

## ДИНАМИКА КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ В МОДЕЛЯХ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ

А.В.Горохов, Е.В.Рогачева,<sup>1</sup> А.В.Ширяев<sup>2</sup>

Представление когерентных состояний группы  $G = W_1 \otimes G_0$ ; ( $G_0 = SU(2)$  или  $SU(1;1)$ ) использовано при компьютерном моделировании динамики взаимодействия "атома" с  $(2j+1)$ - эквидистантными уровнями и квантованной моды электромагнитного поля в резонаторе ( $G_0 = SU(2)$ - обобщенная модель Джайнса - Каммингса). Второму случаю  $G_0 = SU(1;1)$  соответствует квантовая динамика двух и трехмодового осциллятора с квадратичной нелинейностью (параметрический резонанс на удвоенной частоте и трехволновые параметрические процессы нелинейной оптики). Выведены квазиклассические уравнения движения для перечисленных моделей и исследованы режимы временной динамики для "атомных" и полевых переменных.

### 1 Введение

Стохастическое (хаотическое) поведение классических динамических систем хорошо изучено [1]. В то же время особенности проявления хаоса при квантовании до сих пор остаются дискуссионными, несмотря на интенсивное изучение этой проблемы [2]. По-прежнему остается актуальными исследование стохастических свойств модельных гамильтонианов квантовой оптики. Один из них - простейший квантовоэлектродинамический объект - изолированный двухуровневый атом, взаимодействующий с одномодовым квантованным электромагнитным полем в идеальном резонаторе (модель Джайнса- Каммингса (МДК) [3, 4]). В работах [5, 6] в динамике МДК был обнаружен ряд неожиданных чисто квантовых эффектов - коллапс и возобновление квантовых осцилляций Раби, сжатие квантовых флуктуаций, когерентное пленение населенностей. Было также установлено, что обычно опускаемые в МДК быстро осциллирующие (нерезонансные) слагаемые приводят к хаосу средних значений населенностей уровней ансамбля  $N$  тождественных двухуровневых атомов при больших  $N$ , если константа взаимодействия "атом + поле" превышает некоторое пороговое значение [7, 8, 9].

В последнее время появились новые экспериментальные возможности по непосредственной проверке основных положений квантовой электродинамики (одноатомные лазеры, оптические ловушки, лазерное охлаждение)[10], что переводит МДК из

---

<sup>1</sup>Горохов Александр Викторович, Рогачева Елена Валерьевна. Кафедра общей и теоретической физики СамГУ

<sup>2</sup>Ширяев Александр Викторович. Кафедра оптики и спектроскопии СамГУ

числа чисто академических задач и стимулирует дальнейшее экспериментальное и теоретическое исследование МДК и ее обобщений [11].

Вместе с тем важно исследовать иные модельные гамильтонианы квантовой оптики с целью выявления у них возможных хаотических свойств. Прежде всего необходимо изучить модель  $(2j+1)$ -уровневого атома с многоквантовыми переходами, гамильтониан которой как и для МДК зависит от генераторов группы энергетического спина  $SU(2)$ .

Другой интересный случай - квантовые модели параметрического взаимодействия электромагнитных волн в нелинейных средах. Как будет здесь показано, трехволновое взаимодействие приводит к модельному гамильтониану, выраженному через генераторы группы  $SU(1,1)$  вместо матриц Паули для двухуровневого атома. Вследствие хорошо известного факта [12], что группа  $SU(1,1)$  является аналитическим продолжением спиновой группы  $SU(2)$ , такие, на первый взгляд совершенно разные задачи оказалось возможным изучать в рамках единого подхода.

Факт существования у исследуемых задач группы динамической симметрии позволяет ввести базис теоретико-групповых когерентных состояний, элемент которого (приближенно) описывает физическое состояние системы. Тогда под квантовым хаосом можно понимать стохастическое поведение во времени параметров когерентных состояний, динамика которых соответствует временному поведению классического аналога квантовой задачи, и для тестирования хаоса использовать известные в теории классических стохастических систем методы [1, 2].

## 2 Модельные гамильтонианы и уравнения движения

Хорошо известно, что динамика двухуровневого атома, взаимодействующего с модой квантованного электромагнитного поля в идеальном резонаторе, задается модельным спин - бозонным гамильтонианом вида

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_F + \mathbf{H}_A + (\mathbf{H}_{int}^{(1)} + \mathbf{H}_{int}^{(2)}), \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_F = \nu \left( \mathbf{b}^+ \mathbf{b} + \frac{1}{2} \right), \quad (2)$$

$$\mathbf{H}_A = \omega \mathbf{J}_0, \quad (3)$$

$$\mathbf{H}_{int}^{(1)} = g \mathbf{b} \mathbf{J}_+ + g \mathbf{b}^+ \mathbf{J}_- + h.c., \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_{int}^{(2)} = \kappa (\mathbf{b}^+ + \mathbf{b})^2. \quad (5)$$

здесь  $\nu$  - частота полевой моды,  $\omega$  - частота атомного перехода, ( $\hbar = 1$ ),  $g$  и  $\kappa$  - константы связи,  $\mathbf{b}^+$  и  $\mathbf{b}$  - бозонные операторы рождения и уничтожения,  $\mathbf{J}_0$ ,  $\mathbf{J}_\pm = \mathbf{J}_1 \pm i\mathbf{J}_2$  - генераторы группы  $SU(2)$ , которые определяются матрицами Паули. Оператор  $\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_-$  увеличивает (уменьшает) энергию атома на величину  $\omega$ .

В соответствии с моделью  $\nu \approx \omega$ , поэтому обычно в гамильтониане взаимодействия учитывают только резонансные члены, если переходы между уровнями атома рассчитывают в случае малых значений константы  $g$ . Слагаемое  $\mathbf{H}_{int}^{(2)}$  в (1) обычно опускают, поскольку  $\kappa \ll g$ ; к тому же, если  $\kappa \equiv const$ , унитарным преобразованием его можно исключить, перенормировав частоту полевой моды. Однако, если  $\kappa = \kappa(t)$ , подобное слагаемое моделирует параметрическую раскачку фотонной моды внешним классическим (лазерным) полем с частотой  $\Omega \approx 2\nu$  в присутствии нелинейной среды.

Антирезонансные слагаемые  $g (\mathbf{b}^+ \mathbf{J}_+ + \mathbf{b} \mathbf{J}_-)$  оказываются существенными, если константа связи "атом-поле" становится по порядку величины сравнимой с частотой атомного перехода [10, 11] ("одетая" МДК). Кроме того, антирезонансные слагаемые необходимо учитывать в аналогичном выражению (1) спин-бозонном гамильтониане электрон - фононного взаимодействия в твердых телах.

В качестве наиболее очевидного обобщения МДК можно рассмотреть гамильтониан  $(2j+1)$ -уровневого атома (спин  $j = 1/2, 1, \dots$ ) с  $(2j+1)$ -мерными генераторами группы  $SU(2)$ . В квантовой оптике во многих случаях необходимо рассматривать  $m$ -квантовые переходы между атомными уровнями, что ведет к нелинейному по бозонным операторам гамильтониану взаимодействия

$$\mathbf{H}_{int}^{(1)} = g (\mathbf{b})^m \mathbf{J}_+ + g (\mathbf{b}^+)^m \mathbf{J}_- + h.c.. \quad (6)$$

Для дальнейшего важно подчеркнуть, что все такие гамильтонианы выражены через генераторы прямого произведения групп Ли  $W(1) \otimes SU(2)$ , группа Гейзенберга - Вейля соответствует полевой подсистеме, а  $SU(2)$  -  $(2j+1)$ -уровневому атому.

Гамильтониан с генераторами группы  $SU(1, 1)$  вместо  $SU(2)$  возникает в задаче об описании трехволнового параметрического взаимодействия в среде с кубической по полю нелинейностью в энергии взаимодействия поля со средой  $-\vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$ , здесь  $\vec{\mathbf{P}}$  - вектор поляризации среды.

Так, вырожденному случаю параметрического взаимодействия волн с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ,  $2\omega_1 \approx \omega_2$  соответствует квантовый гамильтониан

$$\mathbf{H} = \omega_1 \mathbf{b}_1^+ \mathbf{b}_1 + \omega_2 \mathbf{b}_2^+ \mathbf{b}_2 + \Lambda (\mathbf{b}_1^+ \mathbf{b}_1^+ \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2^+), \quad (7)$$

где константа  $\Lambda$  пропорциональна соответствующей компоненте тензора нелинейной восприимчивости [13].

Очевидно, что выражение (7) после подстановок

$$\mathbf{K}_0 = (1/2) (\mathbf{b}_1^+ \mathbf{b}_1 + \frac{1}{2}), \quad \mathbf{K}_+ = (1/2) \mathbf{b}_1^+ \mathbf{b}_1^+, \quad \mathbf{K}_- = (1/2) \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1$$

преобразуется к виду гамильтониана МДК, в котором генераторы  $SU(2)$  замещены генераторами положительной дискретной серии группы  $SU(1, 1)$ .

Главное отличие между  $SU(2)$  и  $SU(1, 1)$  ("гиперболической") моделями состоит здесь в роли нерезонансных слагаемых. Их введение в гамильтониан (7) ведет к параметрической раскачке и к росту энергии и числа квантов в обеих подсистемах одновременно. Следовательно, такой процесс может идти лишь в присутствии нестационарного (классического) источника.

В общем случае, гамильтониан параметрического взаимодействия запишем в виде

$$\mathbf{H} = \nu (\mathbf{b}^+ \mathbf{b} + \frac{1}{2}) + 2\omega \mathbf{K}_0 + g \mathbf{K}_+ \mathbf{b} + \bar{g} \mathbf{K}_- \mathbf{b}^+ + \lambda \mathbf{K}_+ \mathbf{b} + \bar{\lambda} \mathbf{K}_- \mathbf{b}^+. \quad (8)$$

Здесь  $([\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_\pm] = \pm \mathbf{K}_\pm, [\mathbf{K}_+, \mathbf{K}_-] = -2\mathbf{K}_0)$ ;  $\lambda$  - (зависящая от времени) константа, зависящая от амплитуды внешнего (лазерного) поля,  $\nu \approx 2\omega$  - условие резонанса; в более общем случае  $2\omega = \omega_1 + \omega_2$ , где  $\omega_{1,2}$  - частоты электромагнитных волн параметрически связанных с волной частоты  $\nu$ ; константа  $g$  пропорциональна некоторой компоненте тензора третьего ранга квадратичной нелинейности).

Подчеркнем, что для гиперболической МДК  $\lambda$  не обязана быть равной константе  $g$ , и в общем случае  $\lambda$  не константа.

В целях общности описания при рассмотрении трехволнового взаимодействия выделим, как и в случае  $SU(2)$  - модели, "атомную подсистему" - осциллятор с двухквантовыми переходами между уровнями, определяемыми генераторами  $SU(1, 1)$  и "полевою подсистему" - осциллятор с одноквантовыми переходами.

Для определенности далее будут исследованы случаи лишь с одно - и двухквантовыми переходами ( $m = 1$  и  $m = 2$ ) между уровнями "атома".

Используя в качестве базиса вектора  $|CS\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\zeta\rangle$ , где  $|\alpha\rangle$  - Глауберовское когерентное состояние полевой моды,  $|\zeta\rangle$  - когерентное состояние на группе  $SU(2)$  или  $SU(1, 1)$  - в зависимости от задачи, введем матричный элемент оператора эволюции [14]  $U(t, t_0) = \exp(-i(t - t_0)\mathbf{H})$ ,

$$\begin{aligned} & \langle CS | \exp(-i(t - t_0)\mathbf{H}) | CS' \rangle = \\ & = \underbrace{\int \cdots \int}_{(N-1)} \langle CS_N | \exp(-i(t - t_0)\mathbf{H}/N) | CS_{N-1} \rangle d\mu(CS_{N-1}) \times \\ & \quad \langle CS_{N-1} | \exp(-i(t - t_0)\mathbf{H}/N) | CS_{N-2} \rangle d\mu(CS_{N-2}) \times \dots \\ & \quad \dots \times d\mu(CS_1) \langle CS_1 | \exp(-i(t - t_0)\mathbf{H}/N) | CS_0 \rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Delta t = \frac{t - t_0}{N}, \quad N \gg 1.$$

Здесь  $d\mu(CS_i)$  - инвариантная мера в разложении единицы. Используя далее хорошо известное групповое свойство оператора эволюции и соотношение полноты, приведем каждый множитель в соотношении (9) к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \langle CS_{j+1} | e^{-i(t-t_0)\mathbf{H}/N} | CS_j \rangle \simeq \langle CS_{j+1} | 1 - i(t - t_0)\mathbf{H}/N | CS_j \rangle \simeq \\ & \simeq \langle CS_{j+1} | CS_j \rangle \exp(-i(t - t_0)h(CS_{j+1}|CS_j)), \end{aligned}$$

где

$$h(KC_{j+1}|KC_j) \equiv \frac{\langle CS_{j+1} | \mathbf{H} | CS_j \rangle}{\langle CS_{j+1} | CS_j \rangle} \equiv h(\alpha, \zeta | \alpha, \zeta)$$

- ковариантный символ гамильтониана [14].

Переходя затем к пределу  $N \rightarrow \infty$ , получаем

$$\langle \alpha, \zeta | \exp(-i(t - t_0)\mathbf{H}) | \alpha t, \zeta t \rangle = \int DM_\infty e^{iS}.$$

Здесь  $S$  - функционал действия.

После некоторых вычислений приходим к квазиклассическим уравнениям Эйлера - Лагранжа для систем с динамической группой  $W(1) \otimes SU(2)$ :

$$\left\{ \begin{aligned} & \dot{\alpha} + i\nu\alpha + i2jgm(\alpha^*)^{m-1} \frac{\zeta}{1+\zeta\zeta^*} + i2j\lambda m(\alpha^*)^{m-1} \frac{\zeta^*}{1+\zeta\zeta^*} = 0, \\ & \dot{\alpha}^* - i\nu\alpha^* - i2j\bar{g}m(\alpha)^{m-1} \frac{\zeta^*}{1+\zeta\zeta^*} - i2j\bar{\lambda}m(\alpha)^{m-1} \frac{\zeta}{1+\zeta\zeta^*} = 0, \\ & \dot{\zeta} + i\omega\zeta + i\bar{g}(\alpha)^m + i\lambda(\alpha^*)^m - ig(\alpha^*)^m\zeta^2 - i\bar{\lambda}(\alpha)^m\zeta^2 = 0, \\ & \dot{\zeta}^* - i\omega\zeta^* - ig(\alpha^*)^m - i\bar{\lambda}(\alpha)^m + i\bar{g}(\alpha)^m\zeta^{*2} + i\lambda(\alpha^*)^m\zeta^2 = 0. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Здесь  $(2j+1)$  число атомных уровней; переменная  $\zeta$  принимает значения на замкнутой комплексной плоскости (сфере Блоха). (Символы  $*$  и  $\bar{\phantom{x}}$  обозначают комплексное сопряжение, первый использован для динамических переменных - параметров когерентных состояний, а второй для констант взаимодействия. В последующих расчетах мы различаем два случая:  $g \neq 0, \lambda = 0$  - (МДК), и  $g = \lambda$  - ("одетая" МДК).

Подобные уравнения справедливы для систем с динамической группой  $W(1) \otimes SU(1,1)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} + i\nu\alpha + i2kgm(\alpha^*)^{m-1} \frac{\zeta}{1-\zeta\zeta^*} + i2k\lambda m(\alpha^*)^{m-1} \frac{\zeta^*}{1-\zeta\zeta^*} = 0, \\ \dot{\alpha}^* - i\nu\alpha^* - i2k\bar{g}m(\alpha)^{m-1} \frac{\zeta^*}{1-\zeta\zeta^*} - i2k\bar{\lambda}m(\alpha)^{m-1} \frac{\zeta}{1-\zeta\zeta^*} = 0, \\ \dot{\zeta} + i\omega\zeta + i\bar{g}(\alpha)^m + i\lambda(\alpha^*)^m + ig(\alpha^*)^m\zeta^2 + i\bar{\lambda}(\alpha)^m\zeta^2 = 0, \\ \dot{\zeta}^* - i\omega\zeta^* - ig(\alpha^*)^m - i\bar{\lambda}(\alpha)^m - i\bar{g}(\alpha)^m\zeta^{*2} - i\lambda(\alpha^*)^m\zeta^{*2} = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

Вместо  $j$  здесь появляется параметр  $k$ , определяющий собственное значение оператора Казимира  $\mathbf{K}^2 = \mathbf{K}_0^2 - 1/2 (\mathbf{K}_+ \mathbf{K}_- + \mathbf{K}_- \mathbf{K}_+)$  группы  $SU(1,1)$  и переменная  $\zeta$  - точка внутренности круга единичного радиуса (плоскости Лобачевского). Для двухмодового осциллятора  $k = \frac{1+|\Delta n|}{2} = 1/2, 1, 3/2, \dots$  ( $\Delta n$  - разность между числами квантов в модах); для одномодового осциллятора с двухквантовыми переходами (случай вырожденного параметрического взаимодействия) существуют два значения:  $k = 1/4$  для четных уровней, и  $3/4$  для нечетных.

Общие решения этих нелинейных уравнений не удастся получить в аналитическом виде даже для упрощенных уравнений (в приближении вращающейся волны). Поэтому были использованы численные методы интегрирования. Разработанная компьютерная программа, основанная на методе Дормана - Принса пятого порядка, позволяет получать графики временных зависимостей вещественных и мнимых частей параметров КС, траектории КС (в случае группы  $SU(2)$  реализовано нахождение траектории спинового КС на сфере Блоха - подстановкой  $\zeta = e^{i\phi} \text{ctg}(\theta/2)$ ). Кроме того, для тестирования динамики системы находились фазовые портреты вещественных и мнимых частей всех динамических переменных и их "спектры мощности", рассчитывалась зависимость показателей Ляпунова от значений констант связи и приготовленного начального состояния, а также зависимость от времени вероятности переходов в атоме. Для определенности, в настоящей работе мы ограничиваемся нахождением вероятности нахождения атома в нижнем состоянии, при условии, что в начальный момент времени система приготовлена в состоянии  $|\alpha(0) \rangle \otimes |\zeta(0) \rangle$ :

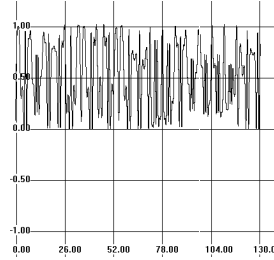
$$p(t) = |\langle \text{down} | \zeta(t) \rangle|^2. \quad (12)$$

### 3 Результаты компьютерного моделирования

При проведении расчетов параметры гамильтонианов и начальные состояния варьировались в широком диапазоне всех дозволённых значений.

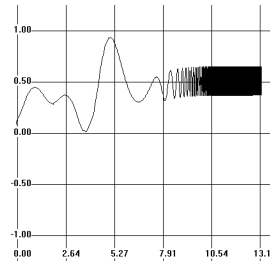
Если  $\lambda = 0$ , то при отсутствии внешнего параметрического воздействия даже при больших значениях константы  $g$  динамика остается регулярной. Учет контрвращающихся слагаемых приводит к существенному усложнению поведения как атомной, так и полевой моды. При этом в случае модели  $SU(1,1)$  контрвращающиеся слагаемые описывают параметрическую генерацию в "атомной моде", и на сравнительно

небольших временах развивающаяся параметрическая неустойчивость приводит к заселению очень высоких уровней, даже для малых значений константы  $g$ . Подобного явления в случае модели  $SU(2)$  не наблюдалось, что можно объяснить ограниченностью спектра состояний, описываемых  $2j = 1$ -мерным неприводимым представлением группы  $SU(2)$ , в отличие от некомпактной динамической группы  $SU(1, 1)$ .

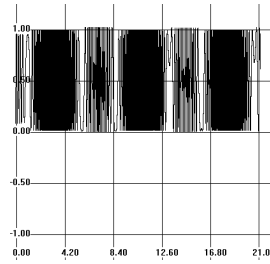


**Рис.1.** Временная зависимость вероятности заселения нижнего уровня в двухуровневом атоме ( $g = \lambda = 0.8$ ,  $\nu = \omega = 1$ ,  $\zeta(0) = 0.3$ ,  $\alpha(0) = 1$ )

Временная зависимость вероятности перехода между атомными уровнями, вычисленная исходя из квазиклассической динамики параметров когерентных состояний, в случае стандартной МДК, а также в модели, включающей антирезонансные слагаемые взамен резонансных ( $g = 0$ ,  $\lambda \neq 0$ ), вполне тривиальна (регулярна) и для стандартной МДК качественно хорошо согласуется с известной квантовой формулой [4]. В случае "одетой" МДК ( $\lambda = g$ ) при увеличении константы взаимодействия наблюдается переход от регулярного режима к многочастотному. При этом для широкого диапазона начальных данных (начальных значений параметров когерентных состояний, которые сопоставляются среднему числу возбуждений в начальный момент времени в полевой и атомной модах) имеют место следующие особенности: в случае слабой связи атомной и полевой подсистем ( $g \leq 0.05$  в единицах атомной частоты, среднее число фотонов в начальный момент времени  $\bar{n} \leq 25$ ) поведение вероятности перехода между атомными уровнями в зависимости от времени близко к строго синусоидальному. Увеличение константы взаимодействия приводит к многочастотному режиму с синусоидальной огибающей, которая выражена более ярко при меньших константах взаимодействия и больших начальных значениях среднего числа фотонов в полевой моде. Дальнейший рост  $g$  ведет к дальнейшему усложнению поведения вероятности (рис.1), однако существует такое значение постоянной взаимодействия (конкретное численное значение определяется начальными условиями), при котором число частот в многочастотном режиме резко сокращается и временная зависимость вероятности опять становится практически регулярной. Небольшое изменение  $g$  в сторону увеличения приводит к возобновлению многочастотного режима, менее регулярного при больших значениях константы взаимодействия и меньших начальных значениях среднего числа фотонов в полевой моде. Такая смена режимов, называемая перемежаемостью, является одним из возможных путей к хаосу [15].

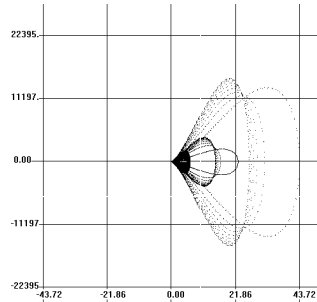


**Рис.2.** Временная зависимость вероятности заселения нижнего уровня в двухуровневом атоме с двухквантовыми переходами ( $g = \lambda = 0.4$ ,  $2\nu = \omega = 1$ ,  $\zeta(0) = 0.3$ ,  $\alpha(0) = 1$ )



**Рис.3.** Временная зависимость вероятности заселения нижнего уровня в двухуровневом атоме с двухквантовыми переходами ( $g = \lambda = 0.4$ ,  $2\nu = \omega = 1$ ,  $\zeta(0) = 0.3$ ,  $\alpha(0) = 5$ )

При том же порядке константы взаимодействия ярко выраженное хаотическое поведение вероятности перехода наблюдается для обобщения модели Джейнса - Каммингса на случай (разрешенных) двухквантовых переходов между уровнями атомной подсистемы (рис.2 и 3). Видно, что с ростом среднего числа квантов в полевой моде  $\bar{n} = |\alpha|^2$  временная зависимость вероятности становится более регулярной. С ростом  $\bar{n}$  полевая мода становится более классической и задача сводится в динамике спина во внешнем классическом поле и, если поле является регулярным, хаос не может появиться.

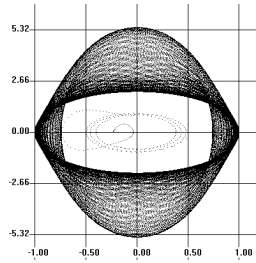


**Рис.4.** Фазовый портрет в плоскости  $(Re\zeta, Re\dot{\zeta})$ , ( $g = \lambda = 0.4$ ,  $2\nu = \omega = 1$ ,  $\zeta(0) =$

0.3,  $\alpha(0) = 0.3$ )

Рис.4 представляет рассчитанный фазовый портрет в плоскости  $Re\zeta, Re\dot{\zeta}$ , соответствующий многочастотному режиму в такой модели.

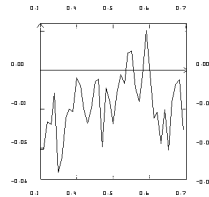
При рассмотрении модели трехволнового параметрического взаимодействия слабые, аналогичные антирезонансным в "одетой" модели Джейнса - Каммингса, описывают процесс параметрической раскачки, который может идти только за счет внешнего воздействия (поскольку не выполняется закон сохранения энергии (для замкнутой системы)). Такое воздействие моделировалось ступенчатой функцией, обращающейся в ноль на всем временном интервале, за исключением одного промежутка, длительность которого была невелика по сравнению со временем исследования динамики системы.



**Рис.5.** Фазовый портрет в плоскости  $(Re\zeta, Re\dot{\zeta})$ ,  $|\zeta| < 1$ ,  $k = 1/4$ ,  $\nu = 2\omega = 1$ ,  $g = 0.2$ ,  $\zeta(0) = 0.5$ ,  $\alpha(0) = 1$ ,  $\delta(\omega t_0) = 3$ ,  $\omega t = 10$

В зависимости от времени воздействия и величины постоянной взаимодействия ( $\lambda \neq g$ ) сильные изменения претерпевали фазовые портреты компонент КС, но оставались регулярными (рис.5).

Увеличивая время воздействия или постоянную взаимодействия, можно было добиться лишь разрушения системы, что выражалось графически как достижение точкой, описывающей когерентное состояние "атомной" подсистемы, за конечное время границы круга единичного радиуса (соответствующей абсолюту в плоскости Лобачевского). Физически, по-видимому, следует говорить о начале параметрической генерации, ведущей к лавинообразному (экспоненциальному) росту среднего числа квантов в "атомной" моде.



**Рис.6.** Зависимость показателя Ляпунова от константы связи "атом - поле"  $g$  в случае двухуровневого атома, ( $\alpha = 1$ ,  $\zeta = 0.5$ )



## 4 Выводы

Отметим, что критерием хаоса служили, в основном, фазовые портреты вещественной и мнимой компонент параметра когерентного состояния, описывающего атомную подсистему. Расчет показателей Ляпунова нам удалось реализовать только в случае систем, параметры которых не изменяются в процессе вычислений. Вследствие этого выводы о типе наблюдающихся режимов поведения строго говоря следует считать лишь предварительными. Выполненный же расчет показателя Ляпунова для модели двухуровневого атома (например, представленный Рис.6) находится в хорошем согласии с результатами, полученными иными методами авторами недавней работы [16], что позволяет нам надеяться на корректность сделанных заключений и в тех случаях, когда показатель Ляпунова не был вычислен.

В заключение отметим, что динамика всех перечисленных моделей была нами изучена также и на основе более традиционного подхода, использующего технику операторных средних. Результаты обоих подходов очень хорошо согласуются. Однако в методе операторных средних существует дополнительная возможность по исследованию влияния хаоса на тип статистики в полевой моде (и обратного влияния). Детали таких вычислений будут опубликованы в следующей статье.

*Авторы благодарны А.А. Бирюкову, Е.К. Башкирову, В.Л. Дербову и В.В. Ивашкину за полезные обсуждения результатов работы.*

## Литература

- [1] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. // *Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса*. М.: Наука, 1988.
- [2] Gutzwiller M.C., // *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. NY. Springer-Verlag, 1990.
- [3] Jaynes E.T., Cummings F.W. // Proc.IEEE. 1963. 51. P.89.
- [4] Аллен Л., Эберли Дж. // *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*. М.: Наука, 1978.
- [5] Narozhny N.B., Sanches - Mondragon J.J., Eberly J.H. // Phys.Rev. A. 1981. 23. P.236.
- [6] Rempe G., Walter H., Klein N. // Phys. Rev. Lett. 1987. 58. P.353.
- [7] Ackerhalt J.R., Milonni P.W., Shih M.-L. // Phys. Rep. 1985. 128. P.205.
- [8] Белобров П.И., Заславский Г.М., Тартаковский Г.Х. // ЖЭТФ. 1977. 71. С.1799.
- [9] Горохов А.В., Ручков В.В. // Изв. РАН (Физика). 1994. 58. С.201.
- [10] Вальтер Г. // УФН. 1996. 166. С.777.
- [11] Chumakov S.M., Klimov A.B., Sanches-Mondragon J.J. // Phys.Rev. A. 1994. 49. P.4972.
- [12] Переломов А.М. // *Обобщенные когерентные состояния и их применения*. М.: Наука, 1987.
- [13] Акулин В.М., Карлов Н.В. // *Интенсивные резонансные взаимодействия в квантовой электронике*. М.: Наука, 1987.
- [14] Gorokhov A.V. // *Group Theoretical Methods in Physics*. BV, Utrecht.: VNU Sci. Press. 1986. V.1. P.595.

[15] Шустер Г.Г. *Детерминированный хаос: (Введение)*. М.: Мир, 1988.

[16] Пранц С.В., Коньков Л.Е. // Изв. РАН (Физика). 1996. 60. С.178.

## COHERENT STATE DYNAMICS OF SEVERAL QUANTUM OPTICAL MODELS

A.V. Gorokhov, E.V. Rogacheva,<sup>3</sup> A.V. Shiryayev<sup>4</sup>

The coherent state representations of the group  $G = W_1 \otimes G_0$  (where  $G_0 = SU(2); SU(1; 1)$ ) are used in computer simulation of the dynamics of single two-level atom ( $G_0 = SU(2)$ ) interacting with a quantized photon cavity mode - the Jaynes - Cummings model (JCM) without the rotating wave approximation and, in general, nonlinear in photon variables). The second case (hyperbolic Jaynes - Cummings model (HJCM),  $G_0 = SU(1; 1)$ ) corresponds to the quantum dynamics of quadratic nonlinear coupled oscillators (the parametric resonance on double field frequency and a three - wave parametric processes of nonlinear optics). Quasiclassical dynamical equations for parameters of approximately factorizable coherent states for these models are derived and regimes of motion for "atom" and field variables are analyzed.

---

<sup>3</sup>Alexander Victorovich Gorokhov, Elena Valerievna Rogacheva, Dep. of General & Theoretical Physics of Samara State University

<sup>4</sup>Alexander Victorovich Shiryayev, Dep. of Optics & Spectroscopy of Samara State University