ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТИПА ЛАМЕ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Л.В.Воропаева[1]

В настоящей статье изучается краевая задача для эллиптической системы специального вида, когда область содержит точку, в которой решение имеет особенность. Поставленная задача связана с первой граничной задачей статики изотропной упругой среды, когда об'емная сила линейным образом зависит от перемещения, при наличии в рассматриваемой области сосредоточенного в точке источника тепла, источника электрического заряда и др.

1 Постановка задачи

Пусть $D \subset \mathbf{R}^3$ -область, ограниченная поверхностью S класса $C^{0,\alpha}$, $D_o \equiv D \setminus \xi$, $\xi = ||\xi_i||_{i=1,2,3}$, $\xi \in D$.

Ищется классическое решение граничной задачи для эллиптической системы

$$A(\partial_x)u(x) - Q(x)u(x) = F(x),\ x \in D_o, \tag{1.1}$$

где $A(\partial_x)\cdot \equiv \mu\,\Delta \cdot +(\lambda+\mu)\,grad\,div\,\cdot$ -оператор Ламе, λ, μ-постоянные Ламе, $Q(x) \equiv ||Q_{ij}(x)||_{3\times 3}$, $F(x) \equiv ||F_k(x)||_{k=1,2,3}$, $Q_{ij}(x), F_k(x)$-заданные, достаточно гладкие функции, $u(x) \equiv ||u_k(x)||_{k=1,2,3}$-неизвестный вектор,
удовлетворяющее условиям : $u \in C^{0,\beta}(D_o \bigcup S)$,

$$\forall x \in D_o:\ |u(x)| \le \frac{c}{|x-\xi|}, \tag{1.2}$$

$$Mu|_{x=\xi} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{B(\xi,\epsilon)} |x-\xi|u(x-\xi)\,dx \Bigg/ mes(B(\xi,\epsilon))\right) = b, \tag{1.3}$$

$$\lim_{x\to y} u(x) = f(y),\ x \in D_o, y \in S, \tag{1.4}$$

где $f(y) \equiv ||f_k||_{k=1,2,3}, c = const,\ b \equiv ||b_k||_{k=1,2,3}$-заданный вектор с постоянными коэффициентами, $B(x,\epsilon)$ -шар с центром в точке ξ радиуса ϵ.

[1]Воропаева Людмила Вячеславовна. Кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета.

2 О тензоре Грина первой граничной задачи для оператора $A(\partial_x)$

Определение. *Тензором Грина граничной задачи Дирихле для оператора* $A(\partial_x)$ *и конечной области* $D \subset \mathbf{R}^3$ *назовем матрицу* $G(x,\tilde{x}) \equiv ||G_{ij}(x,\tilde{x})||_{3\times 3}$, *которая удовлетворяет следующим условиям:*

1.$A(\partial_x)G(x,\tilde{x}) = 0, x \neq \tilde{x} \in D, \tilde{x}$ *-фиксированная точка;*

2.$\lim_{x\to y} G(x,\tilde{x}) = 0, y \in S, \tilde{x} \notin S;$

3.В области D *матрица* $G(x,\tilde{x})$ *представляется в виде*

$$G(x,\tilde{x}) = \Gamma(x-\tilde{x}) - g(x,\tilde{x}),$$

где матрица $g(x,\tilde{x})$*-регулярное в* D *решение системы* $A(\partial_x)u(x) = 0$ *(включая точку* $x = \tilde{x}$*), а* $\Gamma(x) \equiv ||\Gamma_{ij}(x)||_{3\times 3}$*-матрица фундаментальных решений оператора* $A(\partial_x)$ *(матрица Кельвина)*[1].

Из определения следует, что существование $G(x,\tilde{x})$ эквивалентно разрешимости следующей граничной задачи:

$$\forall x, \tilde{x} \in D: \; A(\partial_x)g(x,\tilde{x}) = 0,$$

$$\forall y \in S, \forall \tilde{x} \in D: \; \lim_{x\to y} g(x,\tilde{x}) = \Gamma(y-\tilde{x}).$$

Известно [2], что ее решение представляется в виде интеграла

$$g(x,\tilde{x}) = \int_S \Gamma(x-t)\phi(t,\tilde{x})\, d_tS, \; x,\tilde{x} \in D,$$

где неизвестная непрерывная матрица ϕ однозначно определяется из системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода со слабой особенностью:

$$-\phi(y,\tilde{x}) + \int_S N(\partial_y, n(y))\Gamma(y-t)\phi(t,\tilde{x})\, d_tS = N(\partial_y, n(y))\Gamma(y-\tilde{x}), \; y \in S, \tilde{x} \in D.$$

Здесь

$$N(\partial_x, n(x)) \cdot \equiv \frac{2\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu}\frac{\partial\cdot}{\partial n(x)} + \frac{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu} n(x) div \cdot + \frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}[n(x) \times rot\cdot]$$

$n(x) \equiv ||n_k(x)||_{k=1,2,3}$-некоторый единичный вектор в точке x (если $x \in S$, то n-единичный вектор внешней нормали) и имеют место оценки [2]:

$$|N(\partial_x, n(x))\Gamma(x-\xi)| \leq \frac{c^{"}}{|x-\xi|^{2-\alpha}},$$

$$|G(x,\tilde{x})| \leq \frac{c^{"}}{|x-\tilde{x}|}, \; \forall x, \tilde{x} \in D,$$

$$\left|\frac{\partial G(x,\tilde{x})}{\partial x_i}\right| \leq \frac{c^{"}}{|x-\tilde{x}|^2}, \; i = 1,2,3, \; \forall x, \tilde{x} \in D,$$

$c^{"}$- постоянные.

Тензор Грина оператора $A(\partial_x)$ дает возможность построить регулярное решение системы в области D без привлечения условий (1.2),(1.3), а также построить матрицу фундаментальных решений оператора $A(\partial_x) - Q(x)$.

Теорема 2.1. *Пусть матрица $Q(x)$, где $Q_{ij}(x) \in C^{0,\beta}(\overline{D})$, удовлетворяет условию $\eta^* Q\, \eta \geq 0, x \in D$, $\eta = ||\eta_i||_{i=1,2,3}$ -произвольный действительный вектор, тогда граничная задача*

$$A(\partial_x)v(x) - Q(x)v(x) = F(x),\ x \in D,$$

$$\lim_{x \to y} v(x) = \tilde{f}(y),\ x \in D, y \in S,$$

где $F(x) \in C(\overline{D})$, $\tilde{f}(y) \in C(S)$, всегда имеет единственное решение в классе $C^2(D) \bigcap C(\overline{D})$, которое дается формулой

$$v(x) = -\frac{1}{2} \int\limits_D G(x,y)\tau(y)\,dy - \frac{1}{2} \int\limits_S [T(\partial_y, n(y))G(y,x)]^* \tilde{f}(y)\,d_y S,\ x \in D, \qquad (2.1)$$

где $\tau(y)$ -решение системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода со слабой особенностью

$$-\tau(x) + \frac{Q(x)}{2} \int\limits_D G(x,y)\tau(y)\,dy = F(x) - \frac{Q(x)}{2} \int\limits_S [T(\partial_y, n(y))G(y,x)]^* \tilde{f}(y)\,d_y S,$$

$$T(\partial_x, n(x)) \cdot \equiv 2\mu \frac{\partial \cdot}{\partial n(x)} + \lambda n(x) div \cdot + \mu [n(x) \times rot \cdot],$$

которая разрешима для произвольной правой части.

Теорема доказана методом, используемым в [3].

3 Представление решения системы вблизи особой точки

Теорема 3.1. *Матрица фундаментальных решений оператора $A(\partial_x) - Q(x)$ представима в виде*

$$\Phi(x-y) = \Gamma(x-y) + \int\limits_{\tilde{D}} G(x,\zeta)\psi(\zeta)\,d\zeta, \qquad (3.1)$$

где $\Gamma(x-y)$-матрица Кельвина,$\tilde{D} \supset \overline{D}$-произвольная конечная область пространства $\mathbf{R}^3$,$G(x,\zeta)$-тензор Грина первой граничной задачи для оператора $A(\partial_x)$ для конечной области $\tilde{D}$, $\psi(\zeta)$-решение системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода со слабой особенностью

$$-2\psi(\zeta) - Q(x) \int\limits_{\tilde{D}} G(x,\zeta)\psi(\zeta)\,d\zeta = Q(x)\Gamma(x-y),\ x \in \tilde{D},$$

которая разрешима для произвольной правой части.

Доказательство подобного факта см. в [4].

Из последнего представления видно, что вектор ψ имеет особенность первого порядка в точке $x = y$, поэтому интегральное слагаемое в (3.1) ограничено вблизи особой точки. Следовательно, справедлива

Теорема 3.2.
$$M\left[\Phi(x-\xi)-\Gamma(x-\xi)\right]\big|_{x=\xi}=0 \tag{3.2}$$

Теорема 3.3. *Если матрица $Q(x)$, где $Q_{ij}(x)\in C^{0,\beta}(\overline{D})$, удовлетворяет условию $\eta^*Q\,\eta\geq 0, x\in D$, $\eta=\|\eta_i\|_{i=1,2,3}$ -произвольный действительный вектор и $Q_{ij}(x)=Q_{ji}(x)$, то решение граничной задачи в классе $C^{0,\beta}(D_o\bigcup S)\bigcap C^2(D_o)$ представимо в виде*
$$u(x)=v(x)+\sum_{j=1}^{3}a_j\Phi^j(x-\xi), \tag{3.3}$$
где $a_i=const, v(x)$ -классическое решение системы в области D, пердставимое в виде (2.1) $/,\Phi^j$ *-столбцы фундаментальной матрицы оператора $A(\partial_x)-Q(x)$.*

В [5] аналогичная теорема доказана для однородного эллиптического оператора с постоянными коэффициентами. В доказательстве используется разложение фундаментальной матрицы эллиптического оператора в многомерный ряд Тейлора. Метод доказательства без существенных изменений переносится на случай системы (1.1). Оценки для производных фундаментальной матрицы системы (1.1) аналогичны оценкам тензора Грина первой граничной задачи для оператора $A(\partial_x)$, так как главной частью фундаментальной матрицы является матрица Кельвина.

4 Решение краевой задачи

Подставим вектор u, представленный в виде (3.3), в краевое условие (1.3). Учитывая (3.1) и (3.2), получим
$$Mu|_{x=\xi}=Mv|_{x=\xi}+\sum_{j=1}^{3}a_j\Gamma^j=b$$

Так как v-ограниченная функция в точке $x=\xi$, то $Mv|_{\xi=0}=0$. Используя представление матрицы Кельвина
$$\Gamma_{ij}(x)=\lambda^*\delta_{ij}|x|^{-1}+\mu^*x_ix_j|x|^{-3},$$
$\lambda^*=(\lambda+3\mu)[4\pi\mu(\lambda+2\mu)]^{-1}$, $\mu^*=(\lambda+\mu)[4\pi\mu(\lambda+2\mu)]^{-1}$, получим линейную систему для определения постоянных a_j.
$$\sum_{j=1}^{3}a_j\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{B(\xi,\epsilon)}|x-\xi|\Gamma^j(x-\xi)\,dx\Big/ mes(B(\xi,\epsilon))\right)=b, \tag{4.1}$$
где
$mes(B(\xi,\epsilon))=\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$,
$\int\limits_{B(\xi,\epsilon)}|x-\xi|\Gamma_{ij}(x-\xi)\,dx=\lambda^*mes(B(\xi,\epsilon))\delta_{ij}+\mu^*\delta_{ij}\int\limits_{B(\xi,\epsilon)}(x_k-\xi_k)^2|x-\xi|^{-2}\,dx=\frac{4}{9}\pi\epsilon^3(\mu^*+3\lambda^*)\delta_{ij}$.

Из (4.1) при $\varepsilon\to 0$, находим $a_j=b_j/(\lambda^*+\mu^*/3)$ Теперь для v получаем классическую задачу Дирихле
$$(A(\partial_x)-Q)v(x)=F(x),\ x\in D,$$

$$\lim_{x\to y} v(x) = f(y) - \sum_{i=1}^{3} a_j \Phi^j (y-\xi) = \tilde{f}(y),\ y \in S$$

причем для v точка $y = \xi$ является регулярной точкой. Теорема единственности справедлива ввиду положительной определенности и симметричности матрицы Q. Решение ее ,согласно теореме 2.1,записывается в виде (2.1). Хотя Φ^j имеют особенность в точке $x = \xi$, но для $x \in S$ $\tilde{f} \in C(S)$,т.е. удовлетворяет условию теоремы 2.1.

Литература

[1] Купрадзе В.Д. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.

[2] Бурчуладзе Т.В.,Рухадзе Р.В. О тензорах Грина в теории упругости // Дифференциальные уравнениям. 1974. Т.X. N 10.

[3] Бурчуладзе Т.В. Тензоры Грина и их некоторые применения // Труды Грузинского политехнического института. 1963. N 8(93).

[4] Бурчуладзе Т.В. Некоторые граничные задачи для одного класса эллиптических систем высшего порядка // Труды Тбилисского математического института АН Грузинской ССР. 1967. Т.XXXII.

[5] Бучукури Т.В.,Гегелиа Т.Г. Качественные свойства решений основных уравнений теории упругости вблизи особых точек // Труды Тбилисского математического института АН Грузинской ССР. 1988. Т. 90.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LAME SYSTEM OF ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUENTIONS WITH INTERNAL POINT SOURSE

L.V. Voropaeva[2]

The paper is concerned the elliptic boundary value problem of the special type whin the domain contains the singular point. The problem formulated is relevant for the particular case of the linear dependence of the force from the elastic displacement.(The existens of the sources and unit charges are also considered).

[2]Voropaeva Ludmila Vjacheslavovna, Dept. of Math. Physics Samara State University