МОДЕЛЬ ДЖЕЙНСА-КАММИНГСА В НЕИДЕАЛЬНОМ РЕЗОНАТОРЕ С КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

Е.К. Башкиров [1], Е.Г. Мангулова [2]

На основе обобщенного кинетического уравнения для матрицы плотности рассмотрена динамика двухуровневого атома, взаимодействующего с модой квантового электромагнитного поля в неидеальном резонаторе с конечной температурой. Исследовано временное поведение среднего числа фотонов в моде в завимости от температуры резонатора.

В последнее время в целом ряде работ (см. ссылки в [1]) исследовалась динамика моделей типа Джейнса-Каммингса в неидеальном резонаторе с нулевой температурой. Такие модели широко используются для теоретического анализа поведения одноатомных мазеров и микромазеров. Вместе с тем в реальных экспериментах с одноатомными мазерами на ридберговских переходах [2] учет конечности температуры резонатора может заметно сказаться на значениях констант потерь фотонов из резонатора и тем самым на временном поведении средних значений наблюдаемых физических величин, таких, как среднее число фотонов в резонаторе, средняя населенность атомных уровней и др.

В настоящей работе нами рассмотрена динамика простейшей модели двухуровневого атома, взаимодействующего резонанасным образом с модой квантового электромагнитного поля в неидеальном резонаторе с конечной температурой. Кинетическое уравнение для матрицы плотности системы "атом + мода квантового поля" ρ может быть записано в виде [3]-[4]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i/\hbar\,[H,\rho] - k\,\left[a^{+}, a\,\rho\right] - k\,\left[\rho\, a^{+}, a\right] - \delta\,\left[a, a^{+}\,\rho\right] - \delta\,\left[\rho\, a\,, a^{+}\right], \qquad (1)$$

где

$$H = H_A + H_F + H_{AF}.$$

Здесь $H_A = \hbar\,\omega_0\,R^z$ - гамильтониан свободного двухуровневого атома, ω_0 - частота перехода в двухуровневом атоме, R^z - оператор инверсии населенностей в атоме; $H_F = \hbar\,\omega\,a^{+}a$ - гамильтониан свободного одномодового электромагнитного поля в резонаторе частоты ω (в условия резонансного взаимодействия полагаем, что $\omega_0 = \omega$); $H_{AF} = \hbar g\,\left(a\,R^{+} + a^{+}R^{-}\right)$ - гамильтониан взаимодействия двухуровневого атома с модой квантового электромагнитного поля в дипольном приближении и приближении вращающейся волны, R^{+}, R^{-} - операторы переходов между уровнями в атоме, g - константа взаимодействия атома с полем.

[1] Башкиров Евгений Константинович. Кафедра общей и теретической физики СамГУ
[2] Мангулова Екатерина Геннадьевна. Кафедра общей и теоретической физики СамГУ

В уравнении (1) коэффициенты k и δ определяют скорости потерь фотонов из резонатора. Явный вид константы k приведен в [4], а $\delta = exp[-\hbar\,\omega/k\,T]\,k$, где T - температура термостата (резонатора). В случае нулевой температуры термостата $T=0$ константа δ обращается в нуль и уравнение (1) превращается в стандартное управляющее уравнение (master equation) Агарвала [5].

Для вычисления средних значений наблюдаемых динамических переменных удобно использовать представление взаимодействия

$$W(t) = e^{i/\hbar\, H_{AF}\, t}\, \rho(t)\, e^{-i/\hbar\, H_{AF}\, t},$$

$$\tilde{O}(t) = e^{i/\hbar\, H_{AF}\, t}\, O\, e^{-i/\hbar\, H_{AF}\, t},$$

где O - произвольный оператор атомной или полевой подсистем в представлении Шредингера. Уравнение для матрицы плотности (1) в представлении взаимодействия можно записать в в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -k\,\left[\tilde{a}^{+}, \tilde{a}\, W\right] - k\,\left[W\,\tilde{a}^{+}, \tilde{a}\right] - \delta\,\left[\tilde{a}, \tilde{a}^{+}\, W\right] - \delta\,\left[W\,\tilde{a}\,\tilde{a}^{+}\right]. \tag{2}$$

Будем искать решение уравнения (2) в представлении "одетых" состояний (состояний, собственных для гамильтониана взаимодействия). Предположим, что в начальный момент времени атом находится на верхнем энергетическом уровне , а n - начальное число фотонов в моде. Тогда полный набор "одетых" состояний и собственных значений энергии гамильтониана взаимодействия H_{AF}, необходимых для описания эволюции системы с учетом возможных потерь фотонов из резонатора, имеет вид

$$|\Psi_n^{\pm}>= (|n;2> \pm |n+1;1>)/\sqrt{2}, \qquad E_n^{\pm} = \pm\hbar\, g\, \sqrt{n+1}, \tag{3}$$

$$|\Psi_0>= |0;1>, \qquad E_0 = 0.$$

Полагая, что $k, \delta << g$, мы можем воспользоваться секулярным приближением [5], отбросив быстроосциллирующие слагаемые (на частотах $\propto g$). Для диагональных матричных элементов по состояниям (3) уравнение эволюции можно получить в виде

$$< \Psi_n^{\pm}|\dot{W}(t)|\Psi_n^{\pm} >= 2k\left[\Gamma_{n+1}^{+} < \Psi_{n+1}^{\pm}|\dot{W}(t)|\Psi_{n+1}^{\pm} > + \right.$$

$$\left.\Gamma_{n+1}^{-} < \Psi_{n+1}^{\mp}|\dot{W}(t)|\Psi_{n+1}^{\mp} > -(\Gamma_n^{+} + \Gamma_n^{-})\, < \Psi_n^{\pm}|\dot{W}(t)|\Psi_n^{\pm} >\right] +$$

$$2\delta\left[\Gamma_n^{+} < \Psi_{n+1}^{\pm}|\dot{W}(t)|\Psi_{n+1}^{\pm} > +\Gamma_n^{-} < \Psi_{n+1}^{\mp}|\dot{W}(t)|\Psi_{n+1}^{\mp} > \right.$$

$$\left. -(\Gamma_{n+1}^{+} + \Gamma_{n+1}^{-})\, < \Psi_n^{\pm}|\dot{W}(t)|\Psi_n^{\pm} >\right], \tag{4}$$

где $\Gamma_n^{\pm} = (\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n})^2/4$.

Введем функцию

$$F_n =< \Psi_n^{+}|\dot{W}(t)|\Psi_n^{+} > + < \Psi_n^{-}|\dot{W}(t)|\Psi_n^{-} > .$$

Для величины F_n из уравнения (4) получаем

$$\dot{F}_n = \left[2\,k\,\left(n+\frac{3}{2}\right) + 2\,\delta\,\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\, F_{n+1} - -\left[2\,k\,\left(n+\frac{1}{2}\right) + 2\,\delta\,\left(n+\frac{3}{2}\right)\right]\, F_n. \tag{5}$$

В качестве начального состояния поля в резонаторе мы будем использовать когерентное состояние, для которого вероятность p_n обнаружения определенного числа фотонов n в моде определяется распределением Пуассона. Для $N >> < n >$ вероятность p_n очень мала. Поэтому при решении зацепляющейся системы уравнений (5) мы можем предположить, что существует верхний предел числа фотонов в начальный момент времени, такой, что $< \Psi^{\pm}_{N+1}|\dot{W}(0)|\Psi^{\pm}_{N+1} >= 0$. Тогда $< \Psi^{\pm}_{N+1}|\dot{W}(t)|\Psi^{\pm}_{N+1} >= 0$ в любые последующие моменты времени, так как резонатор не может увеличивать число фотонов в моде. Тогда для всех $n < N$ решение системы (5) можно записать в виде

$$F_n(t) = \exp\left[-\left(2\,k\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\,\delta\left(n+\frac{3}{2}\right)\right)\,t\right]$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{[1-exp(-2\,(k+\delta)\,t)]^{i-n}}{(2\,k+2\,\delta)^{i-n}(i-n)!}\,\left(\prod_{l=n+1}^{i}\,\left(2\,k\left(l+\frac{1}{2}\right)+2\,\delta\left(l-\frac{1}{2}\right)\right)\right)\,F_i(0). \qquad (6)$$

Для недиагональных элементов матрицы $W(t)$ из (2) можно получить следующие решения

$$< \Psi^{\pm}_n|W(t)|\Psi^{\mp}_n >= \exp\left[-\left(2\,k\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\,\delta\left(n+\frac{3}{2}\right)\right)\,t\right] < \Psi^{\pm}_n|W(0)|\Psi^{\mp}_n > . \qquad (7)$$

В настоящей работе мы ограничим себя вычислением среднего числа фотонов в моде поля, поэтому матричные элементы типа $< \Psi^{\pm}_n|W|\Psi_0 >, < \Psi_0|W|\Psi_0 >$ нам не понадобятся.

Используя известную формулу для вычисления средних

$$< O(t) >= sp(\tilde{O}(t)\,W(t))$$

и решения (6), (7) для среднего числа фотонов, получаем следующее выражение:

$$< n(t) >=< a^+(t)\,a(t) >= \frac{\exp\left[-(k+3\,\delta)\,t\right]}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\,\exp[-2\,n(k+\delta)\,t]$$

$$\left[(2n+1)\,\sum_{i=n}^{\infty}\,\frac{[1-exp(-2\,(k+\delta)\,t)]^{i-n}}{(2\,k+2\,\delta)^{i-n}(i-n)!}\,\left(\prod_{l=n+1}^{i}\,\left(2\,k\left(l+\frac{1}{2}\right)+2\,\delta\left(l-\frac{1}{2}\right)\right)\right)\,F_i(0)-\right.$$
$$\left.-(\exp(-2\,i\,g\,t\sqrt{n+1} < \Psi^{+}_n|W(0)|\Psi^{-}_n > + э.с.)\right]. \qquad (8)$$

В настоящей работе проведен численный расчет временной зависимости среднего числа фотонов «n(t)» по формуле (8) для резонатора с нулевой и ненулевой температурой (без учета тепловых фотонов). Параметры модели взяты из работы [6], в которой экспериментально исследовалось поведение среднего числа фотонов и средней населенности атомных уровней для одноатомного мазера на переходе $63p_{3/2} - 61d_{5/2}$ в ^{82}Rb. В эксперименте [6] частота атомного перехода $\omega_0 = 21{,}5$ Ггц, константа диполь-фотонного взаимодействия $g = 44$ кГц, температура резонатора $T = 2{,}5$ К, добротность резонатора Q достигала значения 10^{10} (что соответствует константе затухания $k \approx 1$ Гц или отношению $k/g \approx 10^{-4}$). Среднее число фотонов $< n >$ в начальном когерентном состоянии моды поля в резонаторе выбиралось равным 1.5. Для указанных параметров модели отношение $\delta/k \approx 0.9$. Это означает, что учет в уравнениях кинетики одноатомного мазера дополнительной константы затухания, определяемой температурой резонатора, должен заметно сказаться на эволюции наблюдаемых, что хорошо иллюстрируется поведением среднего числа фотонов, представленным на рисунке 1 (случай (а) соответствует $T = 0K$, случай (б) - $T = 2.5K$).

Литература

[1] Александров Ю.В., Башкиров Е.К., Мангулова Е.Г.// Вестник СамГУ. 1996. N2 . С.83.

[2] Вальтер Г. //УФН. 1996. Т.166. С. 777.

[3] Репке Г.*Неравновесная статистическая механика.* М.: Мир, 1990.

[4] Башкиров Е.К.*Метод проекционного оператора.* Самара: СамГУ, 1996.

[5] Agarwal G.S., Puri R.R. //Phys. Rev. A. 1986. V.36. P.1757; Phys. Rev. A. 1987. V.35. P.3433; Phys. Rev. A. 1988. V.37. P.3879.

[6] Rempe G., Walter H., Muller G.//Phys.Rev.Lett. 1987. V.58. P.353.

JANES-CUMMINGS MODEL IN THE NONIDEAL FINITE-T CAVITY

E.K. Bashkirov,[3] E.G. Mangulova [4]

On the basis of the master equation for the density matrix the dynamics of the two-level atom interacting with mode of quantum electromagnetic field in nonideal finite-T resonator has been considered. The time behaviour of the mean photon numbers in mode versus the resonator temperature has been investigated quality.

[3]Bashkirov Eugene Konstantinovich, Dep. of General & Theoretical Physics Samara State University

[4]Mangulova Ekaterina Gennadievna, Dep. of General & Theoretical Physics Samara State University