УСТОЙЧИВОСТЬ И ХАОС В ДВУХУРОВНЕВЫХ МОДЕЛЯХ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ

В.В. Ручков [1]

Исследован вопрос об устойчивости и хаосе в динамике большого числа двухуровневых атомов, взаимодействующих с фотонным полем в резонаторе. Изучено влияние параметрических нестабильностей нелинейной среды.

В работах [1] и [2] был обнаружен и исследовался хаос в "классических" динамических системах, появляющихся при моделировании задачи взаимодействия ансамбля двухуровневых атомов с квантовой модой электромагнитного поля гамильтонианами вида

$$\widehat{H} = \hbar\omega_0\widehat{R}_3 + \hbar\omega\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + \hbar\, k(\widehat{R}_+ + \widehat{R}_-)(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger\,) + \hbar\, s(\widehat{a}\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger\widehat{a}^\dagger) \qquad (1)$$

$$\widehat{H} = \hbar\omega_0\widehat{R}_3 + \hbar\omega\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + \hbar\, k(\widehat{R}_+ + \widehat{R}_-)(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger\,) + \hbar\, s(\widehat{a}\widehat{a}e^{2i\omega\, t} + \widehat{a}^\dagger\widehat{a}^\dagger\, e^{-2i\omega\, t}) \qquad (2)$$

где $\widehat{R}_3, \widehat{R}_\pm$ – коллективные атомные операторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры SU(2)

$$[\widehat{R}_3,\widehat{R}_\pm] = \pm\widehat{R}_\pm, [\widehat{R}_+,\widehat{R}_-] = 2\widehat{R}_3, \qquad (3)$$

$$\widehat{R}_\alpha = \sum_{j=1}^{N}\widehat{\tau}_\alpha^{(j)},$$

$\alpha = 3,\pm$; $\widehat{\tau}_\alpha^{(j)}$ – матрицы Паули, описывающие j-й двухуровневый атом, N – полное число атомов, ω_0 – частота перехода между уровнями атома. Операторы $\widehat{a}$ и $\widehat{a}^\dagger$ соответствуют бозонным операторам поля с коммутационными соотношениями $[\widehat{a},\widehat{a}^\dagger] = \widehat{1}$, ω – частота гармонического осциллятора, представляющего квантованную моду электромагнитного поля в резонаторе; k – константа, описывающая взаимодействие между атомом и полем и пропорциональная матричному элементу оператора дипольного перехода между уровнями; s – константа самодействия, появляющаяся при учёте членов, пропорциональных квадрату векторного потенциала $\vec{A}^2$. Подобные члены возникают при разложении электромагнитных полей в резонаторе, заполненном диэлектрической средой, по плоским волнам — решениям уравнений Максвелла в вакууме, и описывают неустойчивость среды относительно параметрической генерации [3].

Гейзенберговские уравнения для атомных и полевых операторов имеют вид

$$\begin{aligned}
&id\widehat{R}_3/dt = k(\widehat{R}_+ - \widehat{R}_-)(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger),\\
&id\widehat{R}_+/dt = -\omega_0\widehat{R}_+ + 2k\widehat{R}_3(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger),\\
&id\widehat{R}_-/dt = \omega_0\widehat{R}_+ - 2k\widehat{R}_3(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger),\\
&id\widehat{a}/dt = \omega\widehat{a} + k(\widehat{R}_- + \widehat{R}_+) + 2s\widehat{a}^\dagger,\\
&id\widehat{a}^\dagger/dt = -\omega\widehat{a}^\dagger - k(\widehat{R}_- + \widehat{R}_+) - 2s\widehat{a},
\end{aligned} \qquad (4)$$

для гамильтониана (1) и

[1] Ручков Вячеслав Васильевич. Кафедра теоретической физики Тольяттинского филиала СГПУ

$$
\begin{aligned}
&id\widehat{R}_3/dt = k(\widehat{R}_+ - \widehat{R}_-)(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger),\\
&id\widehat{R}_+/dt = -\omega_0\widehat{R}_+ + 2k\widehat{R}_3(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger),\\
&id\widehat{R}_-/dt = \omega_0\widehat{R}_+ - 2k\widehat{R}_3(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger),\\
&id\widehat{a}/dt = \omega\widehat{a} + k(\widehat{R}_- + \widehat{R}_+) + 2se^{-2i\omega t}\widehat{a}^\dagger,\\
&id\widehat{a}^\dagger/dt = -\omega\widehat{a}^\dagger - k(\widehat{R}_- + \widehat{R}_+) - 2se^{2i\omega t}\widehat{a},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

для гамильтониана (2).

Введём средние значения аналогично работе [4]

$$
< \widehat{R}_3 >= Nz, < \widehat{R}_+ >= < \widehat{R}_- >^* = N(x+iy),
$$
$$
< \widehat{a} >=< \widehat{a}^\dagger >= (E+iG)/\sqrt{N}.
$$

Можно показать, что с точностью до слагаемых $\sim O(1/N)$

$$
< \widehat{R}_\alpha(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger) >\approx< \widehat{R}_\alpha >< \widehat{a} + \widehat{a}^\dagger > .
$$

Ограничиваясь обсуждением классической динамики в приближении среднего поля при условии, что число атомов в системе очень велико ($N \gg 1$), приходим к системе пяти зацепленных нелинейных уравнений

$$
\begin{aligned}
&x' = -y,\\
&y' = x + 2ez,\\
&z' = -2ey,\\
&e' = (\mu - \sigma)g,\\
&g' = -(\mu + \sigma)e + \beta^2 x
\end{aligned}
\tag{6}
$$

в случае модели (1) и

$$
\begin{aligned}
&x' = -y,\\
&y' = x + 2ez,\\
&z' = -2ey,\\
&e' = (\mu - \sigma Cos(2\mu t))g - \sigma Sin(2\mu t)e,\\
&g' = -(\mu + \sigma Cos(2\mu t))e + \sigma Sin(2\mu t)g + \beta^2 x
\end{aligned}
\tag{7}
$$

в случае модели (2).

Здесь производная берётся по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$ и введены обозначения $\mu = \omega/\omega_0, \sigma = 2s/\omega_0, \beta = 2k\sqrt{N}/\omega_0, e = -\beta E, g = -\beta G$.

Каждая из систем (6) и (7) обладает в общем случае только двумя интегралами движения, связанными с сохранением длины вектора Блоха, нормированного условием $x^2+y^2+z^2 = 1$, и энергии. В результате имеются три независимые переменные, что достаточно для появления стохастического поведения. Как и в изученном ранее случае нулевой перенормированной константы связи, т. е. при $\beta = 0$, у систем (6) и (7) появляется третий интеграл движения, и их динамика становится регулярной.

Для системы (6) особенностью является то, что при $\sigma = \mu$ она линеаризуется и имеет точное решение

$$
\begin{aligned}
&x = x_0 - \tfrac{A}{C}(Sin(Ct + \phi_0) - Sin\phi_0),\\
&y = ACos(Ct + \phi_0),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$z = z_0 - \frac{2e_0 A}{C}(Sin(Ct + \phi_0) - Sin\phi_0),$$
$$e = e_0,$$
$$g = g_0 + (\beta^2 x_0 + \frac{\beta^2 A}{C} Sin\phi_0 - 2\mu e_0)t + \frac{\beta^2 A}{C^2}(Cos(Ct + \phi_0) - Cos\phi_0),$$

где $C = \sqrt{1 + 4e_0^2}$, а значения величин ϕ_0 и A определяются соотношениями $tg\phi_0 = -(x_0 + 2e_0 z_0)/C, \quad y_0 = ACos\phi_0$.

Численное интегрирование систем (6) и (7) показало, что с увеличением управляющего параметра β осуществляется переход к хаотическому режиму через перемежаемость. Критическое значение $\beta \simeq 1$.

В области хаоса ($\beta > 1$) динамика систем (6) и (7) является сложной. В частности, при переходе через некоторые значения параметра β появляются и исчезают квазирегулярные структуры, что приводит к резким изменениям величины показателя Ляпунова и появлению – исчезновению соответствующих частот в спектре мощности. Соответствующие области значений параметра β образуют фрактальную структуру, что является характерным для подобной динамики. В случае $\beta > 8$ и далее рост величины показателя Ляпунова замедляется.

Влияние величины параметра σ на динамику системы (7) проявляется следующим образом: случай $\sigma > \mu$ соответствует режиму параметрической генерации; при $\sigma \simeq \mu$ система (7) как бы "помнит" о регулярном решении (8) для системы (6), что видно по значительному уменьшению величины максимального показателя Ляпунова. Т. е. учет дополнительных слагаемых в моделях (1) и (2) может привести к подавлению хаоса.

Таким образом, результаты исследования подтверждают возможность появления эффектов квантового хаоса при генерации когерентного излучения и взаимодействии его с ансамблем двухуровневых атомов.

Автор выражает благодарность Горохову А.В. за постоянную поддержку в работе.

Литература

[1] Горохов А.В.,Ручков В.В.//Изв. РАН. (Серия физическая). 1994. **58**. С.201.
[2] Горохов А.В.,Ручков В.В.//*Некоммутативные структуры в математической физике.* Тольятти, 1993. С. 84-89.
[3] Glauber R.J.,Lewenstein M. // Phys.Rev. A. 1991. **43**. P.467.
[4] Fox R.F.,Eidson J.C.//Phys.Rev. A. 1987. **36**. P.4321.

STABILITY AND CHAOS OF SOME TWO - LEVEL MODELS OF QUANTUM OPTICS

V.V. Ruchkov [2]

It is investigated the problem of stable and chaotic behaviour in the dynamics of many two - level atoms interacting with photon cavity mode. An influence of possible parametric instabilities of nonlinear media is discussed.

[2] Vyacheslav Vasilievich Ruchkov, Dep. of Theoretical Physics of the Togliatti Branch of the Samara Pedagogical University