

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-го ПОРЯДКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЯЗЫКА REDUCE И ГРАФИЧЕСКОГО ПАКЕТА GNUPLOT

Л.М.Беркович, И.С.Фролов¹

В настоящей работе используются возможности языка REDUCE и графического пакета GNUPLOT для представления решений линейных дифференциальных уравнений. Процедура поиска решений в аналитическом виде основана на программе SOLDE [1,2], а для вывода графиков полученных решений применяется созданная авторами программа DEPLOT.

1 Введение

Известно, что система компьютерной алгебры REDUCE (язык REDUCE) [3] позволяет получать решения дифференциальных уравнений в аналитической форме (не считая численных возможностей), но не дает графического представления решений. Тем не менее в языке REDUCE предусмотрен (через FORTRAN и другие средства) выход на численные и иные методы решения посредством использования других программных систем и пакетов.

Следует отметить, что помимо REDUCE, существуют и другие системы компьютерной алгебры, применяемые при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Среди них можно назвать такие системы, как MATHEMATICA [4] и MAPLE [5], получившие широкое распространение у пользователей компьютеров IBM. В этих пакетах имеются и возможности графического вывода.

Тем не менее для системы REDUCE накоплена большая библиотека программ, расширяющих ее возможности. В частности, для решения обыкновенных линейных (однородных и неоднородных) дифференциальных уравнений применяется программа SOLDE [1,2]. Для графического представления решений дифференциальных уравнений был создан специальный пакет GNUPLOT [6].

В настоящей работе представляется созданная авторами программа DEPLOT, позволяющая аналитическую форму решения без промежуточных этапов представить графически на экране дисплея и на принтере, что весьма важно для использования в учебном процессе, а также для научно-исследовательской работы и инженерных расчетов.

¹Беркович Лев Мейлихович, Фролов Илья Сергеевич. Кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета

Данная программа написана на языке Turbo Prolog и использует в процессе работы механизм системных вызовов для подключения системы REDUCE и программы SOLDE (для решения дифференциальных уравнений), а затем — пакета GNUPLOT (для построения графиков решений, правых частей уравнений и прочих функций — на экране дисплея и на принтере).

2 Применение программы SOLDE

Программа SOLDE позволяет находить общие решения линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$Ly \equiv a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad (1)$$

где коэффициенты a_2, a_1, a_0 и правая часть $f(x)$ принадлежат некоторому основному дифференциальному полю $k(x)$ над алгебраически замкнутым числовым полем k характеристики 0 и могут быть весьма произвольными дифференцируемыми функциями, содержащими, возможно, параметры. Используемый алгоритм основан на совместном использовании методов факторизации и преобразований дифференциальных уравнений [7].

Уравнению (1) соответствует однородное уравнение

$$Ly \equiv a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) преобразованием Куммера–Лиувилля (КЛ)

$$y = v(x)z, \quad dt = u(x)dx, \quad u, v \in C^2(I), \quad uv \neq 0, \quad \forall x \in I, \quad I = \{x | a < x < b\} \quad (3)$$

приводится к автономному виду (к уравнению с постоянными коэффициентами)

$$\ddot{z} + b_1\dot{z} + b_0z = 0. \quad (4)$$

При этом уравнение (2) допускает факторизацию

$$(D - \alpha_2)(D - \alpha_1)y = 0, \quad (5)$$

или

$$\left(D - \frac{v'}{v} - \frac{u'}{u} - r_2u\right)\left(D - \frac{v'}{v} - r_1u\right)y = 0, \quad (6)$$

где r_1, r_2 суть корни характеристического уравнения

$$r^2 + b_1r + b_0 = 0. \quad (7)$$

”Корням” (коэффициентам) факторизации α_1, α_2 в силу связи между ядром $u(x)$ и множителем $v(x)$ преобразования КЛ

$$v(x) = |u|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \int a_1 dx + \frac{1}{2} b_1 \int u dx\right) \quad (8)$$

можно придать следующие значения

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \frac{u'}{u} - \frac{1}{2} a_1 + \frac{\sqrt{\delta}}{2} u, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \frac{u'}{u} - \frac{1}{2} a_1 - \frac{\sqrt{\delta}}{2} u, \quad (9)$$

где $\delta = b_1^2 - 4b_0$ — дискриминант характеристического уравнения (7).

Когда известна факторизация уравнения (2), то ф.с.р. можно представить в виде

$$y_{1,2} = u^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \int a_1 dx \pm \frac{\sqrt{\delta}}{2} \int u dx\right), \quad \delta \neq 0; \quad (10)$$

$$y_1 = |u|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \int a_1 dx\right), \quad y_2 = y_1 \int u dx, \quad \delta = 0. \quad (11)$$

При известной ф.с.р. (10) или (11) находится и частное решение y_0 уравнения (1).

Основные характеристики программы следующие:

INPUT:	a_2, a_1, a_0, f	коэффициенты заданного уравнения
OUTPUT:	$u, v,$	поиск функций преобразования КЛ
	$b_1, b_0,$	коэффициенты редуцированного уравнения
	$\alpha_1, \alpha_2,$	нахождение факторизации
	$y_1, y_2,$	фундаментальная система решений
	y_0	частное решение неоднородного уравнения

В программе SOLDE используются следующие процедуры:

SOLDE	(a_2, a_1, a_0, f)	решает уравнение и выдает SUMMARY;
VERFAC	(α_1)	проверяет заданную факторизацию и если она верна, выдает SUMMARY;
VERSOL	(y_1)	аналогично для решений;
VERTRANS	(u, v)	проверка преобразования и если она верна, выдает SUMMARY
TEST	y_0	проверка решения
SUMMARY	$()$	выдает полную информацию о текущем уравнении, включая само уравнение

3 Применение программы DEPLOT

Программа DEPLOT для общения с исследователем (а именно для задания уравнения, функций, значений параметров и т.д., модификации аналитического вида решения, представления результатов) предлагает диалоговый интерфейс. Экран дисплея разбивается на ряд окон, каждое из которых предназначается для определенных целей. Информация, однажды введенная в некоторое окно, сохраняется в нем не только в течение текущего сеанса работы, но и на последующие сеансы (пока она не изменена), что дает возможность работать, например, с одним уравнением, меняя лишь параметры.

Первое из окон — окно меню, позволяющее выбрать определенный вид работы. Имеются следующие возможности:

- задание функции;
- задание границ выводимого участка графика;
- задание значений параметров;
- построение графика;
- построение трехмерного графика (для автомобильных решений);
- вывод графика на принтер;
- связь с REDUCE.

Следующее окно предназначается для задания команд системе REDUCE. В нем возможно задать последовательность команд, а, возможно, целую программу, выполняемую системой REDUCE. Для решения дифференциальных уравнений указы-

ваются команды загрузки пакета SOLDE и затем — вызова процедур (одной или нескольких) из этого пакета, например:

`in "solde"; solde(a2,a1,a0,0);` — для решения однородного уравнения.

Третье окно содержит аналитическую форму функций, графики которых должны быть построены. В результате работы пакета SOLDE в это окно попадают следующие функции:

f — правая часть уравнения;

y_1, y_2 — фундаментальная система решений;

y_0 — частное решение неоднородного уравнения;

$y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2$ — общее решение с произвольными константами c_1 и c_2 .

Функции могут быть модифицированы перед выводом на график, например, если в их составе имеется мнимая единица.

Остальные окна предназначены для задания значений параметров и границ изменения переменных.

Аналитические решения могут иметь в своем составе параметры, поэтому для графического представления необходимо задать их значения. Параметры могут входить как в коэффициенты уравнения, так и в правые части. Произвольные константы решения также трактуются как параметры.

Задание границ изменения переменных позволяет выводить определенный участок графика решения в том или ином масштабе.

Возможен одновременный вывод сразу нескольких графиков (при этом из-за потери наглядности нецелесообразно выводить более 8 графиков).

Копия графика может быть выведена на принтер. Необходима лишь предварительная настройка на тип используемого принтера — матричный, струйный или лазерный. Возможна запись в файл представления графика либо в битовой форме, предназначенной для последующей распечатки, либо в виде команд `TeX`'а или `Postscript`'а.

В настоящее время данная система имеет одно ограничение: графическое представление выдается, если решения выражаются в конечном виде через элементарные функции.

Ниже приводятся примеры выдачи результатов программами SOLDE и DEPLOT.

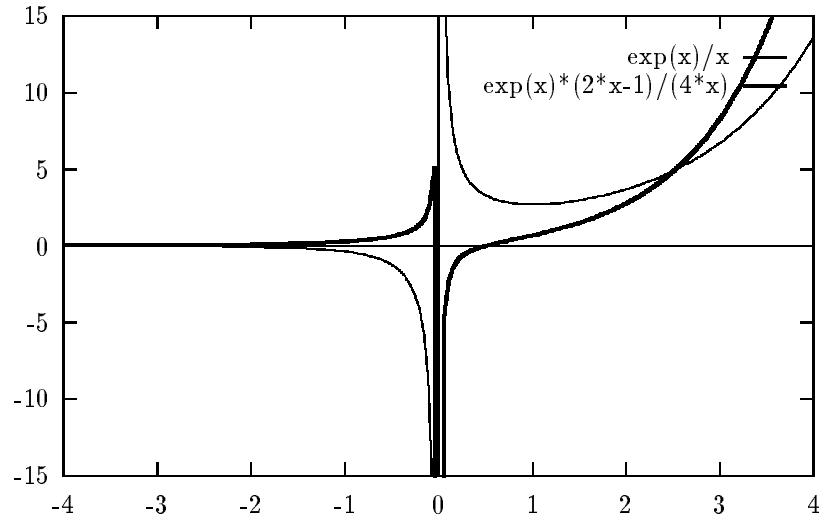
4 Примеры

Пример 1. `solde(1, 2/x, -1, ex/x);` т.е. дано уравнение

$$y'' + \frac{2}{x}y' - y = \frac{e^x}{x}.$$

Соответствующее однородное уравнение преобразованием $y = \frac{1}{x}z$, $dt = dx$ приводится к уравнению с постоянными коэффициентами $\ddot{z} - z = 0$, допускает факторизацию $(D + 1/x + 1)(D + 1/x - 1)y = 0$ и имеет ф.с.р. $y_1 = x^{-1}e^x$, $y_2 = x^{-1}e^{-x}$. Неоднородное уравнение допускает частное решение

$$y_0 = \frac{e^x(2x - 1)}{4x}.$$



Пример 2. $\text{solde}(1, 0, 3/16/x^2 - b/x, 0)$; Уравнение

$$y'' + \left(\frac{3}{16x^2} - \frac{b}{x}\right)y = 0$$

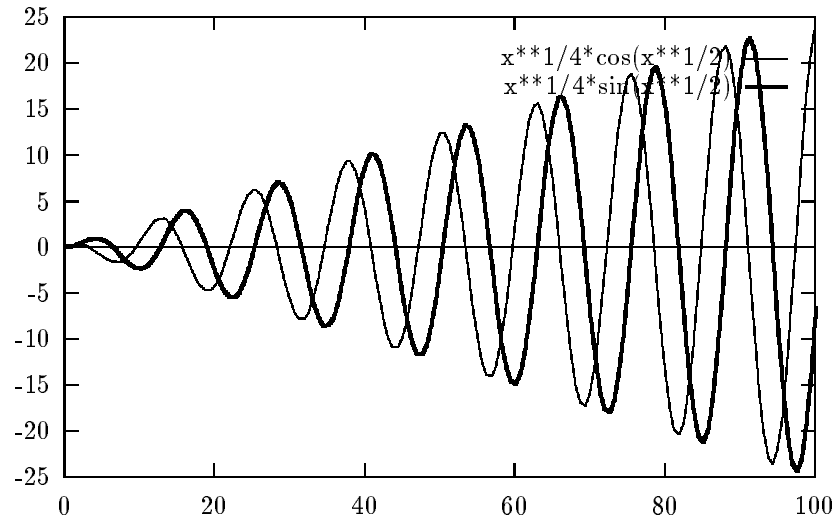
преобразованием

$$y = x^{1/4}z, \quad dt = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

приводится к виду $\ddot{z} - bz = 0$, допускает факторизацию

$$\left(D + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4x}\right) \left(D - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4x}\right) y = 0$$

и имеет ф.с.р. $y_1 = x^{1/4} \cos(2\sqrt{-bx})$, $y_2 = x^{1/4} \sin(2\sqrt{-bx})$. Пусть $b = -\frac{1}{4}$, $x \in (0, 100]$.



Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грант 96-01-01997.

Литература

- [1] L.M.Berkovich, F.L.Berkovich, SOLDE: REDUCE Package for solving of second order linear ordinary differential equations. *Modern Group Analysis and Problems of mathematical modelling*, Russian Colloquium, Samara, 7–11 June 1993, 38–45.
- [2] L.M.Berkovich, F.L.Berkovich, Transformation and Factorization of second order linear ordinary differential equations and its implementation in REDUCE, *Univ. Beogradu, Publ. Elektrotechn. Fak. Ser. Mat.*, 1995. **6**. 41–44.
- [3] A.C.Hearn, REDUCE User's Manual, Version 3.5, The RAND Corporation, Santa Monica: RAND PUBLICATION, CP78 (1995).
- [4] S. Wolfram, Mathematica: A system for doing Mathematics by Computer, Addison-Wesley, 1991.
- [5] C. Gomes, and B. Salvy, and P. Zimmerman, Calcul formel: mode d'emploi. Exemples en Maple, Masson, 1995.
- [6] Thomas Williams, Colin Kelley. GNUPLOT, 1990.
- [7] Л.М. Беркович, Факторизация и преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений. Саратов: изд-во Саратов. ун-та, 1989. С. 192.

REPRESENTATION OF THE SECOND ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS SOLUTIONS USING THE LANGUAGE REDUCE AND GRAPHIC PACKAGE GNUPLOT

L.M.Berkovich, I.S.Frolov²

This paper uses the abilities of the language REDUCE and the graphic package GNUPLOT for the representation of solutions of the second order linear differential equations. The procedure of searching solutions in the analitic form uses the package SOLDE [1,2], and the graphic output of the found solutions uses the program DEPLOTT created by authors.

²Berkovich L.M., Frolov I.S. Dept. of Mechanics and Mathematics, Samara State University