ПОСТРОЕНИЕ РАСЩЕПЛЯЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

С.В. Озерский[1]

В статье показано,что конструктивный метод расщепления, предложенный в работе[9], для некоторых сингулярно возмущенных краевых задач оказывается неприменимым. Для одного класса таких краевых задач доказана теорема о модификации расщепляющего преобразования.

Рассмотрим сингулярно возмущенную дифференциальную систему

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t,x,y,\varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &= g(t,x,y,\varepsilon), \end{cases} \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\phi(x(t_0,\varepsilon),y(t_0,\varepsilon),x(t_1,\varepsilon),y(t_1,\varepsilon)) = 0, \quad t_1 > t_0, \tag{2}$$

где $x \in R^m$, $y \in R^n$, ϕ — вектор-функция размерности $(m+n)$; ε — малый положительный параметр.

Такие задачи изучались многими авторами, и обычно для их решения использовался метод пограничных функций, разработанный А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузовым [2]. Конструктивный метод расщепления сингулярно возмущенных дифференциальных систем [9] зачастую позволяет сводить задачи указанного типа к задачам меньшей размерности с переменными одинакового масштаба.

Суть метода расщепления в следующем. Пусть для системы (1) выполнены условия, аналогичные налагаемым в работах А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова [2, 3]:

(i) уравнение $g(t,x,y,0) = 0$ имеет изолированное решение $y = h_0(t,x)$ при $t \in R$, $x \in R^m$;

(ii) в области $\Omega = \{t \in R,\ x \in R^m,\ \|y - h_0(t,x)\| \leq \rho_0,\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ функции h_0, f, g имеют достаточное число равномерно непрерывных и ограниченных частных производных по всем переменным;

(iii) корни $\lambda_i(t,x)$ характеристического уравнения матрицы $B = B(t,x) = g_y(t,x,h_0(t,x),0)$ удовлетворяют неравенству $Re\lambda_i(t,x) \leq -2\alpha < 0,\ i = 1,\dots,n$.

Тогда существует замена переменных [4]

$$x = v + \varepsilon H(t,v,z,\varepsilon), \ \ y = z + h(t,x,\varepsilon), \ \ H(t,v,0,\varepsilon) \equiv 0, \tag{3}$$

---

[1] Озерский Сергей Владимирович. Кафедра дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета

приводящая систему (1) к "блочно-треугольному" виду

$$\dot{v} = F(t, v, \varepsilon), \ \ \varepsilon \dot{z} = G(t, v, z, \varepsilon), \ \ G(t, v, 0, \varepsilon) \equiv 0, \tag{4}$$

причем функция $y = h(t, x, \varepsilon)$ описывает медленное интегральное многообразие системы (1), существование и гладкость которого обеспечивают условия (i)–(iii) [7, 10], а функция $H(t, v, z, \varepsilon)$ представляет собой интегральное многообразие быстрых движений некоторой вспомогательной системы [5, 9]. Причем представление (4) справедливо в некоторой окрестности медленного интегрального многообразия системы (1). В работе [8] преобразование (3) было применено и для расщепления краевых условий (2). В результате чего оказалось, что краевая задача (1),(2) может быть приведена к независимой регулярно возмущенной краевой (или начальной) задаче для переменной v и сингулярно возмущенной начальной задаче для переменной z. Преимущество перед исходной краевой задачей в том, что полученные задачи имеют меньшую размерность и содержат переменные одинакового масштаба.

Однако в дальнейшем выяснилось, что не всегда с помощью преобразования (3) краевую задачу можно расщепить на две задачи меньшей размерности регулярным образом, а именно: в результате расщепления получается сингулярно возмущенная начальная задача с большим (порядка $1/\varepsilon$) начальным условием. Такая ситуация всегда возникает, например, в том случае, когда (3) используется при исследовании краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, с краевыми условиями первого и второго рода, которые не содержат $(n-1)$-ой производной. Проиллюстрируем сказанное на одном примере. Рассмотрим краевую задачу для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения [1]

$$\varepsilon \ddot{x} + \dot{x} - \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) e^{x} = 0, \ \ x(0) = 0, \ \ x(1) = 0.$$

Вместо исходного уравнения будем рассматривать систему

$$\dot{x} = y, \quad \varepsilon \dot{y} = -y + \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) e^{x}, \tag{5}$$

которая с помощью замены переменных $y = z + h(t, x, \varepsilon)$, $x = v + \varepsilon H(t, v, z, \varepsilon)$ приводится к виду

$$\dot{v} = h(t, v, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{z} = -[1 + \varepsilon h'(t, v + \varepsilon H, \varepsilon)]z.$$

Здесь и дальше $h' = \dfrac{dh}{dx}$. Функция $h(t, x, \varepsilon)$ должна удовлетворять уравнению

$$\varepsilon h_t + \varepsilon h_x h = -h + \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) e^{x},$$

а функция $H(t, v, z, \varepsilon)$ является решением уравнения

$$\varepsilon H_t + \varepsilon H_v h(t, v, \varepsilon) - H_z[1 + \varepsilon h'(t, v + \varepsilon H, \varepsilon)]z =$$

$$= z + h(t, v + \varepsilon H, \varepsilon) - h(t, v, \varepsilon).$$

Пренебрегая членами $o(\varepsilon)$, получаем две начальные задачи: независимую регулярно возмущенную для переменной v

$$\dot{v} = h_0(t, v) + \varepsilon h_1(t, v), \ \ v(1, \varepsilon) = 0$$

и сингулярно возмущенную для переменной z

$$\varepsilon\dot{z} = -\left[1 + \varepsilon\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)e^{v} - \varepsilon z\right]z, \;\; z(0,\varepsilon) = -\frac{\ln 2}{\varepsilon} + \frac{\pi^2}{8}$$

В результате для переменной z получилась начальная задача с большим начальным условием. Установлено, что краевую задачу для системы (1) с условиями $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ с помощью преобразования (3) не удается расщепить регулярным образом. Естественно поставить вопросы: можно ли и каким образом следует модифицировать преобразование (3), чтобы регулярно расщепить краевые условия? В статье доказывается существование такого модифицированного расщепляющего преобразования для систем, слабо нелинейнах по "быстрым" переменным.

Рассмотрим вспомогательную сингулярно возмущенную систему уравнений, в которой малый параметр при производной присутствует в обоих уравнениях:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} &= A(x,t,\varepsilon)y + \varepsilon f(x,y,t,\varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &= B(x,t,\varepsilon)y + \varepsilon g(x,y,t,\varepsilon) \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $x \in \mathbf{R^m}$, $y \in \mathbf{R^n}$, $t \in \mathbf{R}$, ε — малый положительный параметр. Предполагается, что для системы (6) выполнены уже знакомые нам условия, типичные для данной ситуации:

1) в области $\Omega_1 = \{(x,t,\varepsilon):\ \ x \in \mathbf{R^m}, t \in \mathbf{R}, \|y\| \le \varepsilon\rho_1, 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1\}$ матричные и векторные функции $A(x,t,\varepsilon)$, $B(x,t,\varepsilon)$, $f(x,y,t,\varepsilon)$, $g(x,y,t,\varepsilon)$ равномерно непрерывны и ограничены по норме вместе с достаточным количеством частных производных по всем переменным;

2) корни $\lambda_i(x,t)$ характеристического уравнения матрицы $B(x,t,0)$ подчиняются неравенству $Re\,\lambda_i(x,t) \le -2\gamma < 0$ при $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R^m}$, $i = 1,\ldots,n$.

В дальнейшем будем часто использовать следующий факт [6]:

Теорема 1 *Пусть функция $L(t,\phi)$ непрерывна по совокупности переменных и не убывает по ϕ, а функция $\phi(t)$ на $[t_0,t_1]$ удовлетворяет интегральному неравенству*

$$\phi(t) \le a + \int_{t_0}^{t} L(s,\phi(s))\,ds.$$

Если $\phi_0(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\phi_0}{dt} = L(t,\phi_0),$$

которое однозначно определяется по начальным данным и $\phi_0(t_0) \le a$, то при $t_0 \le t \le t_1$ справедливо неравенство

$$\phi(t) \le \phi_0(t).$$

Имеет место следующая

Теорема 2 *При выполнении условий 1), 2) найдутся такие числа ε^* и ρ^* ($0 < \varepsilon^* \le \varepsilon_1$, $0 < \rho^* \le \rho_1$), что в области*

$$\Omega^* = \{(v,z,t,\varepsilon):\ \ v \in \mathbf{R^m}, \|z\| \le \varepsilon\rho^*, t \in \mathbf{R}, 0 \le \varepsilon \le \varepsilon^*\}$$

существует замена переменных

$$x = v + H(v, z, t, \varepsilon), \;\; y = z + \varepsilon h(x, t, \varepsilon), \;\; H(v, 0, t, \varepsilon) \equiv 0, \tag{7}$$

приводящая систему (6) к "блочно-треугольному" виду

$$\begin{cases} \dot{v} &= F(v, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{z} &= P(v, z, t, \varepsilon). \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство. Сразу отметим, что функция $y = \varepsilon h(x, t, \varepsilon)$ описывает медленное интегральное многообразие системы (6), существование которого можно доказать следующим образом. Сделаем в (6) замену переменной $y = \varepsilon \xi$, получим систему

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(x, t, \varepsilon)\xi + f(x, \varepsilon\xi, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{\xi} &= B(x, t, \varepsilon)\xi + g(x, \varepsilon\xi, t, \varepsilon), \end{cases}$$

которая имеет медленное интегральное многообразие вида $\xi = h(x, t, \varepsilon)$, существование и гладкость которого обеспечивают условия 1),2). Отсюда сразу следует, что (6) имеет медленное интегральное многообразие $y = \varepsilon h(x, t, \varepsilon)$. Причем функция $h(x, t, \varepsilon)$ может быть найдена в виде асимптотического разложения по степеням ε из уравнения

$$\varepsilon h_t + \varepsilon h_x [A(x, t, \varepsilon) h + f(x, \varepsilon h, t, \varepsilon)] = B(x, t, \varepsilon) h + g(x, \varepsilon h, t, \varepsilon).$$

Движение на медленном интегральном многообразии описывается следующим уравнением:

$$\dot{v} = F(v, t, \varepsilon), \tag{9}$$

$$F(v, t, \varepsilon) = A(v, t, \varepsilon) h(v, t, \varepsilon) + f(v, \varepsilon h(v, t, \varepsilon), t, \varepsilon).$$

В окрестности интегрального многообразия $y = \varepsilon h(x, t, \varepsilon)$ введем новые переменные: v — решение уравнения (9), $w = x - v$, $z = y - \varepsilon h(x, t, \varepsilon)$ и рассмотрим расширенную вспомогательную систему для переменных v, z, w:

$$\begin{cases} \dot{v} &= F(v, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{z} &= B(v, t, 0) + G(v, w, z, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{w} &= \Phi(v, w, z, t, \varepsilon), \end{cases} \tag{10}$$

где

$$G(v, w, z, t, \varepsilon) = [B(v + w, t, \varepsilon) - B(v, t, 0) - \varepsilon h'(v + w, t, \varepsilon) A(v + w, t, \varepsilon)] z +$$

$$+ \varepsilon [g(v + w, z + \varepsilon h(v + w, t, \varepsilon), t, \varepsilon) - g(v + w, \varepsilon h(v + w, t, \varepsilon), t, \varepsilon)] -$$

$$- \varepsilon h'(v + w, t, \varepsilon)[f(v + w, z + \varepsilon h(v + w, t, \varepsilon), t, \varepsilon) - f(v + w, \varepsilon h(v + w, t, \varepsilon), t, \varepsilon)],$$

$$\Phi(v, w, z, t, \varepsilon) = A(v + w, t, \varepsilon) z + \varepsilon [A(v + w, t, \varepsilon) h(v + w, t, \varepsilon) +$$

$$+ f(v + w, z + \varepsilon h(v + w, t, \varepsilon), t, \varepsilon) - F(v, t, \varepsilon)].$$

Для функций G и Φ справедливы неравенства

$$||G(v, w, z, t, \varepsilon)|| \le c ||z|| (\varepsilon + ||w||), \tag{11}$$

$$||\Phi(v, w, z, t, \varepsilon)|| \le c (||z|| + \varepsilon ||w||), \tag{12}$$

$$||G(v, w, z, t, \varepsilon) - G(\overline{v}, \overline{w}, \overline{z}, t, \varepsilon)|| \le$$

$$\leq c[||z||(\varepsilon + ||w||)||v - \overline{v}|| + ||z||||w - \overline{w}|| + (\varepsilon + ||\overline{w}||)||z - \overline{z}||], \tag{13}$$

$$||\Phi(v, w, z, t, \varepsilon) - \Phi(\overline{v}, \overline{w}, \overline{z}, t, \varepsilon)|| \leq$$
$$\leq c[(||z|| + \varepsilon||w||)||v - \overline{v}|| + (||z|| + \varepsilon)||w - \overline{w}|| + ||z - \overline{z}||], \tag{14}$$

которые следуют из теоремы Лагранжа о конечных приращениях и дифференциальных свойств функций G и Φ. Пусть $\Omega_{vz} = \{(v, z, t, \varepsilon) : \ v \in \mathbf{R^m}, ||z|| \leq \varepsilon\rho, t \in \mathbf{R}, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1\}$. Используя схему доказательства существования интегрального многообразия быстрых движений, приведенную в работе [5] для несколько иных систем, покажем, что система (8) имеет в области Ω_{vz} интегральное многообразие $w = H(v, z, t, \varepsilon)$, движение по которому описывается системой

$$\begin{cases} \dot{v} &= F(v, t, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{z} &= B(v, t, 0) + G(v, H(v, z, t, \varepsilon), z, t, \varepsilon). \end{cases}$$

Введем в рассмотрение класс $M(a, b)$ функций H, действующих из Ω_{vz} в $\mathbf{R^m}$ и удовлетворяющих неравенствам:

$$||H(v, z, t, \varepsilon)|| \leq a||z||, \tag{15}$$

$$||H(v, z, t, \varepsilon) - H(\overline{v}, \overline{z}, t, \varepsilon)|| \leq b[||z||||v - \overline{v}|| + ||z - \overline{z}||]. \tag{16}$$

Класс $M(a, b)$ является полным метрическим пространством с метрикой

$$d(H, \overline{H}) = \sup\left(\frac{||H(v, z, t, \varepsilon) - \overline{H}(v, z, t, \varepsilon)||}{||z||}\right),$$

где супремум вычисляется по Ω_{vz} при $z \neq 0$ и фиксированном ε.

Функция H является решением операторного уравнения

$$H(v, z, t, \varepsilon) = S(H)(v, z, t, \varepsilon), \tag{17}$$

где оператор $S(H)$ задается соотношением

$$S(H)(v, z, t, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{+\infty} \Phi(v(s), H(v(s), z(s), s, \varepsilon), z(s), s, \varepsilon)\, ds. \tag{18}$$

Здесь $v(t)$ — решение начальной задачи

$$\dot{v} = F(v, t, \varepsilon), \quad v(\tau) = v, \tag{19}$$

а $z(t)$ — решение другой задачи Коши

$$\varepsilon\dot{z} = B(v(t), t, 0) + G(v(t), H(v(t), z(t), t, \varepsilon), z(t), t, \varepsilon), \quad z(\tau) = z. \tag{20}$$

Сходимость несобственного интеграла в (18) обеспечивается неравенством (12) и оценкой

$$||z(t)|| \leq K||z||e^{-\frac{\gamma}{2\varepsilon}(t-\tau)}, \ \ t \geq \tau \tag{21}$$

для решений начальной задачи (20). Чтобы доказать неравенство (21), перепишем уравнение для $z(t)$ в интегральной форме

$$z(t) = U_v(t, \tau, \varepsilon)z + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t U_v(t, s, \varepsilon)G(v(s), H(v(s), z(s), s, \varepsilon), z(s), s, \varepsilon)\, ds, \tag{22}$$

где $U_v(t,\tau,\varepsilon)$ — матрица Коши однородного уравнения

$$\varepsilon\dot{z}(t) = B(v(t),t,0)z(t), \ \ U_v(\tau,\tau,\varepsilon) = I.$$

Здесь и в дальнейшем будем использовать оценки, полученные в[5].

$$||U_v(t,\tau,\varepsilon)|| \le K||z||e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}(t-\tau)}, \tag{23}$$

$$||U_v(t,\tau,\varepsilon) - U_{\overline{v}}(t,\tau,\varepsilon)|| \le \frac{2K^2N}{\gamma}e^{-\frac{\gamma}{2\varepsilon}(t-\tau)}||v-\overline{v}||, \tag{24}$$

$$||v(t) - \overline{v}(t)|| \le ||v-\overline{v}||e^{\alpha(t-\tau)}, \tag{25}$$

где $t \ge \tau$, $\overline{v}(t)$ — решение задачи (19) с начальным условием $\overline{v}(\tau) = \overline{v}$, $K \ge 1$, $N = \sup\limits_{t\in\mathbf{R},v\in\mathbf{R^m}} ||B(v,t,0)||$, а неравенство (24) имеет место при $\gamma \ge \varepsilon 2\alpha$. Используя (22), получаем оценку при $t \ge \tau$

$$||z(t)|| \le ||U_v(t,\tau,\varepsilon)z|| + \frac{1}{\varepsilon}\left\|\int\limits_\tau^t U_v(t,s,\varepsilon)G(v(s),H(v(s),z(s),s,\varepsilon),z(s),s,\varepsilon)\,ds\right\| \le$$

$$\le K\exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}(t-\tau)\right)||z|| + Kc(1+a\rho)\int\limits_\tau^t \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}(t-s)\right)||z(s)||\,ds.$$

Введем обозначение $u(t) = ||z(t)||\exp\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}(t-\tau)\right)$. Тогда полученное неравенство примет вид

$$u(t) \le K||z|| + Kc(1+a\rho)\int\limits_\tau^t u(s)\,ds.$$

Используя теорему 1 об интегральном неравенстве, получим, что

$$u(t) \le \xi(t),$$

где $\xi(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\xi(t) \le K||z|| + Kc(1+a\rho)\int\limits_\tau^t \xi(s)\,ds.$$

Отсюда вытекает оценка (21), которая верна при фиксированном значении a для достаточно малого значения ε_2, при этом ρ выбирается таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$2\varepsilon_2 Kc(1+a\rho) \le \gamma. \tag{26}$$

Используя (18) и неравенства (12), (15) и (21), получаем

$$||S(H)(v,z,t,\varepsilon)|| \le \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{+\infty} ||\Phi(v(s),H(v(s),z(s),s,\varepsilon),z(s),s,\varepsilon)||\,ds \le \frac{2Kc}{\gamma}(1+\varepsilon a)||z||.$$

Поэтому $S(H)(v,z,t,\varepsilon)$ будет удовлетворять неравенству (15) при

$$\frac{2Kc}{\gamma}\varepsilon_2 < 1, \ \ a \ge \frac{2Kc}{\gamma - \varepsilon_2 2Kc}. \tag{27}$$

Чтобы убедиться в том, что $S(H)$ удовлетворяет и неравенству (16), поступим следующим образом. Пусть $v(t)$ и $\overline{v}(t)$ — решения задачи (19) с начальными условиями $v(\tau) = v$ и $\overline{v}(\tau) = \overline{v}$; $z(t)$ и $\overline{z}(t)$ — решения задачи (20) с функциями $v(t)$ и $\overline{v}(t)$ соответственно и начальными условиями $z(\tau) = z$, $\overline{z}(\tau) = \overline{z}$. Используя для $z(t)$ и $\overline{z}(t)$ интегральные представления типа (22), оценки (11), (13), (15), (16), (21), (23)–(25) и теорему 1, получаем

$$||z(t) - \overline{z}(t)|| \leq [K_1||z||||v - \overline{v}|| + K||z - \overline{z}||] \exp\left(-\frac{\gamma}{8\varepsilon}(t - \tau)\right), \tag{28}$$

где $\delta = Kc(1 + a\rho + b\rho)$, $K_1 = K + \dfrac{4K^2N}{\gamma}$ и неравенство (28) справедливо при

$$\max(\alpha, 2\delta) \leq \frac{\gamma}{4\varepsilon_2}. \tag{29}$$

Оценим по норме разность $S(H)(v, z, t, \varepsilon) - S(H)(\overline{v}, \overline{z}, t, \varepsilon)$. Используя оценки (14)–(16), (21), (25), (28), получаем неравенство:

$$||S(H)(v, z, t, \varepsilon) - S(H)(\overline{v}, \overline{z}, t, \varepsilon)|| \leq b[|z||||v - \overline{v}|| + ||z - \overline{z}||],$$

которое имеет место при достаточно малых значениях ε, если справедливо неравенство

$$\gamma > \varepsilon_2 8c(1 + \rho)(K + K_1). \tag{30}$$

Следовательно, функция $S(H)(v, z, t, \varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам (15), (16), а это означает, что она оставляет пространство $M(a, b)$ инвариантным.

Пусть теперь $H_1(v, z, t, \varepsilon)$ и $H_2(v, z, t, \varepsilon)$ — некоторые функции из $M(a, b)$; $z_1(t)$ является решением задачи (20) при $H = H_1$, а $z_2(t)$ — решением такой же задачи при $H = H_2$ с одинаковыми начальными условиями. Как и ранее, используем для $z_1(t)$ и $z_2(t)$ интегральные представления типа (22) и уже известные нам оценки.

$$||z_1(t) - z_2(t)|| \leq \frac{cK}{\varepsilon} \int\limits_{\tau}^{t} \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}(t - s)\right) [\varepsilon(1 + a\rho + b\rho)||z_1(s) - z_2(s)|| +$$

$$+ K \exp\left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}(s - \tau)\right) ||z||^2 d(H_1, H_2)\Big] \, ds.$$

Применяя еще раз теорему 1 об интегральном неравенстве к функции

$$u(t) = ||z_1(t) - z_2(t)|| \exp\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}(s - \tau)\right),$$

получаем, что $u(t) \leq \xi(t)$, где $\xi(t)$ — решение интегрального уравнения

$$\xi(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\tau}^{t} \left[\varepsilon\delta\xi(s) + cK^2||z||^2 d(H_1, H_2) \exp\left(\frac{\gamma}{2\varepsilon}(s - \tau)\right)\right] ds$$

Нетрудно убедиться,что

$$\xi(t) = \frac{2cK^2||z||^2 d(H_1, H_2)}{\gamma - 2\varepsilon\delta} \left[\exp\left(\frac{\gamma}{2\varepsilon}(t - \tau)\right) - e^{\delta(t - \tau)}\right].$$

Будем считать, что выполнено неравенство

$$\gamma - 2\varepsilon\delta \geq \gamma_1 > 0.$$

Тогда

$$\|z_1(t) - z_2(t)\| \le \frac{2cK^2}{\gamma}\|z\|^2 d(H_1, H_2) \exp\left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}(t-\tau)\right). \tag{31}$$

Используя неравенство (31), получим

$$\|S(H_1)(v, z_1, t, \varepsilon) - S(H_2)(v, z_2, t, \varepsilon)\| \le \varepsilon\frac{2cK}{\gamma}\|z\|\left[1 + \rho + (1 + b\varepsilon + b\varepsilon\rho)\frac{2cK\rho}{\gamma_1}\right] d(H_1, H_2).$$

Отсюда получаем, что

$$d(S(H_1), S(H_2)) \le \varepsilon\frac{2cK}{\gamma}\left[1 + \rho + (1 + b\varepsilon + b\varepsilon\rho)\frac{2cK\rho}{\gamma_1}\right] d(H_1, H_2).$$

Таким образом, установлено существование таких чисел a и b, что оператор $S(H)$ переводит полное метрическое пространство $M(a, b)$ в себя и является сжимающим при $0 < \varepsilon \le \varepsilon^* \le \varepsilon_2$, $0 < \rho^* \le \rho$, где ε_2 и ρ являются решениями системы неравенств (26), (27), (29), (30) и неравенства

$$\varepsilon_2\frac{2cK}{\gamma}\left[1 + \rho + (1 + b\varepsilon_2 + b\varepsilon_2\rho)\frac{2cK\rho}{\gamma_1}\right] d(H_1, H_2) < 1.$$

Следовательно, уравнение (17) имеет в $M(a, b)$ единственное решение. Значит, в области Ω^* система (10) имеет интегральное многообразие $w = H(v, z, t, \varepsilon)$, движение по которому осуществляется в соответствии с системой

$$\begin{cases} \dot v &= F(v, t, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot z &= B(v, t, 0)z + G(v, H(v, z, t, \varepsilon), z, t, \varepsilon). \end{cases}$$

Тем самым утверждение теоремы доказано. □

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \dot x &= A(x, t, \varepsilon)\xi + f(x, \varepsilon\xi, t, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot\xi &= B(x, t, \varepsilon)\xi + g(x, \varepsilon\xi, t, \varepsilon), \end{cases} \tag{32}$$

с условиями

$$x(t_0, \varepsilon) = \alpha^*, \quad x(t_1, \varepsilon) = \beta^*, \quad t_1 > t_0. \tag{33}$$

В качестве следствия из теоремы 2 получаем следующее утверждение

Теорема 3 *Пусть для системы (32) выполнены условия, аналогичные 1),2). Тогда существует расщепляющее преобразование*

$$x = v + H(v, z, t, \varepsilon), \quad \xi = \frac{z}{\varepsilon} + h(x, t, \varepsilon), \tag{34}$$

приводящее краевую задачу (32),(33) к двум начальным задачам. Причем краевые условия расщепляются с точностью порядка $O\left(\exp\left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}(t_1 - t_0)\right)\right)$.

Доказательство. Сделаем в системе (32) замену переменной $\varepsilon\xi = y$. Получим систему (6), для которой при сделанных предположениях справедливо утверждение теоремы 2. Отсюда следует, что преобразование (34) приводит систему (32) к "блочно-треугольному" виду:

$$\begin{cases} \dot v &= F(v, t, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot z &= P(v, z, t, \varepsilon). \end{cases}$$

где $P(v,z,t,\varepsilon)=B(v,t,0)z+G(v,H(v,z,t,\varepsilon),z,t,\varepsilon)$. Краевые условия (33) трансформируются следующим образом

$$\begin{cases} v(t_0) & +H(v(t_0),z(t_0),t_0,\varepsilon)=\alpha^*, \\ v(t_1) & +H(v(t_1),z(t_1),t_1,\varepsilon)=\beta^*. \end{cases}$$

Используя (15), получаем, что функция $H(v(t),z(t),t,\varepsilon)$, как и $z(t)$ является функцией левого погранслоя. Пренебрегая членами порядка $O\left(\exp\left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}(t_1-t_0)\right)\right)$, получаем две начальные задачи: регулярно возмущенную с условием в правом конце промежутка

$$\begin{cases} \dot v = F(v,t,\varepsilon), \\ v(t_1)=\beta^* \end{cases} \tag{35}$$

и сингулярно возмущенную задачу с условием в левом конце промежутка

$$\begin{cases} \varepsilon\dot z = P(v,z,t,\varepsilon), \\ v(t_0)+H(v(t_0),z(t_0),t_0,\varepsilon)=\alpha^*. \end{cases} \tag{36}$$

Для задачи (32), (33) с правым погранслоем получаем аналогичный результат; только в (35) и (36) нужно брать начальные условия на противоположных концах промежутка $[t_0,t_1]$. □

Применим полученные результаты для анализа сингулярно возмущенной краевой задачи, рассмотренной ранее:

$$\varepsilon\ddot x+\dot x-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)e^x=0,\ \ x(0)=0,\ \ x(1)=0.$$

Вместо исходного уравнения будем рассматривать систему

$$\begin{cases} \dot x = & y, \\ \varepsilon\dot y = & -y+\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)e^x, \end{cases}$$

которая линейна по "быстрой" переменной y. С помощью замены $y=\frac{z}{\varepsilon}+h(t,x,\varepsilon)$ переведем систему в окрестность медленного интегрального многообразия

$$\begin{cases} \dot x = & \frac{z}{\varepsilon}+h(t,x,\varepsilon), \\ \varepsilon\dot z = & -[1+\varepsilon h'(t,x,\varepsilon)]z. \end{cases} \tag{37}$$

Функция $h(t,x,\varepsilon)$ должна удовлетворять уравнению

$$\varepsilon h_t+\varepsilon h_x h=-h+\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)e^x.$$

Далее введем новую переменную v по формуле $x=v+H(t,v,z,\varepsilon)$. Вместо (37) получаем систему

$$\begin{cases} \dot v = & h(t,v,\varepsilon), \\ \varepsilon\dot z = & -[1+\varepsilon h'(t,v+H,\varepsilon)]z, \end{cases}$$

Функция $H(t,v,z,\varepsilon)$ является решением уравнения

$$\varepsilon H_t+\varepsilon H_v h(t,v,\varepsilon)-H_z[1+\varepsilon h'(t,v+H,\varepsilon)]z=$$

$$=z+\varepsilon[h(t,v+H,\varepsilon)-h(t,v,\varepsilon)].$$

Пренебрегая членами $o(\varepsilon)$, получим две начальные задачи для переменных v и z, причем первая из них задача — независимая. Отметим, что в этом случае, в отличие от рассмотренного ранее, краевые условия расщепляются регулярным образом:

$$\begin{cases} \dot{v} = & h_0(t,v) + \varepsilon h_1(t,v), \quad v(1,\varepsilon) = 0, \\ \varepsilon \dot{z} = & -\left[1 + \varepsilon \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) e^{v} - z\right] z, \quad z(0,\varepsilon) = -\ln 2 + \varepsilon \frac{\pi^2}{8} \end{cases} \tag{38}$$

$$h(t,x,\varepsilon) = h_0(t,x) + \varepsilon h_1(t,x) + \dots,$$

$$H(t,v,z,\varepsilon) = H_0(t,v,z) + \varepsilon H_1(t,v,z) + \dots,$$

где

$$h_0(t,x) = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) e^{x},$$

$$h_1(t,x) = -\frac{\pi^2}{4} \left[\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) e^{x} + \sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right] e^{2x},$$

$$H_0(t,v,z) = -z,$$

$$H_1(t,v,z) = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) e^{v} \left[e^{-z} - 1 + \int\limits_0^z \frac{1 - e^{-s}}{s}\, ds\right].$$

Решение задачи (38) будем искать с точностью до членов порядка $O(\varepsilon)$ включительно:

$$v(t,\varepsilon) = v_0(t) + \varepsilon v_1(t) + \dots,$$

$$z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau) + \varepsilon z_1(\tau) + \dots, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}.$$

Тогда асимптотику решения исходной краевой задачи можно представить в следующем виде

$$x(t,\varepsilon) = v_0(t) - z_0(\tau) +$$

$$+\varepsilon \left[v_1(t) - z_1(\tau) + \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) e^{v_0(t)} \left(e^{-z_0(\tau)} - 1 + \int\limits_0^{z_0(\tau)} \frac{1 - e^{-s}}{s}\, ds\right)\right],$$

где

$$v_0(t) = -\ln[\cos(\pi t/2) + 1],$$

$$v_1(t) = \frac{\pi^2}{4} \frac{1 - t}{\cos(\pi t/2) + 1},$$

$$z_0(\tau) = -\ln 2 e^{-\tau},$$

$$z_1(\tau) = \left[\frac{\pi^2}{8} e^{-\tau} - \int\limits_0^{\tau} \phi(\varepsilon s, s) e^{s - \tau}\, ds\right],$$

$$\phi(\varepsilon s, s) = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi \varepsilon s}{2}\right) e^{v_0(\varepsilon s) - z_0(s)} z_0(s).$$

Литература

[1] Блатов И.А., Стрыгин В.В.
Сходимость метода Галеркина для нелинейной двухточечной сингулярно возмущенной краевой задачи в пространстве $C[a, b]$ //ЖВМ и МФ. **25** (1985). 7. 1001–1008.

[2] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.
Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

[3] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.
Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.

[4] Воропаева Н.В., Соболев В.А.
Конструктивный метод расщепления нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных систем //Дифференциальные уравнения. **31** (1995). 4. 569–578.

[5] Гольдштейн В.М., Соболев В.А.
Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. Новосибирск: Ин-т матем. АН СССР, Сиб. отд., 1988.

[6] Красносельский М.А.
Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.:Наука, 1966.

[7] Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.
Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973.

[8] Озерский С.В.
Расщепление краевых задач с сингулярными возмущениями //Вестник Самарского государственного университета (спец. выпуск). Самара, 1995. С. 40–48.

[9] Соболев В.А. (Sobolev V.A.)
System and Control Lett. 1984. N 5. 169–179.

[10] Стрыгин В.В., Соболев В.А.
Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988.

CONSTRACTION OF SPLITTING TRANSFORMATION FOR ONE CLASS OF SINGULAR PERTURBED BOUNDARY VALUE PROBLEMS

S.V. Ozersky[2]

This paper shows that constructive splitting method is not applicable for splitting of some singular perturbed boundary value problems. The theorem of modification of splitting transformation is proved.

[2] Sergey V. Ozersky, Dept. of Differential Equation and Control Theory Samara State University