ПЕРЕХОД ФРЕДЕРИКСА В ГОМЕОТРОПНО ОРИЕНТИРОВАННОМ СЛОЕ НЖК ПРИ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ

Е.Н. Кожевников, Н.Г. Долматова[1]

Стационарные нелинейные напряжения и моменты, возникающие в нематическом жидком кристалле в звуковом поле, строятся на основе статистического подхода усреднением по неравновесному угловому распределению ориентаций молекул и времени микронапряжений и микромоментов, обусловленных вращением одной молекулы НЖК. Микроскопическое описание проводится в рамках неравновесной термодинамики, неравновесная плотность распределения находится из уравнения Фоккера-Планка. Показано, что стационарные напряжения и моменты приводят к деформации гомеотропной структуры НЖК- слоя при нормальном падении на него звуковой волны; эффект носит пороговый характер (акустический переход Фредерикса). Результаты теоретического расчета сравниваются с данными эксперимента.

1 Введение

Изменение ориентации слоя нематического жидкого кристалла (НЖК) под воздействием звука позволяет создавать устройства для визуализации звукового поля. Для направленности такой работы необходима теория ориентационных эффектов в упорядоченных слоях НЖК при звуковом воздействии. Существующие теории апеллируют в основном к акустическим потокам, возникающим в жидкости в звуковом поле, вязкие моменты в неоднородных потоках разворачивают молекулы нематика, что и приводит к изменению оптических свойств НЖК-слоя [1]; этот механизм хорошо объясняет акустооптические свойства НЖК-слоя при наклонном падении звуковой волны или пучка, при значительном вдоль слоя градиенте звукового давления, вблизи краев жидкокристаллической ячейки. В то же время потоковые механизмы переориентации молекул НЖК не в состоянии объяснить его свойств при нормальном падении однородной по сечению звуковой волны на слой гомеотропно ориентированного нематика. Попытки описать переориентацию молекул в рамках

[1]Кожевников Евгений Николаевич, Долматова Наталья Геннадьевна. Кафедра механики сплошной среды Самарского государственного университета.

гидродинамики НЖК как пороговый эффект, возникающий в системе с периодически меняющимися свойствами среды (эффект Фредерикса) [2,3], не привели к успешным результатам, предсказывая эффект при интенсивностях звука на 3 порядка больших используемых в эксперименте.

В данной работе рассмотрены заново эффекты, приводящие к переориентации молекул НЖК в звуковом поле, определена природа перехода Фредерикса и найдены пороговые интенсивности звука, при которых возникает переход. Теория эффекта строится на основе статистической гидродинамики НЖК, развитой в работах [4-7]. В этих работах вязкоупругие свойства среды определяются на основе молекулярной модели, описывающей вращение отдельной молекулы при внешнем воздействии; усреднение микронапряжений по равновесной плотности углового распределения ориентаций молекул позволяет получить вязкие напряжения в среде, уравнение вращения оси кристалла (директора) строится на основе уравнения Фоккера-Планка для плотности распределения. В данной работе все усреднения при переходе к макроскопическому описанию проводятся по неравновесной плотности распределения, одновременое усреднение по периоду звуковой волны позволяет выделить стационарные напряжения в среде и стационарные моменты, действующие на НЖК и обуславливающие переориентацию молекул нормально ориентированного кристалла в звуковом поле. Результаты расчета сравниваются с данными эксперимента.

2 Микромодель НЖК

Будем описывать ориентацию длинных осей молекул единичным вектором $\vec{L}$ и при построении уравнения вращения не учитывать анизотропию окружающей среды. Термодинамическими силами, определяющими диссипацию энергии при вращении частицы, служат вектор $\vec{N_L} = \dot{\vec{L}} - \frac{1}{2}(rot\vec{v} \times \vec{L})$ и тензор скорости деформации v_{ij}. Диссипативная функция D, приходящаяся на одну молекулу НЖК при деформации среды, может быть представлена в виде:

$$D = [\dot{\vec{L}} - \frac{1}{2}(rot\vec{v} \times \vec{L})]\vec{G} + \sigma'_{ij} v_{i,j}/n,$$

где n - число частиц в единице объема.

Силу $\vec{G}$, сопряженную $\vec{L}$, и напряжения σ'_{ij}, обусловленные вращением частицы, строим в виде линейной комбинации термодинамических сил

$$G_i = b^{-1}(N_{L,i} - \lambda\kappa_{ijk} v_{jk}) \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} = -b^{-1}(a_2 N_{L,i} L_j + a_3 N_{L,j} L_i + a_5 v_{i\alpha} L_\alpha L_j + \\ + a_6 v_{j\alpha} L_\alpha L_i + a_1 v_{\alpha\beta} L_\alpha L_\beta L_i L_j),\end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$\kappa_{ijk} = \frac{1}{2}[\delta_{ij} L_k + \delta_{ik} L_j - 2 L_i L_j L_k],$$

b-вращательная подвижность, a_k - кинетические коэффициенты, причем

$$a_2 + a_3 = \lambda \qquad a_2 - a_3 = 1, \qquad a_6 - a_5 = \lambda.$$

В работе [7] силы $\vec{G}$ представлены через угловые градиенты отклонения плотности распределения ориентаций молекул f от квазиравновесного больцмановского распределения $f_0 : f' = (f - f_0)/f_0$

$$G_i = -nT\hat{\mathcal{L}}_i f' = -\left(\frac{\partial}{\partial L_i} - L_i L_j \frac{\partial}{\partial L_j}\right) f'$$

что дает следующее выражение для микронапряжений

$$\sigma'_{ij} = -\frac{T}{2}\left(L_i \frac{\partial}{\partial L_j} - L_j \frac{\partial}{\partial L_i}\right) f' + \lambda \frac{T}{2}\left(L_i \frac{\partial}{\partial L_j} + L_j \frac{\partial}{\partial L_i} - 2L_i L_j L_k \frac{\partial}{\partial L_\alpha}\right) f' -$$
$$\frac{1}{2} b^{-1}(\lambda^2 + a_5 + a_6)(v_{i\alpha} L_\alpha L_j + v_{j\alpha} L_\alpha L_i) - b^{-1}(a_1 - \lambda(a_2 + a_3)) v_{\alpha\beta} L_\alpha L_\beta L_i L_j \quad (2.3)$$

Усреднение микронапряжений по равновесному распределению f_{00} позволяет получить вязкоупругие напряжения, обусловленые релаксацией ориентационной структуры НЖК, усреднение по неравновесному распределению

$$f = f_0(1 + f')$$

дает нелинейные релаксационные напряжения и моменты.

Эволюция плотности углового распределения f при внешнем воздействии описывается уравнением баланса

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}}_i(\dot{L}_i f) = 0. \quad (2.4)$$

Решение этого уравнения в звуковом и сдвиговом полях для потенциала самосогласованного поля в виде Майера-Заупе $E(\vec{L}) = -d < P_2(L_1) > P_2(L_1)$, где d - постоянная поля, получено ранее в работах [4,5,8]. Заимствуя его, а также выражение для f_0, и ограничиваясь вторыми моментами распределения, представим плотность распределения в виде

$$\begin{aligned} f = \quad & f_{00}\big\{3d_T L_1 L_s \delta n_s + (P_2 - < P_2 >)\left[(1-\psi_2)Kp + 3\lambda\beta\psi_2\epsilon_{11}\right] + \\ & +2A_{1s} L_1 L_s + \frac{1}{2}(A_{22} - A_{33})(L_2^2 - L_3^2)\big\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\psi_2 = \frac{-i\omega\tau_2}{1 - i\omega\tau_2},$$

ω и p - частота и давление звука, ϵ_{11} - деформация вдоль оси кристалла (директора) $\vec{n}$, τ_2 - время релаксации ориентационного параметра порядка,

$$\tau_2 = \left(6bT\beta(1 - d_T)\right)^{-1}, \quad (2.6)$$

$d_T = d < P_2 > /T$, $P_k = P_k(L_1)$ - полиномы Лежандра, $L_1 = (\vec{L}\vec{n})$ - проекция вектора $\vec{L}$ на ось 1 - директор, T - температура, параметры K и β имеют вид

$$K = \beta d_T \frac{1}{T}\left(\frac{\partial T_c}{\partial p} - \frac{\alpha T V}{C_p}\right), \quad (2.7)$$

$$\beta = \left(1 + nR_2 \frac{d_T^2}{C_p} - R_2 \frac{d}{T}\right)^{-1},$$

$R_2 =< P_2^2 > - < P_2 >^2$, T_c - температура ориентационного плавления, α - объемный коэффициент теплового расширения, V - объем, C_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении, L_2, L_3 - проекции вектора $\vec{L}$ на оси $\vec{e}_2, \vec{e}_3$, ортогональные директору, $P_k = P_k(L_1)$ - полиномы Лежандра, угловые скобки означают усреднение по равновесному распределению f_{00}. Оси $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ выбираются так, чтобы компонента тензора скорости деформации v_{23} обращалась в ноль. Комплексные коэффициенты A_{ij}, зависящие от частоты, приведены в работах [5,8].

Формула (2.5) для f используется при выводе стационарных напряжений и моментов.

3 Стационарные нелинейные напряжения в НЖК при воздействии звука

Преобразуем выражение для σ'_{ij}. Выразим второе слагаемое в (4) через внешнее воздействие. Для этого воспользуемся уравнением баланса для плотности распределения. Умножим его на $L_i L_j$, проинтегрируем по всем ориентациям молекул и усредним по периоду колебаний в звуковой волне. Подставив в оставшийся интеграл выражение для $\dot{L}_i$, найденное из (2.1) и используя выражение для G_i через f' [7], найдем

$$\begin{aligned} &\overline{(\langle L_i\partial_j + L_j\partial_i - 2L_iL_jL_k\partial_k\rangle)f'} = \\ &= \frac{1}{2bT}\Big\{\overline{(v_{i,k} - v_{k,i})\langle L_kL_j\rangle + (v_{j,k} - v_{k,j})\langle L_kL_i\rangle} + \\ &+\lambda\overline{\langle L_i\kappa_{jpq} + L_j\kappa_{ipq}\rangle v_{pq}}\Big\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Усредняя микронапряжения (2.3) по угловому распределению и времени и используя формулу (3.1), получим для нелинейных стационарных напряжений $\sigma_{ij}^{(2)}$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij}^{(2)} = \\ &= \frac{1}{2}T < (L_j\partial_i - L_i\partial_J)f' > + \\ &+\frac{n}{4b}\Big\{\lambda\overline{(v_{i,k} - v_{k,i})\langle L_kL_j\rangle + (v_{j,k} - v_{k,j})\langle L_kL_i\rangle} - \\ &-2(a_5 + a_6)\overline{\langle v_{ik}L_kL_j + V_{ik}L_kL_i\rangle} \\ &-4a_1\overline{\langle L_iL_jL_pL_q\rangle v_{pq}}\Big\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Проведем в формуле (3.2) усреднение по неравновесной плотности распределения (2.5). Опуская громоздкие расчеты, приведем конечное выражение для $\sigma_{ij}^{(2)}$

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2}nT\frac{T}{d}\overline{A_{11}(n_i\delta n_j - n_j\delta n_i)} + \\ &+\frac{1}{2}nT < P_2 > \overline{\delta n_s(A_{22} - A_{33})}\big[(\delta_{2s}\delta_{2i} - \delta_{3s}\delta_{3i})n_j - (i \to j)\big] + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{n\lambda}{4b} < P_2 > \left[\overline{(v_{i,k}-v_{k,i})\delta n_s}(n_k e_j^s + n_j e_k^s) + (i \to j)\right] - \\
&-\frac{n(a_5+a_6)}{2b}\left[\overline{v_{ik}\delta n_k}(n_k e_j^s + n_j e_k^s) + (i \to j)\right] \\
&+\frac{n}{4b} R_2 \left[\overline{\lambda W(v_{i,k}-v_{k,i}) - 2W v_{ik}}\right] N_{kj} + (i \to j) + \\
&+\frac{n}{16b} < (1-L_1^2)^2 > \left[\lambda\overline{(A_{22}-A_{33})(v_{i,k}-v_{k,i})}(e_k^2 e_j^2 - e_k^3 e_j^3) + (i \to j)\right] - \\
&-\frac{n}{8b} < (1-L_1^2)^2 > \left[\overline{(A_{22}-A_{33})v_{ik}}(e_k^2 e_j^2 - e_k^3 e_j^3) + (i \to j)\right] \\
&-\frac{na_1}{8b} < (1-L_1^2)^2 (P_2 - < P_2 >) > \overline{W(v_{22}-v_{33})}(e_i^2 e_j^2 - e_i^3 e_j^3).
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Здесь $A_{11} = -K\beta^{-1}\psi_2 p + 3\lambda\psi_2\epsilon_{11}$ — коэффициент при $(P_2 - < P_2 >)$ в разложении f' по степеням $\vec{L}$; $W = (1-\psi_2)Kp + 3\beta\psi_2\epsilon_{11}$; $N_{ij} = n_i n_j - 1/3\delta_{ij}$; знак $(i \to j)$ означает добавление слагаемого с переставленными индексами i и j.

Далее рассмотрим напряжения в звуковом поле и сравним слагаемые, содержащие градиенты скоростей, со слагаемыми, содержащими звуковое давление. Отклонение директора δ_s в звуковой волне , распространяющейся в направлении вектора $\vec{m}(\vec{m}^2 = 1)$, описывается формулой

$$
\delta n_s = -\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\epsilon_{kk}\left(m_1 m_s - m_1^2 n_s\right)
\tag{3.4}
$$

(γ_1 и γ_2 - коэффициенты вращательной вязкости), вытекающей непосредственно из гидродинамики Лесли.

Отношение слагаемых в (10), не содержащих и содержащих давление, оценивается величиной

$$
\mathcal{O} \approx \frac{1}{KE} = \left[\frac{1}{T}\frac{\partial T_c}{\partial p}E\beta\right]^{-1},
$$

где E - объемный модуль упругости, T_c - температура ориентационного плавления. Используя для оценок данные: $E = 2\cdot 10^{10}$ дин·см^2[13], $\partial T_c/\partial p = 3\cdot 10^{-8}$ [14] град·бар$^{-1}$, $T_c = 315^o$ результаты расчета для $\beta:\ \approx 10$, получим $\mathcal{O} < 10^{-1} \ll 1$. Таким образом, при описании нелинейных напряжений в звуковом поле достаточно в них сохранить слагаемые, содержащие давление. Преобразуя оставшееся выражение для напряжений, получим

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(2)} &= \frac{3}{2}\frac{\gamma_2}{\gamma_1} < P_2 > nTK\beta\,\overline{Re(\psi_2 p)Re\epsilon_{kk}}\,m_1(n_i m_j - n_j m_i) - \\
&-\frac{n}{2b}R_2\,\overline{Re[(1-\psi_2)p]\cdot Re v_{kk}}\left[m_1(m_i n_j + m_j n_i) - \frac{2}{3}m_i m_j\right] \\
&-\frac{2}{21}\frac{na_1}{b}\left(R_2 - \frac{3}{10}R_4\right)\overline{Re[(1-\psi_2)p]\cdot Re\,(v_{22}-v_{33})}\left(e_i^2 e_j^2 - e_i^3 e_j^3\right),
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

где $R_4 =< P_2 P_4 > - < P_2 >< P_4 >$.

При усреднении по времени учитываем релаксационный характер связи давления и деформаций в звуковой волне

$$
p = -[E\epsilon_{kk} + \mu_1 v_{kk}],
$$

где E - объемный коэффициент упругости, $\mu_1 = \mu_1(\omega)$ - коэффициент объемной вязкости, определяющий поглощение звуковой волны в кристалле.

В звуковой волне частоты ω, распространяющейся в жидком кристалле, вязкие напряжения малы по сравнению с упругими. Их малость соответствует неравенству

$$\frac{\omega\mu_1}{E} \ll 1,$$

учитывая которое при вычислении средних по времени величин в формуле (8), получим

$$\overline{Re(\psi_2 p) Re\epsilon_{kk}} \approx -\frac{1}{2} E F(\omega\tau_2)\epsilon^2$$

$$\overline{Re[(1-\psi_2)p]\cdot Rev_{kk}} = \frac{E}{2\tau_2} F(\omega\tau_2)\,\epsilon^2$$

$$\overline{Re[(1-\psi_2)p]\cdot Re(v_{22}-v_{33})} = \frac{E}{2\tau_2} F(\omega\tau_2)\,\epsilon^2 (m_2^2 - m_3^2). \quad (3.6)$$

Здесь и далее ϵ - амплитуда сжатия в звуковом поле в НЖК, функция $F(\omega\tau_2)$ имеет вид

$$F(\omega\tau_2) = \frac{(\omega\tau_2)^2}{1+(\omega\tau_2)^2}.$$

Подставим результаты усреднения (3.6) в формулу (3.5) для напряжений. При преобразованиях учтем выражения (6) для времени τ_2 и (7) - для K. Из (6) следует

$$\frac{1}{b\tau_2} = \frac{6T(1-d_T/7)}{\beta},$$

что дает

$$\frac{K}{b\tau_2} = 6T(1-d_T/7)d_T\left(\frac{\partial T_c}{\partial p} - \frac{T\alpha V}{C_p}\right).$$

Вводя обозначение

$$\Sigma_1 = -\frac{nT}{4}\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T_c}{\partial p} - \frac{\alpha TV}{C_p}\right) < P_2 > E$$

$$\Sigma_2 = \frac{3nT(1-d_T/7)}{2}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T_c}{\partial p} - \frac{T\alpha V}{C_p}\right) d_T R_2 E, \quad (3.7)$$

приведем напряжения к окончательному виду

$$\sigma_{ij} = \Big\{\Sigma_1 m_1(n_i m_j - n_j m_i) -$$

$$-\Sigma_2\Big[m_1(m_i n_j + m_j n_i) - \frac{2}{3} m_i m_j +$$

$$+\frac{4}{21}\left(1-\frac{3}{10}\frac{R_4}{R_2}\right)(m_2^2 - m_3^2)\left(e_i^2 e_j^2 - e_i^3 e_j^3\right)\Big]\Big\} F(\omega\tau_2)\epsilon^2. \quad (3.8)$$

4 Стационарное уравнение вращения директора

Стационарное уравнение вращения директора выведем непосредственно из уравнения баланса плотности распределения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}}_i(\dot{L}_i f) = 0.$$

В приводимых ниже рассуждениях мы остановимся подробнее на выводе нелинейных стационарных моментов, возникающих в НЖК в звуковых или сдвиговых волнах, и не будем затрагивать вязкие моменты Лесли и упругие моменты Франка, фигурирующие в традиционном описании НЖК. Эти моменты добавим в уравнение вращения позднее.

Умножим уравнение баланса на $L_1 L_s (s = 2, 3)$ и проинтегрируем по направлениям вектора $\vec{L}$. Для неравновесной плотности распределения (2.5) первое слагаемое принимает вид

$$J_1 = \frac{3}{2} d_T < L_1^2 - L_1^4 > \dot{n}_s =< P_2 > \dot{n}_s. \tag{4.1}$$

Интегрирование по частям второго слагаемого дает интеграл

$$J_2 = \int\limits_{\Omega} L_1 L_s \hat{\mathcal{L}}_i (\dot{L}_i f) d\Omega = - \int\limits_{\Omega} f \dot{L}_i (L_s n_i + L_1 \delta n_s) d\Omega. \tag{4.2}$$

Преобразуем J_2. Выразив при помощи (2.1) $\dot{L}_i$ через силу G_i и последнюю через возмущение f', а также усредняя выражение для J_2 по времени, представим его в виде суммы двух интегралов

$$J_2 = Q_{1s} - Q_{2s}, \tag{4.3}$$

где

$$\begin{gathered} Q_{1s} = bT \overline{\int\limits_{\Omega} \delta f (n_i L_s + L_1 \delta_{is}) \hat{\mathcal{L}}_i f' d\Omega} \\ Q_{2s} = \overline{\int\limits_{\Omega} \delta f (n_i L_s + L_1 \delta_{is})} \\ \overline{\{[v_{i,p} - (1-\lambda) v_{ip}] L_p - \lambda v_{pq} L_p L_q L_i\} d\Omega}. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Выделяя из формулы (2.5) $\delta f = f - f_{00}$ и проводя усреднения в Q_{1s}, Q_{2s}, получим

$$\begin{gathered} Q_{1s}/bT = d_T \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{7} < P_2 > - \frac{36}{35} < P_4 > \right) \overline{A_{11} \delta n_s} + \\ + d_T \left(\frac{3}{35} + \frac{1}{7} < P_2 > - \frac{48}{385} < P_4 > - \frac{8}{77} < P_6 > \right) \times \\ \times \overline{(A_{22} - A_{33}) \delta n_t} (\delta_{2t} \delta_{2s} - \delta_{3t} \delta_{3s}) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Q_{2s} = \overline{\left[(1-\psi_2) Kp + 3\lambda\beta\psi_2 \epsilon_{11} \right] \times} \\ \overline{\times \left[\frac{1}{3} R_2 (2 n_p \delta_{is} - n_i \delta_{ps}) v_{i,p} - \frac{4}{21} \left(R_2 - \frac{12}{5} R_4 \right) v_{sp} n_p \right]} + \\ + \frac{3}{2} d_T < L_1^2 - 3L_1^4 + 2L_1^6 > \overline{v_{11} \delta n_s} + \\ + \frac{3}{2} d_t < L_1^2 - L_1^4 > \overline{v_{s,p} \delta n_p} - \end{gathered}$$

$$-\frac{3}{4}d_T < L_1^2(1-L_1^2)^2 > \overline{(v_{kk}-v_{11})\delta n_s} -$$
$$-\frac{3}{2}d_T < L_1^2(1-L_1^2)^2 > \overline{v_{sp}\delta n_p} +$$
$$+\frac{1}{8} < (1-L_1^2)^2 > \overline{(A_{22}-A_{33})v_{i,p}}n_i(\delta_{2s}\delta_{2p}-\delta_{3s}\delta_{3p}) +$$
$$+\frac{1}{2} < L_1^2(1-L_1^2)^2 > \overline{(A_{22}-A_{33})v_{ip}}n_i(\delta_{2s}\delta_{2p}-\delta_{3s}\delta_{3p}).$$

Относительные величины слагаемых в Q_{1s}, Q_{2s} оцениваются так же, как и в напряжениях. В звуковом поле вклад слагаемых, не содержащих давление, пренебрежимо мал. Отбрасывая их, заимствуя из [5] выражение для A_{11} и проводя усреднение по времени с учетом релаксационной связи давления и деформаций, получим следующие представления Q_1 и Q_2:

$$Q_{1s} = -bT\frac{\gamma_2}{2\gamma_1}\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{7} < P_2 > -\frac{36}{35} < P_4 >\right) d_T\beta^{-1}KEF(\omega\tau_2)\epsilon^2(m_1m_s - m_1^2n_s)\delta n_s$$
$$Q_{2s} = \frac{1}{14}\left(R_2+\frac{16}{5}R_4\right)\tau_2^{-1}KEF(\omega\tau_2)\epsilon^2 m_1m_s.$$

Вводя параметр ω_0, имеющий размерность частоты ,

$$\omega_0 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{d^2 < P_2 >}{20T^2}\beta\tau_2^{-1}$$

и зависящие от температуры коэффициенты ξ_1, ξ_2

$$\xi_1 = 1+\frac{5}{7} < P_2 > -\frac{12}{7} < P_4 >, \qquad \xi_2 = R_2 - \frac{16}{5}R_4,$$

представим Q_{1s}, Q_{2s} в виде

$$Q_{1s} =< P_2 > \omega_0\xi_1\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T_c}{\partial p}-\frac{\alpha TV}{C_p}\right) EF(\omega\tau_2)\epsilon^2(m_1m_s - m_1^2n_s)$$
$$Q_{2s} =< P_2 > \omega_0\beta^{-1}d_T^{-1}\xi_2\frac{10\gamma_1}{7\gamma_2}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T_c}{\partial p}-\frac{\alpha TV}{C_p}\right) EF(\omega\tau_2)\epsilon^2(m_1m_s - m_1^2n_s).$$

Возвращаясь к проинтегрированному уравнению баланса плотности f и деля его на $< P_2 >$, получим уравнение вращения в виде

$$\dot{n}_s + \frac{Q_1 - Q_2}{< P_2 >} + (***) = 0,$$

где скобка $(***)$ обозначает сумму моментов Лесли и Франка, деленных на коэффициент вращательной вязкости γ_1. Подставляя в это уравнение выражения для Q_{1s}, Q_{2s}, а также из [10], вязкие моменты Лесли и в одноконстантном приближении упругие моменты Франка, получим уравнеие вращения директора в виде

$$\dot{n}_s + \omega_0\left\{\xi_1\left(m_1m_s - m_1^2n_s\right) - \frac{10\gamma_1}{7\gamma_2}\beta^{-1}d_T^{-1}\xi_2 m_1m_s\right\}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T_c}{\partial p}-\frac{\alpha TV}{C_p}\right) EF(\omega\tau_2)\epsilon^2 -$$
$$-\frac{1}{2}(v_{s,p}-v_{p,s})n_p - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}(v_{sp}n_p - v_{pq}n_pn_qn_i) - \frac{K_3}{\gamma}\Delta n_S = 0. \qquad (4.5)$$

Здесь K_3 - упругий коэффициент Франка.

Уравнение (4.5) описывает медленные по сравнению с частотой звука эволюции директора.

5 Переход Фредерикса в гомеотропно ориентированном слое НЖК

Рассмотрим нормальное падение звуковой волны на гомеотропоно ориентированный слой НЖК. Считаем волну однородной по сечению, исключая тем самым акустические потоки в слое. Согласно предыдущим рассуждениям в нематическом кристалле возникают нелинейные напряжения и моменты, которые могут приводить к переориентации молекул НЖК. Этот эффект носит пороговый характер. Рассматривая уравнения движения и вращения оси нематика, определим порог эффекта.

Выберем в рассуждениях следующую геометрию: направим ось z по нормали к слою, считая, что координата $z = 0$ соответствует нижней границе, $z = h$ - верхней. Пусть звуковая волна с амплитудой колебательной скорости v_0 падает на слой снизу в направлении оси z, нижнюю пластину считаем акустически прозрачной, а верхнюю - жесткой. Ограничимся частотами звука, при которых длина звуковой волны больше толщины слоя h; при этом в слое устанавливается периодическое сжатие с амплитудой $\epsilon = 2v_0/c$, где c - скорость распространения звука в НЖК.

Рассмотрим стационарное искажение структуры НЖК, при котором течение жидкости и разворот молекул происходят в плокости (xz) и однородны вдоль слоя. При неоднородном движении и деформации нематического кристалла, с одной стороны, возрастают вязкие потери в потоках, с другой - упругие моменты Франка. И то, и другое приводит к стабилизации структуры нематика, поэтому при определении порога эффекта как минимального акустического воздействия, при котором возникает стационарное искажение структуры кристалла, достаточно рассмотреть искажение, однородное вдоль слоя.

Обозначим через $n_x = \theta \ll 1$ - угол отклонения директора от оси z. Нелинейные стационарные напряжения в выбранной геометрии принимают вид

$$\sigma_{xx}^{(2)} = 0, \qquad \sigma_{zz}^{(2)} = -\frac{4}{3}\Sigma_2(\omega\tau_2)\epsilon^2, \qquad \sigma_{zx}^{(2)} = -\Sigma_2 F(\omega\tau_2)\epsilon^2\,\theta$$
$$\sigma_{xz}^{(2)} = -[\Sigma_2 - \Sigma_1]F(\omega\tau_2)\epsilon^2\,\theta.$$

Учитывая помимо нелинейных напряжений еще и сдвиговые напряжения в потоках $\sigma_{ij} = \eta V_{ij}$, представим уравнение для скорости течения $V_x^{(2)}$ в виде

$$\eta_2 V_{x,zz}^{(2)} + \sigma_{xz}^{(2)} = 0,$$

$\eta_2 = (\alpha_4+\alpha_5-\alpha_2)/2$ - коэффициент вязкости в потоке вдоль слоя, α_i - коэффициенты вязкости Лесли).

Градиент скорости потока $V_x^{(2)}$ равен

$$V_{x,z}^{(2)} = \frac{1}{\eta_2}[\Sigma_2 - \Sigma_1]F(\omega\tau_2)\epsilon^2\,\theta. \tag{5.1}$$

Сохраняя в уравнении (4.5) для $n_x = \theta$ лишь стационарные слагаемые, приведем его к виду

$$-\frac{K_3}{\gamma_1}\theta_{zz} = \omega_0\xi\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T_c}{\partial p} - \frac{\alpha T V}{C_p}\right) EF(\omega\tau_2)\epsilon^2\theta,$$

где $\xi = \xi_1 + \xi_v$;

$$\xi_v = -30R_2 nT\,\frac{\gamma_2 T\tau_2}{\gamma_1 d\eta_2\beta}\left[1 + \frac{1}{6}\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\frac{< P_2 >}{d_T R_2}\right].$$

Соотношения между ξ_1 и ξ_v определяют относительный вклад в эффект нелинейных моментов и потоков, вызванных действием нелинейных напряжений.

Из условия существования ненулевого, удовлетворяющего условию жесткой связи молекул НЖК на границах, решения в виде $\theta = \theta_0 sin(\pi/h)$ найдем значение ϵ на пороге эффекта

$$\epsilon_{th}^2 = \frac{\pi^2 K_3}{\omega_0 \gamma_1 h^2 \xi} \left\{ \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T_c}{\partial p} - \frac{\alpha T V}{C_p} \right) E \right\}^{-1} F^{-1}(\omega \tau_2). \tag{5.2}$$

Пороговые колебательная скорость $v_{0,th}$ и интенсивность I_{th} в падающей на слой звуковой волне определяются через ϵ_{th} : $\quad v_{0,th} = \epsilon_{th}\, c/2, \quad I_{th} = \rho v_{0,th}^2\, c.$

Проанализируем полученные результаты. Зависимость пороговой интенсивности скорости $v_{0,th}$ от толщины слоя h определяется соотношением $v_{th} \sim h^{-1}$. Эта зависимость хорошо коррелирует с данными эксперимента, в которых наблюдалось пороговое искажение структуры гометропного слоя нематика в однородном звуковом поле [9]. Заметим, что такая же точно зависимость от толщины слоя для пороговой напряженности электрического или магнитного поля имеет место соответственно в электрическом или магнитном переходах Фредерикса [10].

Отношение K_3/γ_1 в нематическом кристалле слабо зависит от расстояния до температуры ориентационнного плавления $\Delta T = T_c - T$. Согласно формуле (2.6) произведение $\tau_2^{-1}\beta$, а следовательно, и ω_0 также не зависят от ΔT. Таким образом, зависимость пороговых характеристик $\epsilon_{th}, v_{0,th}$ от температуры определяется величиной ξ, а также функцией $F(\omega\tau_2)$. На высоких частотах, когда $\omega\tau_2 \gg 1$, функция F обращается в единицу, зависимость эффекта от температуры в этом случае определяется лишь параметром ξ, а пороговые характеристики эффекта становятся независимыми от частоты. В случае низких частот, когда выполняется условие $\omega\tau_2 \ll 1$, функция F принимает вид $F(\omega\tau) \approx (\omega\tau)^2$, зависимость v_0 от температуры в этом случае определяется величиной $1/(\tau_2\sqrt{\xi})$, а от частоты - соотношением $v_0 \sim \omega^{-1}$.

Численные значения $v_{0,th}$ определим расчетом для жидкого кристалла МББА с молекулярным весом $\mu = 267$ и параметрами $K_3 = 0,7 \cdot 10^{-6}$ дин, $\gamma_1 = 0,78$ пуаз,$\eta_2 \approx 1$ - пуаз, $C_p = 2$ Дж см$^{-3}$ *град*-1[11], $\alpha = 3 \cdot 10^{-4}$ град$^{-1}$[12], $\rho = 1$ г см$^{-3}$, $c = 1,5 \cdot 10^5$ см с$^{-1}$ [13], $\partial T_c/\partial p = 3 \cdot 10^{-8}$ град дин$^{-1}$ см^2[14], $\eta_2 \approx 1$ - пуаз, постоянная молекулярного поля равна $d = 4,506 T_c$. При $\Delta T = 1^o$ время релаксации принималось равным $\tau_2^{(1)} = 10^{-7}$ с, найденное численным расчетом значение β равно $\beta = 12$. Значение $< P_2 >$ определялось для самосогласованного поля с потенциалом Майера-Заупе, $< P_4 >$, R_2, R_4 - усреднением по равновесному Больцмановскому распределению с найденным значением $< P_2 >$.

Для температуры $T = T_c - 10^o$ получим $\omega_0 \approx 0.6 \cdot 10^8, \quad \xi_1 = 1,15, \xi_v = 1,2$. Близость значений ξ_1 и ξ_v указывает на то, что стационарные нелинейные потоки и моменты в переориентации оси кристалла играют примерно одинаковую роль. Подставляя эти цифры в формулу (22), найдем для толщины слоя $h = 100$ мкм следующие пороговые характеристики: $\epsilon_{th} = 2 \cdot 10^{-5}$, $v_{0,th} = 1,5\cdot$ см$\cdot$с$^{-1}$, $I_{th} =$ 2.7 мВт$\cdot$см$^{-2}$. Эти цифры находятся в хорошем согласии с данными эксперимента, расширенный анализ которых приведен в работе [1].

Литература

[1] . Kapustina O.A. Acoustooptical Phenomena in Liquid Crystals// Mol. Cryst. Liq. Cryst., 1984. V.112. N 1-2. P. 1-164.

[2] Чабан И.А. Акустогидродинамическая неустойчивость нематических жидких кристаллов. Акуст. журнал. 1979. Т.25, вып.1. С. 124-134.
[3] Кожевников Е.Н. Неустойчивость ориентации нематических жидких кристаллов в звуковом поле в отсутствие растекания// Акуст. журнал. 1980. Т. 26, вып. 6. С.866-871.
[4] Кожевников Е.Н. Релаксация углового распределения молекул нематического жидкого кристалла в звуковом поле // Акуст. журнал. 1994. Т. 40. С. 412-416.
[5] Кожевников Е.Н. Статистическая теория акустической анизотропии нематического жидкого кристалла// Акуст. журнал. 1994. Т. 40. С.613-618.
[6] Кожевников Е.Н., Долматова Н.Г. Статистическая гидродинамика нематических жидких кристаллов // 11 Международная школа по механике сплошной среды: Тезисы докладов. Пермь, 1996. С.163.
[7] Кожевников Е.Н., Долматова Н.Г. Несимметричнгость напряжений в вязких волнах в НЖК// Вестник СамГУ. 1996. Вып. 2. С. 75-82.
[8] Кожевников Е.Н. Структурная релаксация нематических жидких кристаллов при распространении в них вязкой волны// Акуст. журнал. 1996. Т.42. С. 800-805.
[9] Nagai S., Iizuka K. On the Effect of Ultrasound to Nematic Liquid Crystals//Jap. J. Appl. Phys. 1974. V 13. N 1. P. 189-190.
[10] Де Жен. Физика жидких кристаллов.М:Мир, 1977.
[11] Сонин А.С. Лекции по жидким кристаллам. Ч.1. М.:МГУ, 1974.
[12] Lee J.S., Golub S.L., Brown G.H. An ultrasonic study of the mechanical properties of the nematic liquid crystal// J. Chem. Phys. 1972. V.76. P. 2409-2417.
[13] Eden D., Garland C.W., Williamson R.C. Ultrasonic investigation of the nematic-isotropic phase transition in MBBA// J. Chem. Phys. 1973. N5. P.1861-1868.
[14] Тихомирова Н.А., Вистинь А.К., Носов В.Н. Влияние давления на фазовые переходы в нематических жидких кристаллах//Кристаллография. 1972. Т.17. Т.5. С.1000-1002.

FREDERIKS TRANZITION IN HOMEOTROPICALY ORIENTED NLC-LAYER UNDER SOUND WAVE NORMAL INSIDENCE

E.N. Kozhevnikov, N.G. Dolmatova [2]

Nonstationary nonlinear stresses and moments in Nematic Liquid Crystal under sound action are constructed on the base of statistical approach by nonequilibrium angular distribution and time averagerating of microstresses and micromoments caused by molecular rotation. Microscopic description is made in the frame of nonequilibriun thermodynamics; nonequilibrium densisty distribution is determined from Fokker-Plank equation. It is shown that stationary stresses and moments result in structural deformation of homeotropicaly oriented NLC-layer under sound incidence to it. The effect is of a threshold character (acoustical Frederiks trazition). Theoretical results are compared with experiemental data.

[2] Kozhevnikov Eugeniy Nikolaevich, Dolmatova Natalja Gennadjevna, Dept. of Continuum Mechanics