ВЛИЯНИЕ ПОВРЕЖДЕННОСТИ МАТЕРИАЛА НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ ДЛЯ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА ПОЛЗУЧЕСТИ

В.И. Астафьев, Л.В. Степанова[1]

В статье излагаются результаты изучения полей напряжений и сплошности в окрестности растущей в процессе ползучести трещины антиплоского сдвига при определяющих соотношениях связанной теории ползучести с поврежденностью, построенных на основе дробно-линейного закона ползучести.

Результаты полученного решения показывают, что первое приближение в асимптотических разложениях для функций сплошности и компонент тензора напряжений полностью совпадает с асимптотиками этих функций для степенной зависимости. К поверхности трещины примыкает область разрушенного материала. Связанность постановки задачи для рассматриваемых определяющих соотношений приводит к исчезновению сингулярности скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины.

1 Введение

Теоретическое изучение докритического роста трещин базируется на анализе напряженно-деформированного состояния в теле и критерии её роста. Поскольку разрушение происходит вследствие накопления микродефектов: микропор, микротрещин, то необходимо использовать критерии роста трещины, учитывающие структурные изменения. Для учета таких изменений были предложены некоторые теоретические модели роста трещин в металлах при ползучести, в рамках которых предполагалось, что рост трещины происходит при достижении некоторой мерой поврежденности критического значения на некотором расстоянии от вершины трещины. В [1,2] при исследовании роста трещин вводился параметр поврежденности Работнова-Качанова. В [3] процесс накопления поврежденности объяснялся совместным действием диффузионного и вязкого механизмов роста пор в условиях высокотемпературной ползучести. При изучении закономерностей подрастания трещин в [4] использовалась величина критической поврежденности материала, причем предполагалось, что эта величина зависит от уровня напряжений и убывает с ростом интенсивности напряжений.

[1]Астафьев Владимир Иванович, Степанова Лариса Валентиновна. Кафедра механики сплошной среды Самарского государственного университета.

Однако большинство теоретических моделей было основано на несвязной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности, когда величина накопленной поврежденности не влияла на характер распределения напряжений. Но такое предположение о независимости напряженно-деформированного состояния от повреждений материала справедливо при малом относительном объеме повреждений. Вязкое разрушение обусловлено объединением большого количества растущих в процессе деформирования пор. В данном случае величина накопленной поврежденности может быть достаточно большой и разрыхление материала будет оказывать влияние на напряженно-деформированное состояние. Следовательно, анализ вязкого разрушения материала требуется проводить посредством решения связной задачи отыскания напряженно-деформированного состояния и накопления повреждений в элементе конструкции. Поэтому в последнее время появились работы [5,6], где при постановке задачи использовались определяющие соотношения связной теории ползучести с поврежденностью - соотношения, предложенные Качановым [7] и Работновым [8]. В [5] изучено влияние поврежденности на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига при ползучести для материальных соотношений, построенных на основе степенной связи между напряжениями и скоростями деформаций. Показано, что у вершины трещины отсутствует характерное для этих определяющих соотношений сингулярное поле напряжений. Функции $\frac{\tau_{ij}}{\psi}$ ограничены, а напряжения и сплошность линейно падают до нуля в вершине трещины. Установлено, что к свободным от нагрузок поверхностям трещины вблизи её вершины прилегает область полностью разрушенного материала, в которой поля напряжений и сплошности равны нулю. В [6] получены распределения напряжений и сплошности у вершины растущей в процессе ползучести трещины нормального отрыва. Показано, что к берегам движущейся трещины также примыкает область полностью разрушенного материала, где поля напряжений и сплошности равны нулю. Такое поле напряжений принципиально отличается от соответствующего поля напряжений в несвязанной постановке задачи и является результатом влияния поврежденности на процесс ползучести материала.

С другой стороны, на основе анализа экспериментальных данных для ряда металлов Шестериков и Юмашева [9] предожили для установившейся ползучести соотношение вида

$$p = B\left(\frac{\sigma - \sigma_a}{\sigma_b - \sigma}\right)^n, \quad \sigma > \sigma_a,$$

где σ_a - напряжение, ниже которого нет ползучести; σ_b - напряжение типа предела прочности; B - скоростная характеристика.

В данной работе изучаются поля напряжений и сплошности в окрестности растущей в процессе ползучести трещины антиплоского сдвига при определяющих соотношениях связанной теории ползучести с поврежденностью, построенных на основе частного случая приведенного выше соотношения

$$p = B\frac{\sigma/\psi}{\sigma_b - \sigma/\psi}.$$

2 Постановка задачи

Рассмотрим движущуюся прямолинейную полубесконечную трещину с началом координат в её вершине. Пусть трещина распространяется со скоростью $v(t)$ в направлении оси x. Материальная производная по времени t от некоторой физической величины $\beta(x,y,t)$ в движущейся системе координат записывается следующим образом:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial\beta}{\partial t} - v(t)\frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{\partial\beta}{\partial t} - v(t)\left(cos\varphi\frac{\partial\beta}{\partial r} - \frac{sin\varphi}{r}\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\right), \qquad (2.1)$$

где x, y -декартовы, r, φ -полярные координаты.

Определяющие соотношения связанной теории ползучести с поврежденностью имеют вид [8]

$$\gamma_i = B\frac{\tau_i/\psi}{\tau_b - t/\psi}, \qquad (2.2)$$

где γ_i - скорости деформаций сдвига; τ_i - компоненты тензора напряжений; $\tau = \left(\tau_1^2 + \tau_2^2\right)^{1/2}$ - интенсивность касательных напряжений; B, τ_b - константы материала; ψ - параметр сплошности Л.М.Качанова ($\omega = 1 - \psi$ - параметр поврежденности Ю.Н.Работнова). Кинетическое уравнение для параметра сплошности материала записывается в виде

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\left(\frac{\tau}{\psi}\right)^m, \qquad (2.3)$$

где A, m - константы степенного закона длительной прочности.

В начальный момент времени $(t = 0)$ параметр слошности $\psi = 1$; распределение напряжений имеет вид

$$\tau_i(r,\varphi,0) = \tau_b\overline{\tau_i(\varphi)}, \qquad (2.4)$$

где $\overline{\tau_i(\varphi)}$ - безразмерные функции, определенные в [10].

Начальные условия (2.4) при $t > 0$ будут граничными условиями на бесконечности. Кроме того, необходимо учесть граничное условие на поверхности трещины

$$\tau_\varphi(r,\pi) = 0 \qquad (2.5)$$

и условие симметрии при $\varphi = 0$

$$\tau_r(r,0) = 0. \qquad (2.6)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнений (2.1)-(2.3) с граничными условиями (2.4),(2.5). Величина $v(t)$, являющаяся внутренним параметром задачи, должна быть определена в процессе её решения при $0 < r < \infty$.

Анализ размерности величин показывает, что можно перейти к следующим безразмерным функциям напряжений, скоростей деформаций и сплошности

$$\tau_i(r,\varphi,t) = \tau_b\Sigma_i(R,\varphi,T), \quad \gamma_i(r,\varphi,t) = BE_i(R,\varphi,T), \qquad (2.7)$$

$$\psi(r,\varphi,t) = \Psi(R,\varphi,T) \qquad (2.8)$$

$$R = \frac{r}{r_0}, \quad T = \frac{tv}{t_0}, \quad r_0 = \frac{v}{A\tau_b^m}, \qquad (2.9)$$

где $\Sigma_i, E_i, \Psi, R, T$ - безразмерные компоненты тензора напряжений, тензора скоростей деформаций, параметра сплошности, радиальная координата и время.

В случае антиплоского сдвига уравнение равновесия, условие совместности и кинетическое уравнение в полярных координатах для безразмерных функций Σ_i, Ψ имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R\Sigma_R\right) + \frac{\partial\Sigma_\varphi}{\partial\varphi} = 0, \qquad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\Sigma_R/\Psi}{1 - \Sigma/\Psi}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\Sigma_\varphi/\Psi}{1 - \Sigma/\Psi}\right), \qquad (2.11)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial T} - cos\varphi\frac{\partial\Psi}{\partial R} + \frac{sin\varphi}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = -\left(\frac{\Sigma}{\Psi}\right)^m, \tag{2.12}$$

где $\Sigma = \left(\Sigma_R^2 + \Sigma_\varphi^2\right)^{1/2}$.

Начальные условия в безразмерных переменных примут вид

$$\Sigma_i(R,\varphi,0) = \overline{\tau_i(\varphi)}. \tag{2.13}$$

3 Асимптотическое решение задачи

Асимптотические разложения компонент тензора напряжений и параметра сплошности в окрестности вершины трещины для используемых определяющих соотношений находятся в виде

$$\Psi(R,\varphi,T) = R^\mu g^{(1)}(\varphi,T) + R^\nu g^{(2)}(\varphi,T) + ..., \tag{3.1}$$

$$\frac{\Sigma_i}{\Psi} = f_i^{(1)}(\varphi,T) + R^\alpha f_i^{(2)}(\varphi,T) + ..., \tag{3.2}$$

где $\alpha > 0, \nu > \mu, f_i^{(k)}(\varphi,T), g^{(k)}(\varphi,T)$ - функции, не имеющие особенностей. Подстановка (3.1) и (3.2) в систему уравнений (2.10)-(2.12) даёт последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $(f_i^{(1)}, g^{(1)})$, $(f_i^{(2)}, g^{(2)})$ и т.д. Из кинетического уравнения следует, что $\mu = 1, \nu = 1+\alpha$. Таким образом, асимптотическое разложение функции сплошности в окрестности вершины трещины имеет вид:

$$\Psi = R\left(g^{(1)}(\varphi,T) + R^\alpha g^{(2)}(\varphi,T) + ...\right). \tag{3.3}$$

Для определения первого приближения получается следующая система уравнений:

$$sin\varphi\frac{\partial g}{\partial\varphi} - cos\varphi\, g = -f^m, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(f_\varphi g) + 2f_R g = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{f_R}{1-f}\right) = \frac{f_\varphi}{1-f}, \tag{3.6}$$

где $g = g^{(1)}, f_R = f_R^{(1)}, f_\varphi = f_\varphi^{(1)}, f = \left(f_R^2 + f_\varphi^2\right)^{1/2}$.

Система уравнений (3.4)-(3.6) должна быть решена с учетом граничного условия на поверхности трещины

$$\varphi = \pi \qquad f_\varphi = 0, \tag{3.7}$$

условия симметрии на её продолжении

$$\varphi = 0 \qquad f_R = 0 \tag{3.8}$$

и условия регулярности решения при $\varphi = 0$

$$g(0) = f^m(0). \tag{3.9}$$

Следует отметить, что рассуждая аналогично [5,11], можно предположить существование некоторой эквивалентной среды, тензор напряжений $\tau_i^{eqv} = \tau_i/\psi$ в которой связан с тензором скоростей деформаций γ_i соотношением (1.2). Для такой эквивалентной сплошной среды выполняются условия независимости от контура C_ψ^* - интеграла, который в переменных поврежденной среды имеет вид

$$C_\psi^* = \int\limits_\Gamma \{B\tau_b \left(\frac{\tau/\psi}{\tau_b - \tau/\psi} - ln\left(\frac{\tau/\psi}{\tau_b - \tau/\psi}\right)\right) n_1 - \frac{\tau_\nu}{\psi} w_{,1}\} \frac{ds}{\psi}, \tag{3.10}$$

где τ_ν - касательное напряжение, действующее на площадке с нормалью $\overrightarrow{\nu}$, $\overrightarrow{n}$ - нормаль к контуру Γ.

Поскольку $\Psi = Rg^{(1)}$, то из (3.10) следует, что скорости деформаций в окрестности трещины должны быть ограниченными величинами. Поэтому $f = \left(f_R^2 + f_\varphi^2\right)^{1/2} \neq 1$.

Численное решение системы уравнений (3.4)-(3.9) с граничными условиями (3.7)-(3.9) осуществлялось методом Рунге - Кутта в сочетании с методом пристрелки. При решении подбиралось значение $f_\varphi(0)$ на отрезке от 0 до 1, для которого решение системы уравнений удовлетворяло бы граничным условиям на поверхности трещины. Оказалось, что только при $m = 0$ получаемые значения компонент тензора Σ_i/Ψ не превышают единицы. Но поскольку m - постоянная степенного закона длительной прочности, ограничений на значения этой величины накладывать нельзя. Однако случай $m = 0$ соответствует предположению о том, что на всем отрезке $[0, \pi]$ интенсивность напряжений является постоянной величиной.

Пусть $f = a \neq 1$. Тогда систему уравнений (3.4) - (3.6) можно переписать в виде

$$g' sin\varphi - g cos\varphi = -f^m, \tag{3.11}$$

$$f = \left(f_R^2 + f_\varphi^2\right)^{1/2} = a, \tag{3.12}$$

$$(f_\varphi g)' + 2 f_R g = 0, \tag{3.13}$$

$$f_R' - f_\varphi = 0 \tag{3.14}$$

и отметить следующее: начиная с некоторого φ_0 функция сплошности

$$g = C sin\varphi + a^m cos\varphi \tag{3.15}$$

становится отрицательной, что противоречит физическому смыслу параметра сплошности. Для устранения этого противоречия по аналогии с работой [5] можно предположить, что на некотором отрезке $[\varphi, \pi]$ функции g, f_R, f_φ нулевые. Решение системы уравнений (3.11) - (3.14) следует искать на отрезке $[0, \varphi_0]$. Требование непрерывности решения при $\varphi = \varphi_0$ приводит к условиям

$$g(\varphi_0) = 0, \qquad f_\varphi(\varphi_0) = 0. \tag{3.15}$$

Для полученной функции g уравнения (3.13), (3.14) имеют частное решение

$$f_R = a\, cos(\varphi + \delta), \qquad f_\varphi = -a\, sin(\varphi + \delta), \tag{3.16}$$

где $sin\delta = a^m/\sqrt{a^{2m} + C^2}$, $cos\delta = C/\sqrt{a^{2m} + C^2}$. Тогда для $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ решение имеет вид

$$g = a^m\, cos\varphi, \quad f_\varphi = a\, cos\varphi, \quad f_R = a\, sin\varphi. \tag{3.17}$$

Можно сделать предположение о том, что на отрезке $[\varphi_0, \varphi_1]$ работает некоторое другое решение системы уравнений (3.13),(3.14). Однако простой анализ условий, накладываемых на функцию g при $\varphi = \varphi_0$ и при $\varphi = \varphi_1$ показывает, что $\varphi_0 = \varphi_1 = \pi/2$.

Возвращаясь к размерным переменным, асимтотическое решение задачи при $r \to 0$ можно записать в виде

$$\psi = a^m \frac{A\tau_b^m}{v} r g^{(1)}(\varphi), \qquad \frac{\tau_i}{\psi} = a\tau_b f_i^{(1)}(\varphi). \tag{3.18}$$

Точное значение параметра a и скорости роста трещины $v(t)$ можно найти при полном решении задачи для $0 < r < \infty, 0 < t < \infty$.

4 Заключение

Результаты полученного решения для определяющих соотношений, построенных на основе дробно - линейной связи между напряжениями и скоростями деформаций ползучести, показывают, что первое приближение в асимптотических разложениях для функций сплошности и компонент тензора напряжений полностью совпадают с асимптотиками этих функций, найденных для степенной зависимости. Установлено, что к поверхности трещины также примыкает область полностью разрушенного материала. Таким образом, степенной и дробно - линейный законы приводят к одним и тем же результатам.

Связанность постановки задачи для дробно - линейных определяющих соотношений проявляется в исчезновении сингулярности скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины.

Литература

[1] Kubo S.,Ohji K.,Ogura K.An analysis of creep crack propagation on the basis of the plastic singular stress field//Eng.Frac.Mech.1979.V.11.P.131-158.

[2] Астафьев В.И. О росте трещин при ползучести с учетом пластической зоны вблизи вершины трещины//ПМТФ. 1979. N6. С. 154-158.

[3] Riedel H. The extension of a macroscopic crack at elevated temperature by the coalescence of microvoids//In Creep Structures:Proc/3rd Symp., Leicester, 1980.Berlin: Springer,1981.P.505-519.

[4] Астафьев В.И.Закономерности подрастания трещин в условиях ползучести //Изв. АН СССР. МТТ. 1986. N1. С.127-134.

[5] Астафьев В.И., Григорова Т.В. ,Пастухов В.А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности ввершины трещины при ползучести//ФХММ. 1992. Т.28, 1. С.5-11.

[6] Астафьев В.И., Григорова Т.В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины //Изв.РАН.МТТ.1995. N3. С.160-166.

[7] Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести//Изв.АН СССР. ОТН.1958. N8.С.26-31.

[8] Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.:Наука, 1966. С.752.

[9] Шестериков С.А., Юмашева М.А.Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести //Изв. АН СССР. МТТ. 1984. N1. С.86-91.

[10] Степанова Л.В., Шестериков С.А.Анализ напряженно-деформированного состояния у вершины трещины с использованием дробно-линейного закона ползучести //Изв. РАН. МТТ. 1995. N1. С.96-103.

[11] Chaboche J.L.Phenomenological aspects of continuum damage mechanics// Theor. and Appl.Mechanics/Eds.P.German,M.Pian, D.Gaillerie.-London: Elsevier Applied Science Publisheers, 1989. P.41-56.

CREEP CRACK GROWTH PROBLEM IN COUPLED CREEP - DAMAGE APPROACH FOR THE LINEAR - FRACTIONAL CONSTITUTVE RELATIONS

V.I Astafiev, L.V. Stepanova[2]

Stress, strain rate and damage fields near the growth crack tip in coupled creep - damage approach for the linear - fractional constitutve relations are analyzed. It is found that the damage accumulation tends to the appearance of damage zone adjacent to the crack surfaces where all components of stress tensor are equal to zero and damage parameter is equal to unit (so - named failed or fully damage zone). Also the influence of damage tends to vanishing of strain rate singularity.

[2]Astafiev Vladimir Ivanovitch, Stepanova Larisa Valentinovna, Dept. of Continuum Mechanics