ВЫЧИСЛЕНИЕ МЕДЛЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.П.Котенко[1]

Построен алгоритм вычисления начальных условий для лежащего на гладком устойчивом интегральном многообразии решения сингулярно возмущённой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, отличающегося от решения исходной задачи Коши на слагаемое, затухающее по экспоненте. Таким образом, сингулярно возмущённая задача Коши сводится к регулярно возмущённой без вычисления слагаемых типа погранслоя.

1 Постановка задачи

В банаховых пространствах X и Y рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,y), \\ \varepsilon\dot{y} &= g(x,y), \\ x(0) &= \alpha, \\ y(0) &= \beta. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ – малый параметр; $x,\alpha \in X$; $y,\beta \in Y$. Предположим:

1. вектор-функции f и g бесконечно дифференцируемы по всем аргументам и равномерно ограничены вместе со всеми производными;

2. спектр оператора $g_y(x,y)$ лежит в левой полуплоскости и равномерно относительно $x \in X$, $y \in Y$ отделён от мнимой оси на расстояние, не меньшее некоторого $\sigma > 0$;

3. оператор $g_y^{-1}(x,y)$ бесконечно дифференцируем по всем аргументам и равномерно ограничен вместе со всеми производными;

4. система (1) имеет интегральное многообразие

$$y = \varphi(x,\varepsilon) = \varphi_0(x) + \varepsilon\varphi_1(x) + \ldots + \varepsilon^N\varphi_N(x) + \varepsilon^N\varphi_{N+1}(x,\varepsilon),$$

   где $\varphi_{N+1}(x,\varepsilon) = O(\varepsilon)$ равномерно относительно $x \in X$;

[1]Котенко Андрей Петрович. Кафедра высшей математики Самарской государственной архитектурно-строительной академии

5. функции φ_i, $i \in \overline{0, N}$, бесконечно дифференцируемы по всем аргументам и равномерно ограничены вместе со всеми производными;

6. решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= f(x^*, \varphi(x^*, \varepsilon)), &(2)\\ x^*(0) &= \gamma &(3) \end{aligned}$$

существует и единственно при $\forall \gamma \in X$, $t \geq 0$.

7. если через $U_\gamma(t, \tau)$ обозначена фундаментальная матрица системы

$$\varepsilon \dot{y} = g_y\left(x^*(t), \varphi(x^*(t), \varepsilon)\right) y, \tag{4}$$

удовлетворяющая условию $U_\gamma(\tau, \tau) = E$, $0 \leq \tau \leq t < \infty$, то для $\forall \gamma \in X$ найдутся такие постоянные $C > 0$ и $\mu > 0$, при которых выполняется неравенство

$$||U_\gamma(t, \tau)|| \leq Ce^{-\dfrac{\mu}{\varepsilon}(t-\tau)},\ 0 \leq \tau \leq t < \infty. \tag{5}$$

В этих предположениях найдём начальное условие $\gamma = \alpha + O(\varepsilon)$ для задачи Коши (2-3), обеспечивающее оценку

$$||y(t) - \varphi(x^*(t), \varepsilon)|| + ||x(t) - x^*(t)|| \leq Ce^{-\dfrac{\sigma_1}{\varepsilon}t},\ t \geq 0,\ \sigma_1 > 0. \tag{6}$$

Тогда исследование задачи Коши (1) при $t \to \infty$ будет сведено к изучению решения регулярно возмущённой задачи (2-3) более низкой размерности [3, 4].

2 Построение системы в вариациях

Заменим $\xi = x - x^*$, $\eta = y - \varphi(x^*, \varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= f\left(x^* + \xi, \eta + \varphi(x^*, \varepsilon)\right) - f\left(x^*, \varphi(x^*, \varepsilon)\right), &(7)\\ \varepsilon\dot{\eta} &= g\left(x^* + \xi, \eta + \varphi(x^*, \varepsilon)\right) - g\left(x^*, \varphi(x^*, \varepsilon)\right). &(8) \end{aligned}$$

Через $l_i(t, \varepsilon, \gamma)$ обозначим i-линейное ограниченное, непрерывное по γ и дифференцируемое по t отображение $\underbrace{Y \times \cdots \times Y}_{i \text{ раз}} \to X$ со значением $l_i[y_1, \ldots, y_i]$ на векторах $y_1, \ldots, y_i \in Y$ и $l_i[y]^i$ — при $y_1 = \ldots = y_i = y$.

Подставим выражение

$$\xi = \varepsilon \left\{ l_1 y + l_2[y]^2 + \ldots + l_N[y]^N \right\} \tag{9}$$

в (7-8) и приравняем в (7) коэффициенты при одинаковых степенях η. Получим следующие уравнения для определения l_i:

$$\varepsilon\dot{l}_1 + l_1 g_y\left(x^*, \varphi(x^*, \varepsilon)\right) + \varepsilon Q_1(l_1) = f_y\left(x^*, \varphi(x^*, \varepsilon)\right), \tag{10}$$

где $Q_1(l_1) = l_1 g_x l_1 - f_x l_1$;

$$\varepsilon\dot{l}_2[\eta]^2 + l_2[g_y\eta, \eta] + l_2[\eta, g_y\eta] + \varepsilon Q_2(l_1) l_2[\eta]^2 = F_2(l_1)[\eta]^2, \tag{11}$$

где Q_2, F_2 известны, если найдено l_1;

аналогично для $i \in \overline{3, N-1}$:

$$\varepsilon \dot{l}_i[\eta]^i + \overbrace{l_i[g_y\eta, \underbrace{\eta, \ldots, \eta}_{i-1 \text{ раз}}] + \ldots + l_i[\underbrace{\eta, \ldots, \eta}_{i-1 \text{ раз}}, g_y\eta]}^{i \text{ слагаемых}}$$

$$+ \varepsilon Q_i(l_1, \ldots, l_{i-1}) l_i[\eta]^i = F_i(l_1, \ldots, l_{i-1})[\eta]^i + \Psi(l_1, \ldots, l_i, \eta)[\eta]^i, \qquad (12)$$

где i-линейные отображения $Q_i l_i$, F_i, $\Psi(l_i, \eta)$ известны, если найдены все $l_1, \ldots, l_{i-1}$.

Будем искать ограниченное при $t \geq 0$ решение уравнения (10) в виде

$$l_1 = l_1^0 + \varepsilon l_1^1 + \ldots + \varepsilon^{N+1} l_1^{N+1}. \qquad (13)$$

Подставим (13) в (10) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим

$$\begin{array}{rcl} l_1^0 g_y\left(x^*, \varphi(x^*, \varepsilon)\right) & = & f_y\left(x^*, \varphi(x^*, \varepsilon)\right); \\ l_1^0 g_y\left(x^*, \varphi(x^*, \varepsilon)\right) & = & -\dot{l}_1^0 - Q_1(l_1); \end{array}$$

аналогично для ε^i, $i \in \overline{2, N}$:

$$\varepsilon \dot{l}_1^{N+1} + l_1^{N+1} g_y\left(x^*, \varphi(x^*, \varepsilon)\right) + \varepsilon M_1(l_1^{N+1}, x^*, \varepsilon) + \varepsilon^{N+1} M_2(l_1^{N+1}, x^*, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} S_1(x^*, \varepsilon), \qquad (14)$$

где при некотором $C > 0$

$$||S_1|| \leq C,\ ||M_1|| \leq C||l_1^{N+1}||,\ ||M_2|| \leq C||l_1^{N+1}||^2,$$

$$||M_2(l_1^{N+1}) - M_2(l)|| \leq C \max\left\{||l_1^{N+1}||, ||l||\right\} ||l_1^{N+1} - l||.$$

Легко найти $l_1^0 = f_y g_y^{-1}$. Аналогично находятся l_1^j, $j \in \overline{1, N}$.

Ограниченное при $t \geq 0$ решение уравнения (14) определяется интегральным уравнением

$$z = -\int\limits_t^{+\infty} \left\{\varepsilon^{-1} S(x^*, \varepsilon) + M_1(z, x^*, \varepsilon) + \varepsilon^{N+1} M_2(z, x^*, \varepsilon)\right\}(s) U_\gamma(s, t) ds.$$

При этом $\varepsilon^{N+1} l_1^{N+1} = O(\varepsilon^{N-1})$, и $l_1(t, \varepsilon, \gamma)$ дифференцируемо по γ.

Будем искать ограниченное при $t \geq 0$ решение уравнения (11) в виде

$$l_2 = l_2^0 + \varepsilon l_2^1 + \ldots + \varepsilon^{N+1} l_2^{N+1}. \qquad (15)$$

Подставим (15) в (11) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим следующее уравнение для определения l_2^0:

$$l_2^0[g_y\eta, \eta] + l_2^0[\eta, g_y\eta] = F_2(l_1)[\eta]^2.$$

Его решение имеет вид [1]

$$l_2^0(t, \varepsilon, \gamma)[\eta]^2 = -\int_t^{+\infty} F_2\left[e^\tau g_y\left(x^*(t), \varphi(x^*(t), \varepsilon)\right)\eta\right]^2 d\tau.$$

Сходимость интеграла следует из условия 2.

Дальнейшие выкладки проводятся аналогично.

Из теоремы Ляпунова-Перрона [2], условия которой для системы (7-8) проверяются с помощью предположения 7, вытекает оценка

$$\|\eta(t)\| \leq Ce^{-\frac{\sigma_1}{\varepsilon}t},\ t \geq 0,\ 0 < \sigma_1 < \sigma,$$

и существование ограниченного при $t \geq 0$ решения уравнения (12). При этом, следуя схеме доказательства, приведённого в [2], устанавливается дифференцируемость l^N по γ. Кроме того, из (9) и ограниченности l_i получим оценку (6).

3 Нахождение начального условия γ

Положив в (9) $t = 0$, получим уравнение для определения γ

$$\alpha - \gamma = \varepsilon \left\{ l_1(0,\varepsilon,\gamma)[\beta - \varphi(\gamma,\varepsilon)] + \ldots + l_N(0,\varepsilon,\gamma)[\beta - \varphi(\gamma,\varepsilon)]^N \right\}. \quad (16)$$

Будем искать его решение в виде

$$\gamma = \alpha + \varepsilon\gamma_1 + \ldots + \varepsilon^N\gamma_N + \varepsilon^{N+1}\gamma_{N+1}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, найдём

$$\gamma_1 = -l_1^0(\alpha)[\beta - \varphi_0(\alpha)] + \ldots + l_{N-1}^0(\alpha)[\beta - \varphi_0(\alpha)]^{N-1} + O\left(\|\beta - \varphi_0(\alpha)\|^N\right).$$

Аналогичные выражения получаются для всех γ_i, $i \in \overline{2,N}$. С помощью принципа сжатия нетрудно установить оценку $\varepsilon^{N+1}l_{N+1} = O(\varepsilon^N)$ при достаточно малом $\|\beta - \varphi_0(\alpha)\|$.

Следовательно, начальное условие задачи Коши (2-3) зависит от ε регулярно.

Литература

[1] Перов А. И. Об одном обобщении формулы Крейна-Далецкого //Тр. семинара по функ. анализу. Воронеж, 1969. Вып. 12. С. 122-132.

[2] Плисс В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М:., Наука, 1977. С. 17-61.

[3] Котенко А. П. Выделение медленных составляющих движения гироскопических систем //Приближённые методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Куйбышев, 1984. С. 56-62.

[4] Sobolev V. A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems. Systems and Control Letters. 1984. N5. C. 169-179.

DETERMINATION OF SLOW VARIABLES OF SINGULAR PERTERBED SYSTEM IN BAHACH SPACE

A.P. Kotenko[2]

Algorithm of determination of initial value for solution of singular perturbed system of ordinary differential equations is described. This solution on smooth integral stable manifold differs from previous solution of the initial value problem by exponentially decreasing addition. So singular perturbed initial value problem is reduced to regular perturbed initial value problem without determination of boundary layer additions.

[2]Kotenko Andrew Petrovich, Dept. of High Mathematics of Samara State Academy of Architecture and Civil Engineering