таким образом, $\tilde{A} \supset \hat{T}$. $\triangle$

Группа $T(L) = \mathrm{Hom}(\hat{T}, L^*) \ \cong \ (L^*)^d$, $d = \dim T$, снабжается топологией прямого произведения и является локально-компактной группой. Подгруппа

$$\mathrm{Hom}(\hat{T}, O_L^*) \ \cong \ (O_L^*)^d$$

является максимальной компактной подгруппой U_L группы $T(L)$. Заметим, что изоморфизм $U_L \ \cong \ (O_L^*)^d$ не является Π-изоморфизмом. Всякий автоморфизм $\sigma \in \Pi$ непрерывно действует на $T(L)$ и U_L, и $U = U_L^{\Pi}$. Таким образом, максимальная компактная подгруппа U группы $T(k)$ описывается на языке характеров:

$$U = \mathrm{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, O_L^*).$$

Теорема 2. Если расширение L/k – неразветвлено, то каноническая целая модель k-тора T, разложимого над L, имеет вид $X = \operatorname{Spec} A$, где $A = (O_L[\hat{T}])^{\Pi}$. Схема X является тором над кольцом O, редукция $X \otimes_O \mathbf{F}_\wp$ есть тор над конечным полем $\mathbf{F}_\wp = O/\wp$.

Доказательство. Заметим, что в наших условиях $O_L A = O_L[\hat{T}]$. Это доказывается тем же приемом, как и в §3 при построении L/k-форм, используя то обстоятельство, что в неразветвленном случае существует нормальный базис кольца O_L над O, дискриминант которого является единицей кольца O. Таким образом, $X = \operatorname{Spec} A$ есть O-групповая форма тора T. Из существования нормального базиса следует, что для любой коммутативной O-алгебры C естественное отображение $C \to O_L \otimes_O C$ является мономорфизмом и $(O_L \otimes_O C)^{\Pi} = C$. Поэтому схема X представляет функтор

$$C \to X(C) = \operatorname{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, (O_L \otimes_O C)^*).$$

Если F конечное расширение поля k, то

$$X(O_F) = \operatorname{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, (O_L \otimes_O O_F)^*) \subset \operatorname{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, (O_L \otimes_O F)^*) =$$
$$= \operatorname{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, (L \otimes_O F)^*) = T(F)$$

и $X(O_F)$ – максимальная компактная подгруппа в локально-компактной группе $T(F)$. Итак, X - каноническая целая модель тора T. $\triangle$

Определение. Пусть T – алгебраический тор над полем k, X – его каноническая O-форма, $\bar{X}$ – редукция по модулю $\wp$. Редукцию назовем *очень хорошей*, если $\bar{X}$ есть $\mathbf{F}_\wp$-тор; *хорошей*, если $\bar{X}$ есть алгебраическая группа над $\mathbf{F}_\wp$; *плохой*, если групповая $\mathbf{F}_\wp$-схема $\bar{X}$ не является приведенной.

10.4. Каноническая целая форма тора $R_{F/k}(\mathbf{G}_m)$. Напомним, что k – полное неархимедово локально-компактное поле, F – его конечное расширение, $\omega_1, .., \omega_n$ – целый базис расширения F/k, L – нормализация поля F в k_s, $\Pi = \operatorname{Gal}(L/k)$, $T = R_{F/k}(\mathrm{G}_m)$. Выберем базис $\chi_1, .., \chi_n$ группы характеров $\hat{T}$, на котором группа Π действует перестановками, $\hat{T} \cong \mathbf{Z}[\Pi/\Pi_1]$, где Π_1 – стабилизатор элемента χ_1, $\Pi_1 = \operatorname{Gal}(L/F)$. Имеем

$$L[T] = L[\hat{T}] = L[\chi_1, .., \chi_n, \chi_1^{-1}, .., \chi_n^{-1}] \supset L[\chi_1, .., \chi_n].$$

Ввиду пермутационности действия группы Π это вложение Π коммутирует с действием группы Π. Заметим, что $\operatorname{Spec}(L[\chi_1, .., \chi_n])^{\Pi} = \mathbf{A}_k^n$ – аффинное пространство над k. Диагональное вложение

$$L[\chi_1, .., \chi_n] \to L[\chi_1, .., \chi_n] \otimes_L L[\hat{T}]$$

показывает, что мы имеем морфизм $T \times_k \mathbf{A}_k^n \to \mathbf{A}_k^n$, являющийся естественным действием тора T на $\mathbf{A}_k^n$. По-другому, тор T является максимальным тором группы $\mathrm{GL}_k(n)$, координатное кольцо $k[T] = (L[\hat{T}])^{\Pi}$ проще всего описать, используя регулярное представление группы $T(k) = F^*$ в базисе $\omega_1, .., \omega_n$. Пусть $\alpha = x^1\omega_1 + \cdots + x^n\omega_n$ – общий элемент поля F, x^i – координатные функции со значениями в k, $\omega_i\omega_j = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \omega_k$, c_{ij}^k – структурные константы, $c_{ij}^k \in O$. Матричное представление C_α элемента α имеет вид

$$\alpha(\omega_1, .., \omega_n) = (\omega_1, .., \omega_n)C_\alpha, \quad \alpha\omega_j = \sum_i x_j^i \omega_i,$$

$$C_\alpha = (x_j^i), \quad \det C_\alpha = y = N_{F/k}(\alpha), \quad k[T] = k[x_j^i, y^{-1}].$$

Функции x^i_j линейно зависят от $x^1, .., x^n$, последние алгебраически независимы, $x^i_j = \sum_k c^i_{kj} x^k$. Имеем вложение O-модулей $< x^i_j > \subset\ < x^k >$. На самом деле эти модули совпадают. Отсюда

$$k[T] = k[x^1, .., x^n, y^{-1}].$$

Рациональный характер χ_i имеет представление

$$\chi_i = \sum_k \omega^{(i)}_k x^k,$$

где $\omega^{(i)}$ – сопряженный элемент к ω в L. Функция $y = \chi_1 \cdots \chi_n$ есть форма n-й степени от n переменных $x^1, .., x^n$ с коэффициентами из O. Когрупповая структура определена в алгебре $L[T] = L[\chi_1, .., \chi_n, y^{-1}]$ следующими формулами:

$$m^*(\chi_i) = \chi_i \otimes \chi_i,$$

$$i^*(\chi_i) = {\chi_i}^{-1},$$

$$e^*(\chi_i) = 1.$$

В координатах $x^1, .., x^n$ эти формулы выглядят следующим образом:

$$m^*(x^k) = \sum_{i,j} c^k_{ij} x^i \otimes x^j,$$

$$i^*(x^k) = F^k/y, \quad {\chi_i}^{-1} = \frac{F^1}{y}\omega^{(i)}_1 + \cdots + \frac{F^n}{y}\omega^{(i)}_n,$$

$$e^*(x^k) = c^k,$$

где $1 = \sum_k c^k \omega_k$. Рассмотрим кольцо $A = O[x^1, .., x^n, y^{-1}]$. Написанные выше формулы показывают , что операторы m^*, i^*, e^* действуют в этом кольце и превращают его в алгебру Хопфа. Схема $X = \operatorname{Spec} A$ является тогда O-групповой формой тора $R_{F/k}(\mathrm{G}_m)$, обозначим ее $R_{O_F/O}(\mathrm{G}_m)$. Из построения видно, что $X(B) = (O_F \otimes_O B)^*$ для всякой коммутативной O-алгебры B, в частности, $X(O) = O_F^*$. Поскольку $O[x^1, .., x^n, y^{-1}]$ есть локализация кольца многочленов, то схема X является гладкой. Имеем следующий факт.

Предложение. Редукция тора $R_{F/k}(\mathrm{G}_m)$ по модулю $\wp$ является связной алгебраической группой над конечным полем $F_\wp = O/\wp$. $\triangle$

Если расширение F/k неразветвлено, то редукция $\bar{X}$ есть тор над $F_\wp$, $\bar{X} = R_{r_F/r_k}(\mathrm{G}_m)$. Здесь r_k и r_F означают поля вычетов колец O и O_F соответственно. Пусть теперь F - разветвленное расширение поля k, $k \subset E \subset F$, E - максимальное неразветвленное расширение поля k в F, F/E - чисто разветвленное, $(E : k) = f$, $(F : E) = e$, $ef = n$. Редукция $\bar{X}$ как связная алгебраическая коммутативная группа является прямым произведением тора R и унипотентной группы N, все определены над конечным полем вычетов r_k. Разложение $\bar{X} = RN$ можно установить, зная разложение группы r_k-точек: $\bar{X}(r_k) = R(r_k)N(r_k)$. Поскольку схема X гладкая, то редукция $O \to O/\wp = r_k$ определяет эпиморфизм групп

$$X(O) \to X(r_k) = \bar{X}(r_k) \ \cong\ (O_F/\wp)^*.$$

Пусть $\alpha \in X(O) = O_F^*$. Элемент α можно представить в виде бесконечного ряда

$$\alpha = a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + .. \ ,$$

где $a_i \in O_E$, π – образующий элемент главного идеала $\wp_F$, $\wp = \wp_E = \wp_F^e$. Имеем однозначное представление

$$\alpha = a\varepsilon,\ a \equiv a_0 (mod\ \wp_E),\ \varepsilon \equiv 1 (mod\ \wp_F),$$

откуда

$$\alpha \equiv a(1 + b_1\pi + \cdots + b_{e-1}\pi^{e-1})\ (mod\ \wp).$$

Ясно, что $(\varepsilon - 1)^e \equiv 0 (mod\ \wp)$, т.е. образ элемента ε в группе $X(r_k)$ является унипотентным. Теперь очевидна следующая теорема.

Теорема. Редукция $\bar{X}$ тора $R_{F/k}(\mathrm{G}_m)$ есть прямое произведение тора $R_{r_F/r_k}(\mathrm{G}_m)$ и унипотентной группы N размерности $(e-1)f$. $\triangle$

Если $e < p$, где p – характеристика поля r_k, то группа N изоморфна прямой сумме аддитивных групп G_{a,r_k} в количестве $(e-1)f$ штук.

10.5. Каноническая форма норменного тора $R^{(1)}_{F/k}(\mathbf{G}_m)$. Пусть $A = O[x^1, .., x^n, y^{-1}]$ – целая форма тора $R_{F/k}(\mathrm{G}_m)$, $y = N(x_1, .., x_n)$ – норменный многочлен с целыми коэффициентами. Тор $R^{(1)}_{F/k}(\mathrm{G}_m)$ определен уравнением $N(x_1, .., x_n) = 1$. Поэтому фактор-кольцо $B = O[x_1, .., x_n]/(y-1)$ является алгеброй Хопфа и $\mathrm{Spec}\, B = Y$ есть каноническая форма тора $R^{(1)}_{F/k}(\mathrm{G}_m)$. Если расширение F/k – неразветвлено, то Y снова тор над O, если же F/k разветвлено с индексом ветвления $e = (F : E)$, $k \subset E \subset F$, то редукция $\bar{Y}$ уже не будет тором. В самом деле, имеем вложение O-групп $Y \to X = \mathrm{Spec}\, A$, что позволяет рассматривать редукцию $\bar{Y}$ как подгруппу в $\bar{X} = R_{r_E/r_k}(\mathrm{G}_m) \times N$. Группа N – унипотентна, поэтому она целиком содержится в $\bar{Y}$. Пусть $e_1, .., e_f$ – базис расширения r_E/r_k, $u_1, ..u_f$ – соответствующие координатные функции. Норменная форма y, рассматриваемая на r_E, является e-й степенью норменной формы $z = z(u_1, ., u_f) : y \equiv z^e (mod\ \wp)$. Пусть $C = r_k[u_1, .., u_f]/(z^e - 1)$, $Z = \mathrm{Spec}\, C$.

Теорема. Редукция $\bar{Y}$ тора $R^{(1)}_{F/k}(\mathrm{G}_m)$ есть прямое произведение групповых схем над конечным полем $r_k = O/\wp$

$$\bar{Y} = Z \times_{r_k} N.$$

Если p не делит e, то $\bar{Y}$ – алгебраическая группа над r_k, несвязная при $e > 1$. Если $p|e$, то $\bar{Y}$ не является приведенной, редукция плохая. $\triangle$

§11. ТОРЫ НАД ГЛОБАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ

11.1. *Глобальным полем* будем называть либо поле алгебраических чисел конечной степени над полем рациональных чисел, либо поле алгебраических функций одной переменной с конечным полем констант. Пусть k – глобальное поле и v – нормирование поля k. Символом k_v будем обозначать пополнение поля k в точке v. Если v – неархимедова точка, то часто вместо k_v будем как и раньше писать $k_\wp$, где $\wp$ – идеал нормирования v. Пусть S – конечное множество неэквивалентных нормирований поля k, содержащее множество S_∞ всех архимедовых нормирований, S_∞ пусто для функционального поля. Напомним определение кольца аделей A_k поля k. Введя топологию прямого произведения на кольце

$$A_k^S = \prod_{v \in S} k_v \times \prod_{v \notin S} O_v,$$

получим локально-компактное кольцо. Здесь O_v - кольцо нормирования неархимедова поля k_v. Если $S \subset S'$, то существует естественное вложение колец $\varphi : A_k^S \to A_k^{S'}$

и $\varphi(A_k^S)$ открыто в $A_k^{S'}$. Определим *кольцо аделей* A_k как индуктивный предел

$$A_k = \lim_{\to S} A_k^S$$

с топологией, в которой A_k^S открыто в $A_k^{S'}$ для любого S. Тогда A_k – локально-компактное кольцо. Поле k вкладывается в A_k диагональным образом, k – дискретное подмножество в A_k и фактор A_k/k – компактен, С.Ленг [1]. Обратимые элементы кольца A_k также образуют локально-компактную группу, называемую *группой иделей* поля k и обозначаемую через I_k,

$$I_k = \lim_{\to S} I_k^S.$$

Подгруппа k^* является дискретной подгруппой в I_k. Каждый элемент $a \in I_k$ является последовательностью $\{a_v\}$, причем почти для всех нормирований v компонента a_v есть единица поля k_v. Поэтому можно определить норму иделя $a = \{a_v\}$, полагая

$$\|a\| = \prod_v v(a_v).$$

Здесь v – приведенная мультипликативная норма поля k. Если $a \in k^*$,то $\|a\| = 1$. Ясно, что $a \to \|a\|$ есть гомоморфизм группы иделей I_k в группу $\mathbf{R}_+$ положительных вещественных чисел. Пусть $I_k^{(1)}$ – ядро этого гомоморфизма. Тогда $k^* \subset I_k^{(1)}$ и фактор-группа $I_k^{(1)}/k^*$ – компактна. Более подробное изложение этих фактов из теории алгебраических полей можно найти в сборнике лекций "Алгебраическая теория чисел" [1].

Пусть теперь L/k – конечное расширение Галуа с группой Галуа Π. Тогда A_L и I_L являются Π-модулями , причем

$$A_L^{\Pi} = A_k, \quad I_L^{\Pi} = I_k.$$

Пусть T – тор, определенный над k и разложимый над L, имеем локально-компактную группу $T(A_k)$ в адельной топологии, которая индуцирована вложением $T(A_k) \subset \mathrm{GL}\,(N, A_k)$. Далее

$$T(A_L) = \mathrm{Hom}\,(\hat{T}, I_L), \quad T(A_k) = \mathrm{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, I_L).$$

Рассмотрим строение группы $T(A_k)$ более подробно. Обозначим через S_L множество всех точек поля L, продолжающих точки из S. Тогда множество S_L стабильно относительно действия группы Π. Определим $T(A_L^{S_L})$ по формуле

$$T(A_L^{S_L}) = \mathrm{Hom}\,(\hat{T}, I_L^{S_L}),$$

пусть $T(A_k^S)$ есть $T(A_L^{S_L})^{\Pi} = \mathrm{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, I_L^{S_L})$,

$$T(A_k) = \lim_{\to S} T(A_k^S).$$

Группа $T(A_k^S)$ представима в виде прямого произведения. В самом деле,

$$T(A_k) = \mathrm{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, \prod_{w \in S_L} L_w^*) \times \mathrm{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, \prod_{w \notin S_L} O_{L,w}^*) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, \prod_{v\in S}\prod_{w|v} L_w^*) \times \mathrm{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, \prod_{v\notin S}\prod_{w|v} O_{L,w}^*) =$$

$$= \prod_{v\in S} \mathrm{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, \prod_{w|v} L_w^*) \times \prod_{v\notin S} \mathrm{Hom}_{\Pi}(\hat{T}, \prod_{w|v} O_{L,w}^*) =$$

$$= \prod_{v\in S} \mathrm{Hom}_{\Pi_w}(\hat{T}, L_w^*) \times \prod_{v\notin S} \mathrm{Hom}_{\Pi_w}(\hat{T}, O_{L,w}^*) =$$

$$= \prod_{v\in S} T(k_v) \times \prod_{v\notin S} U_v,$$

где Π_w – группа разложения, т.е. подгруппа группы Π, оставляющая точку w неподвижной, $U_v = \mathrm{Hom}_{\Pi_w}(\hat{T}, O_{L,w}^*)$ – максимальная компактная подгруппа группы $T(k_v)$, и для каждой точки v мы выбираем только одну группу Π_w. Группа $E(T,S) = T(k) \cap T(A_k^S)$ называется группой S-единиц тора T. Поскольку группа $T(L) \cap T(A_L^{S_L})$ имеет конечный тип (обобщенная теорема Дирихле), то и ее подгруппа Π-инвариантов $E(T,S)$ также конечного типа. Если $S = S_\infty$, то группа $E(T) = E(T, S_\infty)$ просто называется группой единиц тора T. Если k – функциональное поле, то множество S_∞ пусто и группа $E(T)$ конечна, совпадающая с группой $T(\mathbf{F}_q)$, где $\mathbf{F}_q$ – поле констант.

Предложение. Группа $T(k)$ является дискретной подгруппой в группе $T(A_k)$.

Это следует из дискретности группы $T(L) = (L^*)^d$ в группе $T(A_L) = I_L^d$. Поэтому $T(k) = T(L) \cap T(A_k)$ дискретна в $T(A_k)$. $\triangle$

11.2. Каноническая целая модель тора над полем алгебраических чисел. Пусть T – тор, определенный над полем k алгебраических чисел, L – его минимальное поле разложения, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$. Если p – простой идеал кольца целых O поля k, то пусть P – простой идеал кольца O_L, делящий идеал p, $\Pi_P = \mathrm{Gal}\,(L_P/k_p)$. В п. 10.3 показано, как построить локальную целую модель X_p тора $T \otimes_k k_p$, определенную над кольцом O_p. Для всех точек p модель X_p имеет вид $\mathrm{Spec}\, B_p$, где $B_p \subset k_p[T]$. Рассмотрим O-схему $Y = \mathrm{Spec}\,(O_L[\hat{T}])^\Pi$. В общем случае это не групповая схема, однако $Y \otimes_O k \cong T$, т.е. Y есть O-форма многообразия T. Далее для всех точек p, неразветвленных в L, $Y_p = X_p$. Зафиксируем вложение $f \to 1 \otimes f$ кольца $k[T]$ в $k_p[T] = k_p \otimes_k k[T]$. Пусть $C_p = B_p \cap k[T]$. Положим

$$C = \bigcap_p C_p.$$

Тогда C есть алгебра Хопфа над O и поскольку $C \supset (O_L[\hat{T}])^\Pi$, то $X = \mathrm{Spec}\, C$ является O-формой тора T. Из конструкции следует, что $X \otimes_O O_p = X_p$ для всех p, поэтому $X(O_p)$ – максимальная компактная подгруппа группы $T(k_p)$. Назовем группу X канонической целой моделью тора T. Редукцией тора T по модулю p будем называть групповую $\mathbf{F}_p$-схему $\bar{X}_p = X \otimes_O \mathbf{F}_p$, $\mathbf{F}_p = O/p$. Пусть d есть дискриминант расширения L/k. Точки p, не входящие в дискриминант, являются точками очень хорошей редукции, т.е. группа $\bar{X}_p$ снова тор. В некоторых случаях известны редукции и по простым точкам, делящим дискриминант.

Пример 1. Пусть $k = \mathbf{Q}$, $O = \mathbf{Z}$, $L = \mathbf{Q}(\sqrt{3})$, $T = R_{L/Q}^{(1)}(\mathrm{G}_m)$, $\mathbf{Z}$-группа X задана матрицей общего вида

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}, \quad x^2 - 3y^2 = 1.$$

Точка 2 является точкой плохой редукции, 3 – точка хорошей редукции, но группа $\bar{X}_3$ несвязна, треугольна, $\bar{X}_p$ есть $\mathbf{F}_p$-тор для всех $p \neq 2, 3$.

Пример 2. Пусть $L = \mathbf{Q}(\alpha)$, где α – корень многочлена $x^3 - 7x + 7$, $T = R^{(1)}_{L/Q}(\mathrm{G}_m)$, $d = 49$, поэтому расширение $L/\mathbf{Q}$ – циклическое степени 3. Каноническая $\mathbf{Z}$-форма X не имеет точек плохой редукции. Редукция по модулю 7 имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad a_0^3 \equiv 1 \ (mod\ 7).$$

Схема X является гладкой над $\mathbf{Z}$.

Каноническая модель X тора T обладает следующим свойством минимальности. Пусть G – линейная алгебраическая группа над полем k, действующая точно на линейном пространстве V. Тогда имеем действие адельной группы $G(A)$ на адельном пространстве $A \otimes_k V$, $A = A_k$. Пусть M – решетка в V, $G^M(V)$ – стабилизатор решетки M в группе $G(A)$. Имеем двухстороннее фактор-пространство $G(k)\backslash G(A)/G^M(A)$, которое является конечным (Борель [1]). Обозначим число этих классов через $h(G, M)$. Оно играет важную роль в арифметике линейных групп и однородных пространств. В случае, когда $G = T$ есть алгебраический тор, фактор $T(A)/T(k)T(A^\infty)$ является конечной группой.

Определение. Группой классов тора T называется фактор-группа

$$H(T) = T(A)/T(k)X(A^\infty), \ A^\infty = \prod_{v|\infty} k_v \prod_{\wp} O_\wp.$$

Порядок этой группы $h(T)$ является минимальным среди всех возможных решеток M. В следующих параграфах будут проделаны некоторые вычисления.

Когомологии адельных групп. Размышляя над соотношениями, появившимися в теории полей классов, Дж. Тейт доказал теорему, которая явилась основой для получения различных соотношений двойственности в когомологиях. Мы сейчас подробно расмотрим этот вопрос. Пусть Π - конечная группа порядка n, M - Π-модуль, $\alpha \in H^2(\Pi, M)$ - класс когомологий. Класс α определяет некоторый Π-модуль $\bar{M}$, называемый модулем разложения класса α. Модуль $\bar{M}$ есть прямая сумма $\mathbf{Z}$-модулей $M \oplus I_1$, где I_1 есть свободная группа с $(n-1)$ образующими x_σ, $\sigma \in \Pi$, $\sigma \neq 1$. Строение Π-модуля на $\bar{M}$ определяется по формуле

$$\sigma(x_\tau) = x_{\sigma\tau} - x_\sigma + a(\sigma, \tau),$$

где $a(\sigma, \tau)$ - коцикл из класса α. Отображение

$$\varphi \ : \ \bar{M} \to \mathbf{Z}[\Pi],$$

определяемое условиями

$$\varphi(a) = 0, \ a \in M; \ \varphi(x_\sigma) = \sigma - 1,$$

является Π-гомоморфизмом с ядром M и образом I, где I - идеал кольца $\mathbf{Z}[\Pi]$, порожденный элементами $\sigma - 1$. Имеем пару точных последовательностей

$$0 \ \to M \to \bar{M} \xrightarrow{\varphi} I \to \ 0, \tag{1}$$

$$0 \ \to I \to \mathbf{Z}[\Pi] \to \mathbf{Z} \to \ 0. \tag{2}$$

Теорема 1. Пусть Π - конечная группа, M – Π-модуль, $\alpha \in H^2(\Pi, M)$ и $\bar{M}$ - модуль разложения класса α. Тогда следующие условия эквивалентны:

1). $H^1(\pi, M) = 0$ для всех подгрупп π группы Π и $H^2(\pi, M)$ - циклическая группа порядка $|\pi|$, порожденная ограничением α на π.

2). Π-модуль $\bar{M}$ когомологически тривиален.

Доказательство. Из (2) следует, что $\hat{H}^q(\pi, I) = \hat{H}^{q-1}(\pi, \mathbf{Z})$ для всех q. Это дает $\hat{H}^0(\pi, I) = H^2(\pi, I) = 0$. Последовательность (1) индуцирует тогда точную последовательность когомологий

$$0 \to H^1(\pi, M) \to H^1(\pi, \bar{M}) \xrightarrow{\varphi^*} H^1(\pi, I) \xrightarrow{\delta} H^2(\pi, M) \to H^2(\pi, \bar{M}) \to 0.$$

Пусть модуль $\bar{M}$ когомологически тривиален. Тогда $H^1(\pi, M) = 0$, а δ есть изоморфизм циклической группы $H^1(\pi, I) = \hat{H}^0(\pi, \mathbf{Z})$ порядка $[\Pi]$ на $H^2(\pi, M)$, причем из строения $\bar{M}$ следует, что образом образующей группы $H^1(\pi, I)$ при отображении δ является ограничение α на π. Этим доказана импликация 2)$\Rightarrow$ 1).

Обратно, пусть справедливо 1). Тогда φ^* - мономорфизм. Класс α есть образующая группы $H^2(\Pi, M)$. Возьмем I-коцепь $x = \{x_\sigma\}$ в $\bar{M}$, $\varphi(x_\sigma) = \sigma - 1 = f(\sigma)$ есть 1-коцикл в I и образ класса $f(\sigma)$ при отображении δ определяется коциклом

$$dx(\sigma, \tau) = \sigma(x_\tau) - x_{\sigma\tau} + x_\sigma = a(\sigma, \tau).$$

Таким образом, из построения видно, что δ есть эпиморфизм, и поскольку обе группы циклические и одинакового порядка, то δ - изоморфизм. Следовательно, $H^1(\pi, \bar{M}) = H^2(\pi, \bar{M}) = 0$ для любых подгрупп $\pi \subset \Pi$. Это завершает доказательство теоремы. $\triangle$

Если модуль M удовлетворяет условиям (1) теоремы 1, то класс α называется фундаментальным. Напомним, что символ $\hat{H}^q$ означает приведенную группу когомологий Тейта.

Теорема 2. Пусть Π-модуль M удовлетворяет условию (1) теоремы 1. Тогда существует изоморфизм

$$\hat{H}^q(\Pi, M) \cong \hat{H}^{q-2}(\Pi, \mathbf{Z}).$$

Доказательство. Из формул (1-2) получаются с учетом теоремы 1 изоморфизмы

$$\hat{H}^{q-2}(\Pi, \mathbf{Z}) \overset{\delta}{\cong} \hat{H}^{q-1}(\Pi, I) \overset{\delta'}{\cong} \hat{H}^q(\Pi, M).$$

Сверх того, можно показать, что $\delta' \cdot \delta$ есть умножение $\xi \mapsto \xi \cup \alpha$, где $\xi \in \hat{H}^{q-2}(\Pi, \mathbf{Z})$, $\alpha \in H^2(\Pi, M)$ - фундаментальный класс. $\triangle$

Следующую важную теорему доказал Накаяма [1].

Теорема 3. Пусть M - когомологически тривиальный Π-модуль и N - произвольный Π-модуль. Если один из модулей M или N не имеют кручения, то Π-модуль $M \otimes N$ (с операторами $\sigma(m \otimes n) = \sigma m \otimes \sigma n$) когомологически тривиален. $\triangle$

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть Π-модуль M удовлетворяет условию 1) теоремы 1 и модуль N не имеет кручения. Тогда имеем изоморфизм

$$\hat{H}^n(\Pi, N) \cong \hat{H}^{n+2}(\Pi, M \otimes N).$$

(Он получается умножением на фундаментальный класс $\alpha \in H^2(\Pi, M)$.)

Доказательство. Последовательности (1) и (2) умножим тензорно на N. Получим точные последовательности Π-модулей

$$0 \to M \otimes N \to \bar{M} \otimes N \to I \otimes M \to 0,$$

$$0 \to I \otimes N \to \mathbf{Z}[\Pi] \otimes N \to N \to 0.$$

Поскольку $\bar{M} \otimes N$ и $\mathbf{Z}[\Pi] \otimes N$ когомологически тривиальны, то

$$\hat{H}^n(\Pi, , N) \cong \hat{H}^{n+2}(\Pi, M \otimes N). \ \triangle$$

Следующие две теоремы носят название теорем двойственности Тейта-Накаямы.

Теорема 5. Пусть k – локальное поле, L– его конечное расширение Галуа, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$, T – тор, определенный над k и разложимый над L. Тогда имеем изоморфизм

$$\hat{H}^n(\Pi, \hat{T}) \ \cong \ \hat{H}^{2-n}(\Pi, T(L)).$$

Доказательство. Применим теорему 4 к Π-модулям L^* и $T(L) = \mathrm{Hom}\,(\hat{T}, L^*) = \hat{T}^0 \otimes L^*$, где $\hat{T}^0 = \mathrm{Hom}\,(\hat{T}, \mathbf{Z})$ – дуальный модуль. Локальная теория полей классов утверждает, что L^* удовлетворяет условию 1) теоремы 1.Поэтому

$$\hat{H}^n(\Pi, \hat{T}^0) \ \cong \ \hat{H}^{n+2}(\Pi, \hat{T}^0 \otimes L^*).$$

Остается заметить, что

$$\hat{H}^n(\Pi, \hat{T}^0) \ \cong \ \hat{H}^{-n}(\Pi, \hat{T}). \ \triangle$$

Пусть теперь k – глобальное поле, обозначим через C_k группу классов иделей поля k, $C_k = I_k/k^*$. Если L/k – конечное расширение Галуа, то из глобальной теории полей классов следует, что Π-модуль C_L удовлетворяет условию 1) теоремы 1. Отсюда имеем следующий факт.

Теорема 6. Пусть k глобальное поле, T - алгебраический k-тор, разложимый над L. Тогда имеется изоморфизм

$$\hat{H}^n(\Pi, \hat{T}) \ \cong \ \hat{H}^{2-n}(\Pi, C_L(T)),$$

где

$$C_L(T) = \mathrm{Hom}\,(\hat{T}, C_L) = \hat{T}^0 \otimes C_L. \ \triangle$$

Рассмотрим теперь точную последовательность

$$1 \to T(L) \to T(A_L) \to C_L(T) \to 0,$$

индуцированную точной последовательностью

$$1 \to L^* \to I_L \to C_L \to 0,$$

и перейдем к последовательности когомологий

$$1 \to T(k) \to T(A_k) \xrightarrow{\varphi} C_L(T)^{\Pi} \xrightarrow{\delta} H^1(L/k, T(L)) \xrightarrow{\psi} H^1(L/k, T(A_L)). \qquad (3)$$

Теорема 6 показывает, что группа $\hat{H}^0(L/k, C_L(T))$ конечна, отсюда следует, что $\mathrm{Ker}\,\psi$ - конечная группа, она называется группой Шафаревича-Тейта, обозначается $Ш(T)$ и представляет собой группу классов главных однородных пространств тора T, имеющих рациональные точки во всех пополнениях k_v поля k.

Группы Тейта $\hat{H}^q(L/k, T(A_L))$ выражаются через локальные характеристики:

Предложение 1. Пусть k - глобальное поле. Тогда имеем разложение в прямую сумму

$$\hat{H}^n(L/k, T(A_L)) = \sum_v \hat{H}^n(L_w/k_v, T(L_w)),$$

где w - какая-нибудь одна точка поля L, продолжающая точку v поля k.

Доказательство. Мы видели выше, что

$$T(A_L) = \lim_{\to S_L} T(A_L^{S_L}),$$

где S_L - конечное множество точек w поля L, содержащее все сопряженные. Когомологии конечных групп коммутируют со взятием индуктивного предела, а любые когомологии коммутируют с прямым произведением, так что достаточно рассмотреть когомологии различных частей. Имеем

$$T(A_L^{S_L}) = \prod_{w \in S_L} T(L_w) \times \prod_{w \notin S_L} T(O_{L,w}) = \prod_{v \in S} \prod_{w|v} T(L_w) \times \prod_{v \notin S} \prod_{w|v} T(O_{L,w}),$$

где S_L состоит из всех делителей точек множества S. Тогда

$$\hat{H}^n(\Pi, T(A_L^{S_L})) = \prod_{v \in S} \hat{H}^n(\Pi_w, T(L_w)) \times \prod_{v \notin S} \hat{H}^n(\Pi_w, T(O_{L,w})),$$

где w - одна из точек, продолжающих v. Пусть S содержит все разветвленные в L нормирования. Тогда $O_{L,w}^*$ - когомологически тривиальный Π_w-модуль, поэтому $T(O_{L,w}) = \mathrm{Hom}\,(\hat{T}, O_{L,w}^*)$ также когомологически тривиален. В этом случае

$$\hat{H}^n(\Pi, T(A_L^{S_L})) = \sum_{v \in S} \hat{H}^n(\Pi_w, T(L_w)).$$

Переходя к пределу, получаем

$$\hat{H}^n(\Pi, T(A_L)) = \sum_v \hat{H}^n(\Pi_w, T(L_w)) = \sum_v \hat{H}^n(L_w/k_v, T(L_w)). \quad \triangle$$

Следствие 1.

$$H^1(L/k, T(A_L)) = \sum_v H^1(k_v, T(\bar{k}_v)).$$

Доказательство вытекает из того, что $H^1(L_w, T(\bar{L}_w)) = 0$ для всех w, поскольку L_w - поле разложения тора T.

Следствие 2.

$$Ш(T) = \mathrm{Ker}\,[H^1(k, T(k)) \to \prod_v H^1(k_v, T(\bar{k}_v))]. \quad \triangle$$

Перепишем теперь последовательность (3) в форме

$$1 \to T(k) \to T(A_k) \xrightarrow{\varphi} C_L(T)^{\Pi} \xrightarrow{\delta} Ш(T) \to 0. \tag{4}$$

Для всякого характера $\chi \in (\hat{T})_k$ будем обозначать той же буквой его продолжение на группу $T(A_k)$, $\chi : T(A_k) \to I$, $\chi(a) = \{\chi(a_v)\}$, $a = \{a_v\} \in T(A_k)$. Положим

$$T^{(1)}(A_k) = \{a \in T(A_k) \mid \chi(a) \in I_k^{(1)} \quad \forall \chi \in (\hat{T})_k\},$$

$$T^{(1)}(A_k^S) = T^{(1)}(A_k) \cap T(A_k^S).$$

Ясно, что $T(k) \subset T^{(1)}(A_k)$, $T(L) \subset T^{(1)}(A_L)$. Имеем $C_L = C_L^{(1)} \times \mathbf{R}_+$, если L – числовое поле и $C_L = C_L^{(1)} \times \mathbf{Z}_+$, если L – функциональное. Группа $C_L^{(1)} = I_L^{(1)}/L^*$ –

компактна (Ленг [1]). При отображении $T(A_L) \to C_L(T)$ группа $T^{(1)}(A_L)$ отображается в группу

$$C_L^{(1)}(T) = \mathrm{Hom}\,(\hat{T}, C_L^{(1)}) \subset \mathrm{Hom}\,(\hat{T}, C_L) = C_L(T).$$

Группа $C_L^{(1)}(T)$ – компактна. В последовательности

$$1 \to T(k) \to T^{(1)}(A_k) \xrightarrow{\varphi} C_L^{(1)}(T)^{\Pi} \xrightarrow{\delta} Ш(T) \to 0,$$

полученной из (4), $Im(\varphi) = T^{(1)}(A_k)/T(k)$ имеет конечный индекс в $C_L^{(1)}(T)^{\Pi}$. Поскольку группа $C_L^{(1)}(T)^{\Pi}$ компактна, то имеем утверждение.

Предложение 2. Группа $T^{(1)}(A_k)/T(k)$ – компактна. $\triangle$

11.4. Спуск основного поля. Пусть k – глобальное поле, F/k – конечное сепарабельное расширение, T – тор над полем F, $T_0 = R_{F/k}(T)$ – k-тор. Далее, пусть L/k – конечное расширение Галуа, содержащее поле разложения тора T_0, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$, $\pi = \mathrm{Gal}\,(L/F)$. Тогда $\hat{T}$ есть π-модуль, а $\hat{T}_0 = \mathbf{Z}[\Pi] \otimes_\pi \hat{T}$ – Π-модуль. Пусть u – нормирование поля k, v – его продолжение на F, w – продолжение v на L. Будем это записывать в форме $w|v|u$. Для всякого конечного множества точек S поля k множество S_F состоит из всех точек поля F, лежащих над S, а S_L – из всех точек поля L, лежащих над S_F. Тогда

$$T_0(A_k^S) = \mathrm{Hom}_{\,\Pi}(\hat{T}_0, I_L^{S_L}) = \mathrm{Hom}_{\,\Pi}(\mathbf{Z}[\Pi] \otimes_\pi \hat{T}, I_L^{S_L}) = \mathrm{Hom}_{\,\pi}(\hat{T}, I_L^{S_L}) = T(A_F^{S_F}).$$

Имеем, далее, $\mathrm{Hom}_{\,\Pi}(\hat{T}_0, I_L^{(1)}) = \mathrm{Hom}_{\,\pi}(\hat{T}, I_L^{(1)})$. Отсюда получаем следующий результат.

Предложение. Пусть F/k – сепарабельное конечное расширение , $T_0 = R_{F/k}(T)$. Тогда имеем

$$T_0(A_k) = T(A_F), \quad T_0^{(1)}(A_k) = T^{(1)}(A_F),$$
$$T(A_F)/T(F)T(A_F^\infty) \;\cong\; T_0(A_k)/T_0(k)T_0(A_k^\infty)$$

в числовом случае и

$$T^{(1)}(A_F)/T(F)T(A_F^\infty) \;\cong\; T_0^{(1)}(A_k)/T_0(k)T_0(A_k^\infty)$$

в функциональном. $\triangle$

11.5. Вопросы аппроксимации. Пусть k – глобальное поле, G – алгебраическая группа над полем k. Рассмотрим прямое произведение топологических групп $\prod_v G(k_v)$, где v пробегает все неэквивалентные нормирования поля k. Группа $G(k)$ вкладывается в $\prod_v G(k_v)$ посредством диагонального отображения. Обозначим через $\overline{G(k)}$ замыкание группы $G(k)$ в произведении $\prod_v G(k_v)$. Если $\overline{G(k)} = \prod_v G(k_v)$, то говорят, что группа G обладает свойством *слабой аппроксимации*. Пусть S – конечное множество нормирований поля k и $G_S = \prod_{v \in S} G(k_v)$. Говорят, что G обладает свойством слабой аппроксимации в точках из S, если $G(k)$ всюду плотна в G_S при диагональном вложении. Заметим, что равенство $\overline{G(k)} = \prod_v G(k_v)$ равносильно справедливости теоремы о слабой аппроксимации для любого конечного множества S. В случае, если группа G не обладает свойством слабой аппроксимации, можно ввести фактор-множества $A(G,S) = G_S/\overline{G(k)}$ и $A(G) = (\prod_v G(k_v))/\overline{G(k)}$, показывающие меру отклонения группы от свойства слабой аппроксимации.

Рассматривают также более деликатное понятие сильной аппроксимации в группе G, когда наряду с плотностью множества $G(k)$ в G_S накладываются условия и

на точки, лежащие вне S. Поскольку для торов свойство сильной аппроксимации не имеет места, то мы его рассматривать не будем, интересующемуся читателю рекомендуется книга Платонова и Рапинчука [1].

Предложение. Если алгебраическая группа G рациональна над полем k, то в G имеет место свойство слабой аппроксимации для любого S, т.е. $A(G) = 0$.

Доказательство. Известно, что аффинное пространство $\mathbf{A}_k^n$ и любое его открытое подмножество обладают свойством слабой аппроксимации. Если группа G рациональна над k, то имеется открытое подмножество U в $\mathbf{A}_k^n$, гомеоморфное открытому подмножеству аффинного пространства. Поскольку всякий элемент группы $G(k)$ может быть представлен в виде произведения двух элементов из $U(k)$, а $U(k)$ всюду плотно в $U_S = \prod_{v\in S} U(k_v)$, то и $G(k)$ всюду плотно в G_S для любого S. $\triangle$

К вопросу о слабой аппроксимации в некоммутативных группах мы вернемся в следующих параграфах, а сейчас более подробно рассмотрим случай алгебраических торов. Пусть T – тор, определенный над k и разложимый над расширением Галуа L конечной степени, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$. Запишем вялую резольвенту Π-модуля $\hat{T}$

$$0 \to \hat{T} \to \hat{M} \to \hat{N} \to 0$$

и двойственную последовательность торов над k

$$1 \to N \to M \to T \to 1.$$

Пусть v – нормирование поля k и w – продолжение нормы v на поле L, L_w – пополнение поля L, Π_w – группа Галуа расширения L_w/k_v (группа разложения). Так как L – общее поле разложения для торов N, M, T, то имеем точную последовательность Π_w-модулей

$$1 \to N(L_w) \to M(L_w) \to T(L_w) \to 1,$$

откуда вытекает точная последовательность когомологий

$$M(k_v) \xrightarrow{\mu} T(k_v) \to H^1(\Pi_w, N(L_w)) \to H^1(\Pi_w, M(L_w)). \tag{1}$$

Так как тор M квазиразложим, то

$$H^1(\Pi, M(L)) = H^1(\Pi_w, M(L_w)) = 0.$$

Далее, по двойственности Тейта, (теорема 5 п.11.3), имеем

$$H^1(\Pi_w, N(L_w)) = H^1(\Pi_w, \hat{N}).$$

Пусть S_0 – конечное множество нормирований поля k, продолжения которых в L имеют нециклическую группу разложения. Множество S_0 может быть и пустым. Тогда для любого $v \notin S_0$ и $w|v$ справедливо равенство

$$H^1(\Pi_w, N(L_w)) = H^1(\Pi_w, \hat{N}) = 0, \tag{2}$$

ибо $\hat{N}$ – вялый Π-модуль. Пусть S – конечное множество нормирований поля k, такое, что $S \cap S_0 \neq \emptyset$. Соотношения (1) и (2) показывают, что отображение μ определяет эпиморфизм

$$M_S = \prod_{v\in S} M(k_v) \to T_S = \prod_{v\in S} T(k_v). \tag{3}$$

Так как группа M рациональна над k, то для нее справедлива теорема о слабой аппроксимации, поэтому (3) показывает, что для указанных S в группе T также также имеет место слабая аппроксимация. Нами доказана

Теорема. Пусть k – глобальное поле, T – тор над полем k, разложимый над L, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$. Если S – конечное множество нормирований поля k такое, что для всех $w|v$, $v \in S$, группы разложения Π_w цикличны, то $A(T,S) = 0$. $\triangle$

Обозначим через p_S каноническую проекцию

$$p_S : \prod_v T(k_v) \to \prod_{v\in S} T(k_v) = T_S\,.$$

Пусть $E_S = \mathrm{Ker}\, p_S$, очевидно, что $\prod_v T(k_v) = E_S \times T_S$, где T_S отождествляется с подгруппой группы $\prod_v T(k_v)$, состоящей из элементов, координаты которых равны 1 во всех точках вне S. Покажем, что E_{S_0} лежит в $\overline{T(k)}$. Пусть $S = S_0 \cup S_1$, $S_0 \cap S_1 = \emptyset$. Достаточно показать, что для любого элемента $x \in E_{S_0}$ образ $p_S(x)$ есть предельная точка группы $T(k)$ в $T_S = T_{S_0} \times T_{S_1}$. Имеется гомоморфизм

$$\mu_S = \mu_{S_0} \times \mu_{S_1} : M_{S_0} \times M_{S_1} \to T_{S_0} \times T_{S_1},$$

причем μ_{S_1} – эпиморфизм, а $\mu_{S_0}(M_{S_0})$ – открытая подгруппа группы T_{S_0}. Тогда $p_S(x) = \mu_S(y)$ для некоторого $y \in M_S$. Так как в M справедлива теорема о слабой аппроксимации, то $\mu_S(M_S) \subset \overline{T(k)} \subset T_S$ и, следовательно, E_{S_0} лежит в $\overline{T(k)}$. Рассмотрим эпиморфизм $A(T) \to A(T,S_0)$, индуцированный проекцией p_{S_0}. Из включения $E_{S_0} \subset \overline{T(k)}$ имеем следующие редукции.

Предложение. Пусть $S \supset S_0$. Тогда естественные проекции $A(T,S) \to A(T,S_0)$ и $A(T) \to A(T,S)$ являются изоморфизмами. $\triangle$

Замечание. Замыкание $\overline{T(k)}$ в группе T_S совпадает с $\mu_S(M_S)T(k)$.

11.6. Арифметическая характеристика бирационального инварианта $H^1(k, p(T))$. Пусть $M^\vee = \mathrm{Hom}\,(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ – дуальная по Понтрягину группа для конечной абелевой группы M. Справедливо следующее важное и довольно неожиданное соотношение.

Теорема. Пусть k – глобальное поле, T – тор над полем k, X – гладкая проективная модель тора T над k. Тогда существует точная последовательность групп

$$0 \to A(T) \to H^1(k, \mathrm{Pic}\,(X \otimes_k \bar{k}))^\vee \to Ш(T) \to 0. \qquad (1)$$

Доказательство. Выберем конечное расширение Галуа L поля k, над которым тор T расщепляется, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$. Вялая резольвента

$$1 \to N \to M \to T \to 1$$

определяет следующую коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & N(L) & \to & M(L) & \to & T(L) & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & N(A_L) & \to & M(A_L) & \to & T(A_L) & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & C_L(N) & \to & C_L(M) & \to & C_L(T) & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

Эта диаграмма определяет коммутативную диаграмму групп когомологий с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^0(M(L)) & \to & H^0(T(L)) & & & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
H^0(M(A_L)) & \stackrel{\alpha_1}{\to} & H^0(T(A_L)) & \stackrel{\alpha}{\to} & H^1(N(A_L)) & \to & H^1(M(A_L)) & = & 0 \\
\downarrow \gamma_2 & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \gamma & & & & \\
H^0(C_L(M)) & \stackrel{\beta_1}{\to} & H^0(C_L(T)) & \stackrel{\beta}{\to} & H^1(C_L(N)) & \to & H^1(C_L(M)) & = & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \delta & & & & & & \\
H^1(M(L)) & \to & H^1(T(L)) & & & & & & \\
\downarrow & & \downarrow \varepsilon & & & & & & \\
0 & \to & H^1(T(A_L)) & & & & & &
\end{array}$$

В диаграмме $H^q(U)$ означает $H^q(\Pi, U)$. Так как модуль $\hat{M}$ – пермутационный, то $H^1(M(L)) = H^1(M(A_L)) = 0$. Далее, по двойственности Тейта-Накаямы имеем

$$H^1(C_L(M)) = H^1(\hat{M}) = 0, \quad H^1(C_L(N))^\vee = H^1(\hat{N}) = H^1(\mathrm{Pic}\, X_L),$$

$$Ш(T) = \mathrm{Ker}\,(\varepsilon) = Im(\delta) = H^0(C_L(T))/\mathrm{Ker}\,(\delta).$$

Но, так как $\delta\beta_1 = 0$, то $Im(\beta_1) = \mathrm{Ker}\,(\beta) \subset \mathrm{Ker}\,(\delta)$. Отсюда мы получаем эпиморфизм

$$f : H^1(C_L(N)) = H^0(C_L(T))/\mathrm{Ker}\,(\beta) \to H^0(C_L(T))/\mathrm{Ker}\,(\delta) = Ш(T).$$

Вычислим ядро отображения f :

$$\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(\delta)/\mathrm{Ker}\,(\beta) = Im(\gamma_1)/Im(\beta_1) = Im(\gamma_1)/Im(\beta_1\gamma_2) = Im(\gamma_1)/Im(\gamma_1\alpha_1).$$

Пусть S_0 – конечное множество нормирований, введенное в предыдущем пункте. Тогда для всех $v \notin S_0$ отображение $\mu : M(k_v) \to T(k_v)$ является эпиморфизмом и

$$\mathrm{Ker}\,(f) = T_{S_0}/\mu(M_{S_0})T(k) = A(T, S_0) = A(T). \ \triangle$$

Следствие 1. Группа $A(T)$ конечна . $\triangle$

Следствие 2. Если тор T стабильно рационален над k, то

$$A(T) = Ш(T) = 0. \ \triangle$$

Следствие 3. Если тор T расщепляется над циклическим расширением поля определения, то

$$A(T) = Ш(T) = 0. \ \triangle$$

Пример 3. Пусть $L = \mathbf{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}\,)$ – биквадратичное расширение поля рациональных чисел. Рассмотрим тор $T(a,b) = R^{(1)}_{L/Q}(\mathrm{G}_m)$. В примере главы II было показано, что $H^1(L/Q, p(T(a,b)) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Поэтому тор $T(a,b)$ не является стабильно рациональным над полем $\mathbf{Q}$. Это простейший пример алгебраической линейной группы, не рациональной над полем $\mathbf{Q}$. Рассмотрим два случая.

1) Все группы разложения поля L – цикличны. Например, $a = 5$, $b = 29$. Тогда из нашей теоремы и следствия 3 имеем соотношения : $A(T) = 0$, $Ш(T) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Кроме того, $T(a,b) \otimes_Q \mathbf{Q}_v$ является рациональным многообразием над $\mathbf{Q}_v$ для любого нормирования v поля $\mathbf{Q}$.

2) Существует группа разложения порядка 4. Например,

$$L = \mathbf{Q}(\xi), \quad \xi^8 = 1, \quad L = \mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{2}\ ).$$

Тогда из теории полей классов известно, что всякий элемент из $\mathbf{Q}$, являющийся локальной нормой во всех полях L_w, является нормой и некоторого элемента из L. На нашем языке это означает, что $Ш(T) = 0$. Но тогда $A(T) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Для поля $\mathbf{Q}(\xi)$ группы разложения Π_w цикличны для всех $w|p, \ \ p > 2$. Следовательно, группа $T(\mathbf{Q})$ плотна в $T(\mathbf{Q}_p)$ для $p > 2$, $T(\mathbf{Q})$ плотна в $T(\mathbf{R})$, однако замыкание $\overline{T(\mathbf{Q})}$ группы $T(\mathbf{Q})$ в $T(\mathbf{Q}_2)$ есть подгруппа индекса 2.

Пример 4. Пусть F – расширение простой степени p поля k, $T = R^{(1)}_{F/k}(\mathrm{G}_m)$. Мы видели в главе II , что бирациональный инвариант $p(T)$ тора T обратим. Поэтому $H^1(k, p(T)) = 0$, откуда $A(T) = Ш(T) = 0$. На языке норменных гиперповерхностей условие $Ш(T) = 0$ выглядит следующим образом: норменная гиперповерхность $F(x_1, .., x_p) = b, \quad b \in k$, имеет рациональную точку над полем k тогда и только тогда, когда она имеет рациональные точки над всеми пополнениями k_v поля k. Для p = 2 это классический факт из теории бинарных квадратичных форм, для p = 3 этот результат известен из теории кубических поверхностей.

§12. АРИФМЕТИКА ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП

12.1. Когомологии полупростых групп. Пусть G – связная линейная алгебраическая группа, определенная над полем алгебраических чисел k. В §11 было введено понятие слабой аппроксимации в группе G и определены множества $A(G)$ и $A(G, S)$. Вторая арифметическая характеристика группы G возникает при изучении множества $H^1(k, G)$ главных однородных пространств (г.о.п.) группы G. Всякое г.о.п., имеющее k-точку, бирегулярно изоморфно самому G. Имеем естественное отображение

$$\varphi : H^1(k, G) \to \prod_v H^1(k_v, G).$$

Ядро отображения φ обозначается $Ш(G)$, оно конечно и состоит из всех г.о.п. группы G, имеющих точки во всех полях k_v. Пусть X – гладкая проективная модель группы G над k. В случае, когда $G = T$ есть алгебраический тор, теорема п.11.6 показывает, что эти две арифметические характеристики $A(T)$ и $Ш(T)$ напрямую связаны с бирациональным инвариантом $H^1(k, p(T))$. Попытка сразу же обобщить эту теорему на случай произвольной связной линейной группы натолкнулась на серьезные препятствия. Во-первых, для некоммутативной группы G совершенно неочевидно наличие коммутативной групповой структуры на множествах $A(G)$ и $Ш(G)$, которая к тому же определялась бы естественным образом. Эта проблема сравнительно легко редуцируется к случаю связной полупростой группы. Рассмотрим этот случай более подробно. Пусть G - связная полупростая алгебраическая группа над полем k, $\tilde{G}$ – ее универсальная накрывающая, имеем точную последовательность

$$1 \ \to B \to \tilde{G} \to G \to \ 1, \tag{1}$$

где B – фундаментальная группа. Все достижения вычислительного характера для связных полупростых групп G основываются на доказанных к настоящему времени гипотезах о характеристиках односвязных групп $\tilde{G}$. Приведем без доказательств следующие теоремы, подробные доказательства и комментарии имеются в книге Платонова и Рапинчука [1].

Теорема 1. Пусть G – односвязная полупростая группа над неархимедовым локальным полем k. Тогда $H^1(k,G)=0$. $\triangle$

Теорема 2. Пусть G – простая односвязная анизотропная группа над локальным полем k. Тогда $G=\mathrm{SL}\,(D)$ для некоторой конечномерной алгебры с делением D над k. $\triangle$

Проверка равенства $Ш\,(\tilde{G})=0$ до сих пор требует полного перебора и до недавнего времени вопрос о равенстве $Ш\,(\tilde{G})=0$ для групп типа E_8 оставался открытым. Только недавно это показано в работе Черноусова [1]. Подробный перебор всех случаев имеется в книге Платонова и Рапинчука [1], в результате доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Для связной односвязной группы $\tilde{G}$ над полем алгебраических чисел k отображение

$$H^1(k,\tilde{G})\to\prod_{v|\infty}H^1(k_v,\tilde{G})$$

является биекцией. $\triangle$

Точная последовательность (1) позволяет написать точную последовательность когомологий

$$H^1(k,\tilde{G})\to H^1(k,G)\xrightarrow{\partial}H^2(k,B).$$

Теорема 4. Если k – локальное неархимедово или числовое поле , то отображение

$$\partial: H^1(k,G)\to H^2(k,B)$$

является сюръективным. $\triangle$

Следствие. Если поле k – локально , то отображение ∂ биективно. $\triangle$

Пусть $\mathcal{G}=\mathrm{Gal}\,(\bar{k}/k)$, C – коммутативный $\mathcal{G}$-модуль. Положим

$$Ш^q(C)=\mathrm{Ker}\,[H^q(k,C)\to\prod_v H^q(k_v,C)].$$

Изучая отображение ∂, Сансюк [1] доказал следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть G – связная полупростая группа над числовым полем k, тогда отображение

$$\partial: Ш\,(G)\to Ш^2(B)$$

является биекцией. $\triangle$

Сансюк интерпретирует также множество $Ш\,(G)$ как подмножество в группе $\mathrm{Br}\,G$ и это позволяет снабдить $Ш\,(G)$ естественным строением конечной абелевой группы, согласованным с биекцией ∂. В статье Сансюка сделано несколько больше, он определяет биекцию ∂ сразу для редуктивных групп, таким образом, имеем естественную групповую коммутативную структуру на множестве $Ш\,(G)$ для любых связных линейных алгебраических групп G. Заметим также, что $Ш\,(N)=0$ для унипотентных групп.

12.2. Слабая аппроксимация. Вопрос о групповой структуре множества $A(G)$ также сводится к доказательству равенства $A(G)=0$ для связных односвязных полупростых групп G. Недавно Кунявский и Скоробогатов [1,2] предложили изящное доказательство справедливости слабой аппроксимации, включающее результаты Кнезера - Хардера - Платонова - Сансюка. Они устанавливают следующий факт.

Теорема 1. Пусть G – связная полупростая линейная группа, определенная над числовым полем k, X – многообразие максимальных торов группы G, $F=k(X)$, H – общий тор группы G над F. Если $H^1(F,p(H))=0$, то $A(G)=0$.

Доказательство основывается на существовании плотного множества точек x в $X(k)$, над которыми соответствующие торы T_x не имеют аффекта. Для всех таких торов имеем $H^1(k, p(T_x)) = 0$, поэтому $A(T_x) = 0$ и $A(G) = 0$. $\triangle$

Детальное исследование модуля Пикара общего тора полупростой группы провел Клячко [4], см. гл.II. Объединяя результаты Клячко с теоремой 1, получаем единым способом информацию, добытую в разное время Кнезером, Хардером, Сансюком.

Теорема 2. Следующие типы связных полупростых групп над числовым полем обладают слабой аппроксимацией:

а) односвязные группы,

б) присоединенные группы,

в) абсолютно почти простые группы. $\triangle$

Замечание. В формулировке теоремы 1 полупростую группу можно заменить на любую связную линейную группу.

Учитывая, что $A(\tilde{G}) = 0$, последовательность (1) п. 12.1 показывает, что замыкание $\overline{G(k)}$ в группе $\prod_v G(k_v)$ содержит коммутант этой группы и имеет конечный индекс в ней. Таким образом, $A(G)$ есть конечная абелева группа для полупростых групп, а, значит, и для всех связных алгебраических групп G. Можно теперь снова вернуться к последовательности (1) п. 11.6. Используя равенства $A(G) = Ш(G) = 0$ для связных односвязных полупростых групп, Сансюк [1] доказывает обобщающую теорему

Теорема 3. Пусть G – связная линейная алгебраическая группа над числовым полем k. Тогда имеется точная последовательность абелевых групп

$$0 \to A(G) \to H^1(k, \operatorname{Pic} \bar{X})^\vee \to Ш(G) \to 0,$$

где X – гладкая проективная модель группы G над k. $\triangle$

Замечание. Нельзя ли найти *безусловное* доказательство теоремы 3 так , как это делается для торов, т.е. не используя предварительно равенства $A(G) = Ш(G) = 0$ для односвязных полупростых групп. Поскольку модуль $\operatorname{Pic} \bar{X}$ является пермутационным для односвязной группы, то из безусловного доказательства теоремы 3 мы получили бы равенства $A(G) = Ш(G) = 0$ для односвязных групп автоматически.

12.3. Группа $H^1(k, \mathbf{Pic}\, \bar{X})$. Мы видели в гл.II в случае, когда тор T расщепляется над циклическим расширением поля определения k, что $H^1(k, \operatorname{Pic} \bar{X}) = 0$. Оказывается, что это верно для любой связной линейной группы. Напомним сначала несколько определений.

Связная полупростая линейная k-группа G называется квазиразложимой над полем k, если существует борелевская подгруппа, определенная над k; группа G, не обязательно полупростая, называется разложимой, если она обладает максимальным тором, разложимым над k. Разложимые группы всегда обладают борелевскими подгруппами, определенными над основным полем, группа G всегда разложима над конечным расширением поля k. Всякая связная линейная алгебраическая группа G есть полупрямое произведение UG_0 над полем k, где U – унипотентна, а G_0 – редуктивна, (разложение Леви). Редуктивная группа G_0 обладает борелевской подгруппой, определенной над полем k тогда и только тогда, когда ее полупростая часть квазиразложима. В этом случае группа G_0 бирационально эквивалентна прямому произведению BU_1, где U_1 – унипотентна (разложение Брюа). Таким образом, если группа G имеет борелевскую подгруппу B , определенную над основным полем характеристики нуль, то бирациональный инвариант $p(G)$ совпадает с $p(B)$. Сверх того, поскольку B – также полупрямое произведение максимального тора T и унипотентной группы, то $p(G) = p(T)$. Следующая лемма теперь очевидна.

Лемма. Пусть G – связная линейная алгебраическая группа, определенная над полем k, обладающая борелевской подгруппой B, также определенной над k, T – максимальный k-тор в группе B. Тогда

$$H^1(k, p(G)) = H^1(k, p(T)). \quad \triangle$$

Теорема 1. Пусть G – связная линейная алгебраическая группа, определенная над полем алгебраических чисел. Тогда почти для всех нормирований v поля k имеем $H^1(k_v, p(G)) = 0$.

Доказательство. Будем считать группу G редуктивной. Пусть X – многообразие всех борелевских подгрупп группы G. Многообразие X неприводимо, неособо, определено над полем k и имеет рациональную точку над полем $L \supset k$ тогда и только тогда, когда существует борелевская подгруппа группы G, определенная над L. Из неприводимости X следует, что многообразие X имеет рациональные точки над полями k_v для всех v, за исключением, быть может, конечного их числа. Таким образом, группа G обладает борелевской подгруппой B_v, определенной над k_v, почти для всех v. По лемме для таких нормирований справедливо равенство

$$H^1(k_v, p(G)) = H^1(k_v, p(T_v)),$$

где T_v – максимальный тор группы B_v. Пусть F – нормальное поле разложения группы G конечной степени над полем k. Почти все нормирования v поля k неразветвлены в F и, следовательно, для таких v тор T_v расщепляется над циклическим расширением поля k_v. Но тогда $H^1(k_v, p(T_v)) = 0$. $\triangle$

Теорема 2. Пусть G – связная линейная алгебраическая группа, определенная над полем алгебраических чисел k и разложимая над циклическим расширением поля k. Тогда

$$H^1(k, p(G)) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{G}_0$ подгруппа в группе $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}\,(\bar{k}/k)$, состоящая из элементов, действующих тривиально на $\mathrm{Pic}\,\bar{X}$, где X – проективная модель группы G, $p(G) = [\mathrm{Pic}\,\bar{X}]$. Тогда $\Pi = \mathcal{G}/\mathcal{G}_0$ – циклична, пусть $L = \bar{k}^{\mathcal{G}_0}$, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$, $H^1(k, \mathrm{Pic}\,\bar{X}) = H^1(L/k, \mathrm{Pic}\,X_L)$. По теореме Чеботарева существует бесконечно много простых p таких , что $\mathrm{Gal}\,(L_P/k_p) = \Pi$. По предыдущей теореме тогда $H^1(\Pi, \mathrm{Pic}\,X_L) = 0$. $\triangle$

Следствие. Пусть G – связная линейная алгебраическая группа, определенная над числовым полем, X – проективная гладкая модель группы G над k, Π и L как в теореме 2. Пусть π – циклическая подгруппа группы Π. Тогда $H^1(\pi, \mathrm{Pic}\,X_L) = 0$. $\triangle$

Пусть C – конечный $\mathcal{G}$-модуль, всегда найдется расширение Галуа L поля k такое, что $C(\bar{k}) = C(L)$. Тогда C является Π-модулем, $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$, положим

$$Ш^1_\omega(k, C) = \mathrm{Ker}\,[H^1(\Pi, C) \overset{res}{\to} \prod_{g \in \Pi} H^1(< g >, C).$$

Сансюк [1] доказывает в условиях соотношения (1) п.12.1 следующую теорему.

Теорема 3.

$$H^1(k, \mathrm{Pic}\,\bar{X}(G) = Ш^1_\omega(k, \hat{B}). \quad \triangle$$

Пример 5. Теорема 3 в совокупности с предыдущими фактами позволяет строить целые серии связных полупростых групп с различными отклонениями от k-рациональности. Первые такие примеры были построены Серром и Оно. Рассмотрим один из простейших. Пусть $\mathrm{SL}_{n,k}$ – специальная линейная группа, $\mu_{n,k}$ – ее

центр. Если L – конечное расширение поля k, то $R_{L/k}(\mu_n)$ есть центр группы $R_{L/k}(\mathrm{SL}_n)$. Пусть L/k – расширение Галуа с группой Π. Тогда

$$R_{L/k}(\mu_n) = \mathrm{Spec}\,(\mathbf{Z}[\Pi] \otimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = \mathrm{Spec}\,((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})[\Pi]).$$

Имеем точную последовательность конечных групповых схем

$$1 \to B \to R_{L/k}(\mu_n) \to \mu_n \to 1,$$

ядро B обозначается символом $R^{(1)}_{L/k}(\mu_n)$. Пусть теперь $(L:k) = n$. Переходя к характерам, получаем представление для дуальной группы $\hat{B}$ в виде коядра норменного отображения $N : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})[\Pi]$, где $N = \sum_{g\in\Pi} g$. Из точной последовательности Π-модулей

$$0 \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})[\Pi] \to \hat{B} \to 0$$

имеем $H^1(\pi, \hat{B}) = H^2(\pi, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ для любой подгруппы π группы Π. С другой стороны, рассмотрим точную последовательность модулей

$$0 \to \mathbf{Z}[\Pi] \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Z} \oplus (\mathbf{Z}[\Pi]/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to 0, \qquad (1)$$

где $\alpha = (\varepsilon, pr)$, $\varepsilon : \mathbf{Z}[\Pi] \to \mathbf{Z}$ – аугментация, $\beta(a,u) = a - \varepsilon(u)(mod\ n)$. Заметим, что $\varepsilon(N(a)) \equiv 0(mod\ n)$, $a \in \mathbf{Z}$. Из последовательности (1) следует, что

$$H^1(\pi, \hat{B}) = H^2(\pi, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = H^2(\pi, \mathbf{Z}) \oplus H^3(\pi, \mathbf{Z}).$$

Поэтому

$$Ш^1_\omega(k, \hat{B}) = \mathrm{Ker}\,[H^1(\Pi, \hat{B}) \to \prod_g H^1(< g >, \hat{B})] =$$

$$= \mathrm{Ker}\,[H^2(\Pi, \mathbf{Z}) \oplus H^3(\Pi, \mathbf{Z}) \to \prod_g H^2(< g >, \mathbf{Z})] =$$

$$= H^3(\Pi, \mathbf{Z}) \oplus \mathrm{Ker}\,[H^2(\Pi, \mathbf{Z}) \to \prod_g H^2(< g >, \mathbf{Z})] =$$

$$= H^3(\Pi, \mathbf{Z}) \oplus H^1(\Pi, p(\mathrm{G}_m)) = H^3(\Pi, \mathbf{Z}).$$

По теореме 3 для группы $G = R_{L/k}(\mathrm{SL}_n)/B$ имеем тогда $H^1(k, p(G)) = H^3(\Pi, \mathbf{Z})$, что дает возможность строить примеры нерациональных полупростых групп G.

§13. L - ФУНКЦИИ АРТИНА

13.1. Неполные L-функции Артина. Пусть L – конечное нормальное расширение числового поля k степени n, Π – группа Галуа расширения L/k. Пусть, далее, $\mathbf{p}$ – простой идеал поля k, из нормальности расширения L/k следует, что $O_L\mathbf{p} = (\wp_1 \cdots \wp_g)^e$, где $\wp_i \neq \wp_j$, $i \neq j$, причем группа Π транзитивно действует на множестве $\{\wp_1, .., \wp_g\}$ перестановками. Хорошо известно, что показатель ветвления e только для конечного множества простых идеалов поля k может превосходить единицу. Пусть $\Pi_\wp = \{\sigma \in \Pi \mid \sigma\wp = \wp\}$ – стабилизатор идеала $\wp$ в группе Π. Группа Π естественно действует на

$$L \otimes_k k_\wp = \oplus_{\wp|\mathbf{p}}\ L_\wp$$

через первый множитель и группу $\Pi_\wp$ можно отождествить с группой Галуа расширения $L_\wp/k_{\mathbf{p}}$. Она также естественно действует и на поле классов вычетов $O_L/\wp = O_{L,\wp}/\wp$ и оставляет неподвижными элементы поля $O/\mathbf{p}$. Пусть

$$[O_L/\wp : O/\mathbf{p}] = f = f(\mathbf{p}),\ e = e(\mathbf{p}),\ g = g(\mathbf{p}),$$

тогда $n = efg,\ [L_\wp : k_{\mathbf{p}}] = n_p = ef$. Группа $\Pi_\wp$ называется группой разложения. Пусть далее $\Pi_\wp^{(1)} = \{\sigma \in \Pi_\wp \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha (mod\ \wp\}$ – группа инерции. Группа Галуа поля $O_L/\wp$ относительно $O/\mathbf{p}$ изоморфна фактору $\Pi_\wp/\Pi_\wp^{(1)}$. В случае, когда $e(\wp) = 1$, идеал $\mathbf{p}$ называется неразветвленным в L. В этом случае $\Pi_\wp^{(1)} = (1)$ и $\Pi_\wp$ изоморфна как группе Галуа расширения $L_\wp/k_{\mathbf{p}}$, так и группе Галуа поля вычетов. Группа Галуа конечного расширения $O_L/\wp$ относительно поля $O/\mathbf{p}$ циклична и имеется каноническая образующая

$$F : \alpha \to \alpha^q,\ q = N(\mathbf{p}) = N_{k/Q}(\mathbf{p}) = p^u,\quad u = [O/\mathbf{p} : Z/pZ],\ \mathbf{p}|p.$$

Заметим еще, что $N_{L/Q}(\wp) = N_{k/Q}(\mathbf{p}^f)$. Таким образом, если идеал $\mathbf{p}$ неразветвлен в L , то в группе Π имеется единственный элемент $\sigma_\wp$, характеризуемый свойством

$$\sigma_\wp(\alpha) \ \equiv\ \alpha^{N(\mathbf{p})} (mod\ \wp)$$

для всех $\alpha \in O_L$. Автоморфизм $\sigma_\wp$ называется автоморфизмом Фробениуса и обозначается символом $\left[\frac{L/k}{\wp}\right]$.

Упражнение. Показать что

$$\left[\frac{L/k}{\sigma\wp}\right] = \sigma\left[\frac{L/k}{\wp}\right]\sigma^{-1}.$$

Пусть теперь $\Phi : \Pi \to \mathrm{GL}\,(m, \mathbf{C})$ – комплексное представление группы Π, χ – характер представления Φ, $\chi(\sigma) = tr(\Phi(\sigma))$. Известно, что представление определяется своим характером с точностью до эквивалентности. Пусть $\det(xE - \Phi(\sigma))$ – характеристический многочлен матрицы $\Phi(\sigma)$. Рассмотрим функцию комплексной переменной s

$$L_{\mathbf{p}}(s, \Phi, L/k) = L_{\mathbf{p}}(s, \Phi) = \det\left(E - \Phi\left(\left[\frac{L/k}{\wp}\right]\right)(N\mathbf{p})^{-s}\right)^{-1},$$

где $\mathbf{p}$ – неразветвленный идеал поля k.

Предложение 1. Выражение $L_{\mathbf{p}}(s, \Phi)$ зависит только от характера χ представления Φ и не зависит от явного вида матрицы $\Phi(\sigma)$ и от выбора идеала $\wp,\ \wp|\mathbf{p}$.

Доказательство. Матрица $\Phi\left(\left[\frac{L/k}{\wp}\right]\right)$ диагонализируема :

$$\Phi\left(\left[\frac{L/k}{\wp}\right]\right) \sim diag(\varepsilon_1, .., \varepsilon_m).$$

Тогда

$$L_{\mathbf{p}}(s, \Phi) = \prod_{i=1}^{m}(1 - \varepsilon_i N(\mathbf{p})^{-s})^{-1}. \tag{1}$$

Для $Res \geq 1$ имеем представление

$$\ln L_{\mathbf{p}}(s, \Phi) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\varepsilon_i^n N(\mathbf{p})^{-ns} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\chi\left(\left[\frac{L/k}{\wp}\right]^n\right)N(\mathbf{p})^{-ns}. \tag{2}$$

Поскольку автоморфизмы $\left[\frac{L/k}{\wp_1}\right]$ и $\left[\frac{L/k}{\wp_2}\right]$ сопряжены для $\wp_1|\mathbf{p}$, $\wp_2|\mathbf{p}$, то доказательство окончено. $\triangle$

С этого места вместо $L_{\mathbf{p}}(s,\Phi)$ будем писать $L_{\mathbf{p}}(s,\chi)$. Е.Артин определяет функцию $L(s,\chi,L/k)=L(s,\chi)$ как бесконечное произведение $L(s,\chi)=\prod_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{p}}(s,\chi)$, где $\mathbf{p}$ пробегает все идеалы поля k, неразветвленные в L. Это неполная L-функция Артина.

Предложение 2. Функция $L(s,\chi)$ голоморфна при $\sigma>1$, где $s=\sigma+it$, и не обращается в этой области в нуль.

Доказательство следует из формулы (1) и известного факта, что эйлеровское произведение абсолютно и равномерно сходится в каждом замкнутом подмножестве полуплоскости $\sigma>1$. $\triangle$

Предложение 3 . Пусть $k\subset F\subset L$, причем F и L нормальны над k, $\Pi=\mathrm{Gal}\,(L/k)$, $\Gamma=\mathrm{Gal}\,(F/k)$, $\pi=\mathrm{Gal}\,(L/F)$, $\Gamma=\Pi/\pi$. Каждый характер χ группы Γ будем рассматривать и как характер группы Π , тогда $L(s,\chi,F/k)=L(s,\chi,L/k)$.

Доказательство. Пусть Φ – представление группы Γ с характером χ, продолжим Φ до представления группы Π , полагая $\Phi(\pi)=E$. Пусть $\wp|\wp_1|\mathbf{p}$, где $\wp_1$ – идеал поля F. Легко видеть, что автоморфизм Фробениуса $\left[\frac{L/k}{\wp}\right]$ индуцирует на F автоморфизм $\left[\frac{F/k}{\wp_1}\right]$. Поэтому

$$\det\Big(E-\Phi\Big(\Big[\frac{F/k}{\wp_1}\Big]\Big)N(\mathbf{p})^{-s}\Big)=\det\Big(E-\Phi\Big(\Big[\frac{L/k}{\wp}\Big]\Big)N(\mathbf{p})^{-s}\Big).\ \triangle$$

Предложение 4. Если $\chi=\chi_1+\chi_2$, то $L(s,\chi)=L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)$.

Это следует из разложения (2). $\triangle$

Следствие. Если $\chi=\sum r_i\chi_i$, где r_i – рациональные числа, то

$$L(s,\chi)=\prod_i L(s,\chi_i,L/k)^{r_i}.\ \triangle$$

Предложение 5. Пусть F – промежуточное поле расширения L/k, $\Pi=\mathrm{Gal}\,(L/k)$, $\pi=\mathrm{Gal}\,(L/F)$, χ – характер группы π, χ^* – индуцированный характер группы Π. Тогда

$$L(s,\chi^*,L/k)=L(s,\chi,L/F).$$

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения. $\triangle$

13.2. Теоремы Артина и Брауэра. Пусть $\chi:\Pi\to\mathbf{C}^*$ – одномерное представление, F — поле инвариантов группы $\mathrm{Ker}\,(\chi)$, $k\subset F\subset L$, F/k – циклическое расширение с группой $\Gamma=\Pi/\mathrm{Ker}\,(\chi)$. Характер χ можно считать и характером группы Γ. По предложению (3) имеем $L(s,\chi,L/k)=L(s,\chi,F/k)$. Функция $L(s,\chi,F/k)$ есть обычная L-функция Дирихле расширения F/k за вычетом множителей, относящихся к идеалам поля k, разветвленным в F. Поэтому L-функции Артина $L(s,\chi,L/k)$, соответствующие одномерным характерам χ , будем называть абелевыми L-функциями. Одна из теорем Брауэра (см. Ленг [1]) утверждает, что каждый характер конечной группы является линейной комбинацией с целыми коэффициентами характеров, индуцированных одномерными характерами

$$\chi=\sum n_i\chi_i,\quad n_i\in\mathbf{Z},\quad \chi_i:\Pi\to\mathbf{C}^*,\quad \Pi_i\subset\Pi. \tag{1}$$

Из вышесказанного следует следующая теорема.

Теорема 1 (Брауэра). Для любого характера χ группы $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$ функция $L(s, \chi, L/k)$ может быть представлена в виде

$$L(s, \chi, L/k) = \prod_i L(s, \chi_i^*, L/k)^{n_i} = \prod_i L(s, \chi_i, L/L_i)^{n_i}, \tag{2}$$

где L_i – поле инвариантов подгруппы Π_i, $n_i \in \mathbf{Z}$, $L(s, \chi_i, L/L_i)$ – абелевы L-функции. $\triangle$

Следствие. Функция $L(s, \chi, L/k)$ мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость.

В самом деле, каждая абелева функция $L(s, \chi_i, L/L_i)$ продолжается до мероморфной функции на плоскости, этим определено мероморфное продолжение функции $L(s, \chi, L/k)$ на всю плоскость. Далее, полная абелева функция $L(s, \chi_i, L/L_i)$ имеет эйлерово произведение $\prod_{\mathbf{p}} L_{\mathbf{p}}(s, \chi_i, L/L_i)$, распространенное уже на все простые ненулевые идеалы поля L_i. Этим однозначно определяются локальные множители $L_{\mathbf{p}}(s, \chi_i, L/k)$ в разветвленных точках $\mathbf{p}$ и для произвольной L-функции. В дальнейшем, говоря о L-функциях, мы будем иметь в виду именно полную L-функцию. Полная L-функция Артина удовлетворяет некоторому функциональному уравнению, которое получается из функциональных уравнений для абелевых L-функций. $\triangle$

Теперь рассмотрим несколько конкретных случаев. Пусть χ_0 – главный характер группы Π , т.е. $\chi_0(\sigma) = 1$ для всех $\sigma \in \Pi$. Ясно, что $L(s, \chi_0, L/L) = \zeta_L(s)$ – дзета-функция Дедекинда, $\zeta_L(s) = \sum N(\mathbf{a})^{-s}$ – сумма по всем целым ненулевым идеалам поля L. Далее, $L(s, \chi_0, L/k) = L(s, \chi_0, k/k) = \zeta_k(s)$ по предложению 3. Заметим теперь, что характер регулярного представления χ_{reg} группы $\Pi = \mathrm{Gal}\,(L/k)$ есть индуцированный характер $\chi_{reg} = \chi_0^*$, χ_0 – характер единичной подгруппы в Π. Из предложения 5 имеем тогда

$$L(s, \chi_{reg}, L/k) = L(s, \chi_0^*, L/k) = L(s, \chi_0, L/L) = \zeta_L(s).$$

Еще одна теорема Брауэра гласит, что

$$\chi_{reg} = \chi_0 + \sum r_i \chi_i^*,$$

где r_i – положительные рациональные числа, а χ_i – одномерные характеры циклических подгрупп группы Π. Из предложения 4 и его следствия имеем важный результат.

Теорема 2 (Артина - Брауэра). Пусть L/k – конечное нормальное расширение, тогда

$$\zeta_L(s) = \zeta_k(s) \cdot \prod_i L(s, \chi_i^*, L/k)^{r_i},$$

где функции $L(s, \chi_i^*, L/k)$ – абелевы. $\triangle$

Из этой теоремы видно, что частное $\zeta_L(s)/\zeta_k(s)$ есть целая функция на $\mathbf{C}$. Аналогичный вопрос для ненормальных расширений остается открытым.

Характер неприводимого представления группы Π будем называть простым или неприводимым характером. Мы видели, если χ_0 – главный характер, то функция $L(s, \chi_0, L/k) = \zeta_k(s)$ является мероморфной с простым полюсом при $s = 1$. Пусть χ – неприводимый неглавный характер. Тогда в разложении (1) все характеры χ_i также можно взять неглавными и, следовательно, в правой части формулы (2) будут встречаться только абелевы L-функции $L(s, \chi_i, L/L_i)$, у которых $L(1, \chi_i, L/L_i) \neq 0$. Отсюда еще один факт.

Предложение 1. Если χ – неглавный характер, то $L(1, \chi, L/k) \neq 0$. $\triangle$

Гипотеза Артина. Если χ – неглавный неприводимый характер, то $L(s, \chi, L/k)$ – целая функция.

Разложим характер χ в сумму неприводимых характеров

$$\chi = \sum_{i=0}^{m} a_i \chi_i, \quad a_i \geq 0, \quad a_i \in \mathbf{Z},$$

χ_0 – главный характер.

Предложение 2. Функция $L(s, \chi, L/k)$ имеет в точке $s = 1$ полюс порядка a_0. $\triangle$

13.3. Глобальная дзета-функция тора. Пусть k – алгебраическое числовое поле, L/k – конечное расширение Галуа с группой Π, T – тор над полем k, разложимый над L. В п. 10.3 для тора T была построена каноническая целая O-форма X, где O – кольцо целых элементов поля k. Выберем простой идеал $\mathbf{p}$ кольца O, неразветвленный в L. Тогда, как мы видели, редукция $\bar{X}_{\mathbf{p}}$ снова является тором, но определенным над конечным полем вычетов $\mathbf{F_p} = \mathbf{O}/\mathbf{p}$. Пусть $\wp$ – простой идеал поля L, $\wp|\mathbf{p}$, $\Pi_\wp$ – группа разложения, $\Pi_\wp = \mathrm{Gal}\,(\mathbf{F}_\wp/\mathbf{F_p})$, $\mathbf{F}_\wp = O_L/\wp$. Пусть $\zeta(s, T, \mathbf{p})$ – дзета-функция конечного тора $\bar{X}_{\mathbf{p}}$. Возьмем конечное множество S простых идеалов, разветвленных в L, и положим

$$\zeta(s, T, S) = \prod_{\mathbf{p} \notin S} \zeta(s, T, \mathbf{p}).$$

По формуле (3) п. 9.2 имеем

$$\zeta(s, T, \mathbf{p}) = \prod_{m=0}^{d} \det(E - q^{d-m-s} \Lambda^m h(\sigma))^{(-1)^{m+1}},$$

где $q = N(\mathbf{p}) = |\mathbf{F_p}|$, σ – автоморфизм Фробениуса расширения $\mathbf{F}_\wp/\mathbf{F_p}$, $d = \dim T$, $q^{-s} = t$ – переменная в формуле (3) п. 9.2, h – представление группы Π, определяемое модулем характеров $\hat{T}$. Рассмотрим произведение

$$\prod_{\mathbf{p} \notin S} \det(E - \Lambda^m h(\sigma_\wp) N(\mathbf{p})^{d-m-s})^{-1}.$$

Это в точности определение L-функции Артина, соответствующей представлению группы Галуа Π с помощью внешней степени $\Lambda^m h$ представления h. Она обозначается $L(s + m - d,\ \Lambda^m h,\ L/k,\ S)$, или $L(s + m - d,\ \chi_m,\ L/k,\ S)$, где χ_m – характер представления $\Lambda^m h$. Таким образом,

$$\zeta(s, T, S) = \prod_{m=0}^{d} L(s + m - d,\ \chi_m,\ L/k,\ S)^{(-1)^m}. \tag{1}$$

Каждая L-функция Артина умножением на локальные множители, соответствующие разветвленным идеалам из множества S, может быть превращена в полную L-функцию. Эти дополнительные множители однозначно определяются функциями $L(s + m - d,\ \chi_m,\ L/k,\ S)$. Равенство (1) позволяет тогда определить полную дзета-функцию $\zeta(s, T)$ тора T. Из свойств L-функции имеем

Теорема. Функция $\zeta(s, T)$ обладает свойствами:

а) $\zeta(s, T)$ – мероморфна на всей плоскости,

б) $\zeta(s, T)$ – регулярна при $Re\, s > d$,

в) $\zeta(s,T)$ – не меняется при замене тора T изогенным. $\triangle$

Задача. Пусть X – вышеуказанная O-форма тора T. Если X имеет хорошую редукцию по любому модулю $\mathbf{p}$, то редукция $\bar{X}_{\mathbf{p}}$ есть алгебраическая группа над $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}$, имеем локальную дзета-функцию $\zeta(s,X,\mathbf{p})$ для каждого $\mathbf{p}$ и дзета-функцию O-группы X

$$\zeta(s,X)=\prod_{\mathbf{p}}\zeta(s,X,\mathbf{p}).$$

Функции $\zeta(s,X)$ и $\zeta(s,T)$ могут отличаться только в конечном числе множителей, соответствующих разветвленным точкам $\mathbf{p}$. Найти эти множители.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда фундаментального естествознания при СПБ ГУ (грант 95-0-1.0-13)

ЛИТЕРАТУРА

Батырев В.В.

1. Трехмерные торические многообразия Фано. Изв. АН СССР, серия матем., 1981, Т.48:4, С.704-717.

Берже (Barge J.)

1. Cohomologie des groupes et corps d'invariants multiplicativs. Math. Ann., 1989, V.283, P.519-528.

Бессенрод, Ле Брюн (Bessenrodt C., Le Bruyn L.)

1. Stably rationality of certain PGL(n) quotients. Invent.Math., 1991, V. 104, P. 179-199.

Богомолов Ф.А.

1. Стабильная рациональность фактор-пространств для односвязных групп. Матем. сб., 1986, Т.130, С.3-17.
2. Группа Брауэра фактор-пространств линейных представлений. Изв. АН СССР, серия матем., 1987, Т.51:3, С.485-516.

Богомолов Ф.А., Кацыло П.И.

1. Рациональность некоторых фактор-многообразий. Матем. сб., 1985, Т.126, 584-589.

Боревич З.И., Шафаревич И.Р.

1. Теория чисел. М.:Наука, 1985.

Борель (Borel A.)

1. Some properties of adele groups attached to algebraic groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1961, V.67, P.583-585.
2. Арифметические свойства алгебраических групп. Математика, 1964, Т.8:2, 3-17.
3. Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972.
4. Свойства и линейные представления групп Шевалле. Семинар по алгебраическим группам, М.: Мир, 1973, С.9-59.

Брилинский (Brylinski J.-L.)

1. Décomposition simpliciale d'un réseau, invariante par un groupe fini d'automorphismes. C.R.Acad.Sci., Paris Sér.A, 1979, T.288, P.137-139.

Ван ден Берг (Van den Bergh M.)

1. The center of the generic division algebra. J. Algebra, 1989, V.127:1, P.106-126.

Ван дер Варден Б.Л.

1. Алгебра. М.: Наука, 1976.

Вейль (Weil A.)

1. The field of definition of a variety. Amer. J. Math., 1956, V.56, P.509-524.
2. Адели и алгебраические группы. Математика, 1964, Т.8:2, С.3-74.

Винберг Э.Б.

1. Рациональность поля инвариантов треугольной группы. Вестн. МГУ, 1982, 2, 23-24.

Воскресенский В.Е.

1. Группа Пикара линейных алгебраических групп. Исслед. по теории чисел, Саратов, СГУ, 1969, С.7-16.
2. О бирациональной эквивалентности линейных алгебраических групп. ДАН СССР, 1969, Т.188:5, С.978-981.
3. Бирациональные свойства линейных алгебраических групп. Изв. АН СССР, серия матем., 1970, Т.34:1, С.3-19.
4. К вопросу о строении подполя инвариантов циклической группы автоморфизмов поля $\mathbf{Q}(x_1, .., x_n)$. Изв. АН СССР, серия матем., 1970, Т.34:2, С.366-375.
5. О слабой аппроксимации в алгебраических группах. Исслед. по теории чисел, Саратов, СГУ, 1972, С.3-7.
6. Поля инвариантов абелевых групп. УМН, 1973, Т.28:4, С.77-102.
7. Геометрия линейных алгебраических групп. Труды МИАН СССР, 1973, Т.132, С.151-161.
8. Некоторые вопросы бирациональной геометрии алгебраичесих торов. Proc. Internat. Congress of Math. Vancouver, Canada, 1974, V.1, С.343-347.
9. Алгебраические торы. М.: Наука, 1977.
10. Проективные инвариантные модели Демазюра. Изв. АН СССР, серия матем., 1982, Т.46:2, С.195-210.
11. Максимальные торы без аффекта в полупростых алгебраических группах. Матем.заметки, 1988, Т.44:3, С.309-318.
12. Бирациональная геометрия и арифметика линейных алгебраических групп,I. Вестник СамГУ, 1997, 2.

Воскресенский В.Е., Клячко А.А.

1. Торические многообразия Фано и системы корней. Изв. АН СССР, серия матем., 1984, Т.48:2, С.237-263.

Воскресенский В.Е., Фомина Т.В.

1. Целые структуры в алгебраических торах. Изв. РАН, серия матем., 1995, Т.59:5, С.3-18.

Гельфанд С.И., Манин Ю.И.

1. Методы гомологической алгебры, I. М.: Наука, 1988.

Гротендик (Grothendieck A.)

1. Le groupe de Brauer I,II,III. Dix exposes sur la cohomologie des schemas. North-Holland, Amsterdam, 1968, С.46-188.

Гротендик, Демазюр (Grothendieck A., Demazure M.)

1. Schemas en groupes, I. Berlin: Springer, 1977.

Данилов В.И.

1. Геометрия торических многообразий. УМН, 1978, Т.33:2, С.83-134.

Дворк (Dwork B.)

1. On the rationality of the zeta function of an algebraic variety. Amer. J. Math.,1960, V.82, P.631-648.

Демазюр (Demazure M.)

1. Sous-groupes algebriques de rang maximum du groupe de Cremona. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 1970, V.4:3, P.507-588.

Дресс (Dress A.)

1. The permutation class group of finite group. J.Pure and Appl. Algebra, 1975, V.6, P.1-12.

Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.

1. Многогранники, графы, оптимизация. М.:Наука, 1981.

Исковских В.А.

1. Бирациональные свойства поверхности степени 4 в $\mathbf{P}^4$. Матем. сб., 1972, Т.88, С.31-37.

Картан А., Эйленберг С.

1. Гомологическая алгебра. М.:ИЛ, 1960.

Кацыло П.И.

1. Рациональность пространств модулей гиперэллиптических. Изв. АН СССР, серия матем., 1984, Т.48:4, С.705-710.

Кемпф, Кнудсен, Мамфорд, Сен-Донат (Kempf G., Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B.)

1. Toroidal embedding I. Lect.Notes in Math., Springer Verlag, Berlin, 1973.

Клячко А.А.

1. Модели Демазюра для специального класса торов. Семинар по арифметике алгебр. многообразий, Саратов, СГУ, 1979, С.32-37.
2. K-теория моделей Демазюра. Исслед. по теории чисел, Саратов, СГУ, 1982, С.61-72.
3. О рациональности торов с циклическим полем разложения. Арифметика и геометрия многообразий: Межвуз. сб., Куйбыш. ун-т, 1988, С.73-78.
4. Торы без аффекта в полупростых группах. Арифметика и геометрия многообразий: Межвуз. сб., Куйбыш. ун-т, 1989, С.67-78.
5. Прямые слагаемые перестановочных модулей и бирациональная геометрия. Арифметика и геометрия многообразий: Межвуз. сб., Куйбыш. ун-т, 1992, С.78-92.

Кнезер (Kneser M.)

1. Galois Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen uber p-adischen Korpern. Math. Z., 1965, T.88, P.40-47; II. Ibid., 1965, T.89, P.250-272.

Кольо-Телен, Сансюк (Colliot-Thelene J.-L., Sansuc J.-J.)

1. La R-equivalence sur les tores. Ann. sci. Ec. Norm. Sup., 1977, V.10:2, P.175-230.
2. Principal homogeneous spaces under flasque tori. J. Algebra, 1987, V.106, P.148-205.
3. La descente sur les varietes rationnelles. Duke Math.J., 1987, V.54, P.375-492.
4. The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups. IX Escuela Latinoamericana de Math. Santiago de Chile, 1988.

Кунявский Б.Э.

1. О торах с биквадратичным полем разложения. Изв. АН СССР, серия матем., 1978, Т.42:3, Р.580-587.
2. О бирациональной классификации торов малой размерности. Семинар по арифметике алгебраических многообразий, Саратовский ун-т, 1979, С.37-42.
3. Торы, разложимые над расширением Галуа с группой S_3. Исследов. по теории чисел , Саратовский ун-т, 1982, С.72-74.
4. О трехмерных алгебраических торах. Исследов. по теории чисел, Саратовский ун-т, 1987, С.90-111.

Кунявский, Скоробогатов (Kunyavskii B.E., Skorobogatov A.N.)

1. A criterion for weak approximation on linear algebraic groups. Séminaire de Théorie de Nombres, Paris, 1988 - 1989, 215-217.
2. Weak Appoximation in Algebraic Groups an Homogeneous Spaces. Contemp. Math., 1992, V.131 (Part 3), P.447-451.

Ленг С.

1. Алгебраические числа.М.:Мир,1966.

Ленстра (Lenstra H.W., Jr.)

1. Rational functions invariant under a finite abelian group. Invent. Math., 1974, V.25, P.299-325.
2. Rational functions under a cyclic group. Queen's papers in pure and appl. Math., 1980, V.54, P.9.

Мамфорд Д.

1. Абелевы многообразия. М.: Мир, 1971.

Манин Ю.И.

1. Рациональные поверхности над совершенными полями. Publ. Math. IHES, 1966, V.30, P.55-113.
2. Кубические формы. М.: Наука, 1972.

Милн Дж.

1. Этальные когомологии. М.: Мир, 1983.

Мията (Miyata K.)

1. Invariants of certain groups. Nagoya Math.J, 1971, V.41, P.69-73.

Назарова Л.А.

1. Целочисленные представления четверной группы. ДАН СССР, 1961, Т.140:5, С.1011-1014.

Накаяма (Nakayama T.)

1. Cohomology of class field theory and tensor product modules, I. Ann. of Math., 1961, V.74, P.101-139.

Оно (Ono T.)

1. Arithmetic of algebraic tori. Ann. of Math., 1961, V.74, P.101-139.

Платонов В.П., Рапинчук А.С.

1. Алгебраические группы и теория чисел. М.: Наука, 1991.

Попов В.Л.

1. Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения. Изв. АН СССР, серия матем. 1974, Т.38: 2, С.294-322.

Прочези (Procesi C.)

1. Non commutative affine rings. Atti Acad. Naz. Lincei, VIII. Ser., v.VIII, T.6, 1967, P.239-255.

Розенлихт (Rosenlicht M.)

1. Some basic theorems on algebraic groups. Amer. J. Math., 1956, V.78, P.401-443.

Ройтер А.В.

1. О представлениях циклической группы четвертого порядка целочисленными матрицами. Вестник ЛГУ, Т.19, 1960, С.65-74.

Сансюк (Sansuc J.-J.)

1. Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. J. reine und angew. Math., 1981, T.327, P.12-80.

Сегре (Segre B.)

1. Sur un probleme de M.Zariski. Colloque intern. d'algebre et de theorie des nombres, Paris, 1950, P.135-138.

Серр Ж.П.

1. Дзета-функция и L-функции. УМН, 1965, Т.20:6, Р.19-26.
2. Когомологии Галуа. М.: Мир, 1968.
3. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.

Солтман (Soltman D.J.)

1. Noether's problem over an algebaically closed fields. Invent.Math., 1984, V.77, P.71-84.
2. The Brauer group and the center of generic matrices. J.Algebra, 1985, V.97, P.53-67.
3. Multiplicative field invariants. J.Algebra, 1987, V.106, P.221-238.

Спрингер Т.А.

1. Линейные алгебраические группы. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления, 1989, Т.55, С.5-136.

Суон (Swan R.G.)

1. Индуцированные представления и проективные модули. Математика, 1964, Т.8:2, С.3-27.
2. Invariant rational functions and a problem of Steenrod. Invent. Math., 1969, V.7, P.148-158.

Суслин А.А.

1. Алгебраическая К-теория и гомоморфизм норменного вычета. Итоги науки и техн. ВИНИТИ.Соврем. пробл. матем. Новейшие достижения, 1984, Т.25, Р.115-207.

Форманек (Formanek E.)

1. The center of 3×3 generic matrices. Lin. and Multilin. Alg., 1979, V.7, P.203-212.
2. The center of 4×4 generic matrices. J. Algebra, 1980, V.62, P.304-319.

Халек (Hulek K.)

1. On the classification of stable rank r vector bundles over the progective plane. Prog. Math., 1980, V.7, P.113-144.

Хамфри Дж.

1. Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1980.

Хиронака (Hironaka H.)

1. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. Ann. Math., 1964, V.79, P.109-326.

Черноусов В.И.

1. О принципе Хассе для групп типа E_8. ДАН СССР, 1989, Т.306, С.1059-1063.

Чистов А.Л.

1. О бирациональной эквивалентности торов с циклическим полем разложения. Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1976, Т.64, С.153-158.
2. О числе образующих полугруппы классов алгебраических торов относительно стабильной эквивалентности. ДАН СССР, 1978, Т.242:5, С.1027-1029.

Шафаревич И.Р.

1. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1972.

Шевалле (Chevalley C.)

1. On algebraic group varieties. J. Math. Soc.Japan, 1954, V.6, P.303-324.

Шофильд (Schofield A.)

1. Matrix invariants of composite size, 1989, preprint.

Эндо, Мията (Endo S., Miyata T.)

1. Invariants of finite abelian groups. J. Math. Soc. Japan, 1973, V.25, P.7-26.

2. Quasi-permutation modules over finite groups. I. J.Math. Soc. Japan, 1973, v.25, 347-421; II. J.Math. Soc. Japan, 1974, V.26, P.698-713.

3. On a classification of the function fields of algebraic tori. Nagoya Math. J., 1974, V.56, P.85-104.

4. On the progective class group of finite groups. Osaka J. Math., 1976, V.13, P.109-122.

5. On the class groups of dihedral groups. J. of Algebra, 1980, V.63:2, P.548-573.

6. Integral represantations with trivial first cohomology groups. Nagoya Math. J., 1982, V.85, P.231-240.

Якобинский (Jacobinski H.)

1. Jenera and decompositions of laftices over orders. Acta Math., 1968, V.121, P.1-29.

BIRATIONAL GEOMETRY AND ARITHMETIC OF LINEAR ALGEBRAIC GROUPS, II.

V.E. Voskresenskii [2]

This article is a continuation of the previous work of the author [12]. In this article the methods of birational geometry are applied to investigation theory of invariants of finite groups of transformations. In chapter IV we study the connections between geometry and arithmetic of an algebraic group.

[2]Voskresenskii Valentin Eugenievich, Dept. of Math. Samara State University