БИРАЦИОНАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АРИФМЕТИКА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП, I

В.Е.Воскресенский[1]

Это первая статья из предполагаемой серии работ по бирациональной геометрии линейных алгебраических групп и ее приложениям. Статья содержит необходимые сведения из теории схем и когомологий, а также ряд результатов, как известных, так и новых, из области алгебраических торов.

Содержание

[1] Воскресенский Валентин Евгеньевич. Кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета

ПРЕДИСЛОВИЕ

С конца шестидесятых годов нашего века началось успешное применение методов бирациональной геометрии в теории линейных алгебраических групп, в частности, в вопросах арифметики этих групп. К настоящему времени накопилось огромное количество фактического материала. Автор намерен систематизировать его и обстоятельно изложить в серии статей , не всегда с полными доказательствами, но с достаточными пояснениями. Поскольку имеются скудные сведения о многообразиях над незамкнутым полем, то в первых параграфах будут достаточно подробно освещены необходимые понятия из теории схем и когомологий Галуа.

Общий план серии: формы и когомологии Галуа, группы Пикара и Брауэра многообразия, бирациональная геометрия алгебраических торов, арифметика алгебраических групп, числа Тамагавы, R-эквивалентность, проективные торические многообразия, инварианты конечных групп преобразований, индекс-формулы.

Эти сведения должны значительно дополнить информацию, содержащуюся в книге автора "Алгебраические торы" 1977 года.

Что касается терминологии и обозначений, то они достаточно стандартные. В частности, $\mathbf{Z}$ - кольцо целых рациональных чисел, $\mathbf{Q}$ - поле рациональных, $\mathbf{R}$ - поле вещественных, $\mathbf{C}$ - поле комплексных чисел. Все кольца имеют единицу, A^* - группа обратимых элементов кольца A. Символ $[X]$ означает мощность множества X, $(L:F)$ - степень расширения L/F, $(G:H)$ – индекс подгруппы H в группе G. Под алгебраическим многообразием над полем k понимается, как правило, геометрически неприводимая приведенная отделимая схема X конечного типа над полем k, $k[X]$ - кольцо регулярных функций, $k(X)$ - поле рациональных функций на X.

Глава I. ФОРМЫ И КОГОМОЛОГИИ ГАЛУА

Пусть k - незамкнутое поле, k_s - его сепарабельное замыкание, $\mathcal{G} = Gal\,(k_s/k)$ - группа Галуа расширения k_s/k. Если X - алгебраическое многообразие, определенное над полем k, то мы имеем объект, содержащий в себе богатейшую информацию - это многообразие $\overline{X} = X \otimes_k k_s$ вместе с действием группы $\mathcal{G}$ на $\overline{X}$ через второй множитель. Во многих случаях строение k_s-многообразия $\overline{X}$ нам хорошо известно, что позволяет достаточно эффективно изучать структуру возникающих $\mathcal{G}$-модулей, ассоциированных с $\mathcal{G}$-пространством $\overline{X}$. А это, в конечном итоге, дает возможность получать иногда существенную информацию о самом многообразии X. В данной главе достаточно полно описаны важнейшие $\mathcal{G}$-структуры, определяемые многообразием $\overline{X}$. От читателя требуется знание основ теории схем, необходимые напоминания будут приведены, обстоятельное изложение теории схем и категорий можно найти в работах Демазюра и Гротендика [1],Мамфорда [1], Шафаревича [1], Гельфанда и Манина [1].

§1. ГРУППОВЫЕ СХЕМЫ И ИХ КОГОМОЛОГИИ

1.1. Групповые объекты в категории. Одним из простейших и в то же время важнейших алгебраических понятий является понятие группы. Структура группы на множестве G задается отображением

$$f : G \times G \to G,$$

которое удовлетворяет известным условиям.Если на множестве G задана дополнительная структура, например, топологическая, то также просто формулируется определение топологической группы - нужно потребовать только, чтобы отображения f и $x \to x^{-1}$ были непрерывными. Аналогично определяется аналитическая группа. Казалось бы, таким же образом следует определять и групповые структуры на алгебраических многообразиях. В самом деле, в случае алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль данный путь оправдан и приводит к теории, во многом подобной теории групп Ли. Однако сразу же было замечено, что распространение этой теории на случай положительной характеристики возможно только с досадными ограничениями. Возникли также технические затруднения при рассмотрении групповых структур на алгебраических многообразиях над незамкнутыми полями или кольцами.Правильное определение, позволяющее охватить несравненно более широкий класс объектов, дала теория схем Гротендика.Используя понятие представимого функтора, можно дать определение групповой структуры на схеме (и даже на объекте в любой категории) формально почти такое же простое, как и определение группы в алгебре. Возникшая таким образом теория групповых объектов весьма богата по содержанию и уже имеет на своем счету ряд первоклассных результатов.

Рассмотрим сначала несколько примеров, указывающих путь к определению групповой структуры на объектах произвольной категории.

Пример 1. Пусть *Top* - категория топологических пространств и G - топологическая группа. Для любого топологического пространства X пусть $G(X)$ будет множеством всех непрерывных отображений пространства X в G, снабженным строением группы по правилу

$$(f \circ g)(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in X; \quad f, g \in G(X)$$

Если $Y \to X$ - непрерывное отображение пространств, то естественное отображение $G(X) \to G(Y)$ является групповым гомоморфизмом. Легко видеть, что соответствие $X \rightsquigarrow G(X)$ определяет контравариантный функтор h_G на категории *Top* со значениями в категории абстрактных групп. Заметим теперь, что функтор h_G восстанавливает на G исходную структуру топологической группы. Чтобы это увидеть, возьмем группу $G(G \times G)$ всех непрерывных отображений произведения $G \times G$ в G. Пусть p_1 и p_2 - первая и вторая проекции произведения $G \times G$ на G соответственно. Ясно, что $p_1, p_2 \in G(G \times G)$. Положим $m = p_1 \circ p_2$, где $p_1 \circ p_2$ - произведение в группе $G(G \times G)$. Имеем непрерывное отображение

$$m : G \times G \to G$$

причем $m(g_1, g_2) = g_1 g_2$ по построению. Далее, так как $G(G)$- группа, то обозначим через i обратный элемент в $G(G)$ для тождественного отображения $\varepsilon : G \to G$. Таким образом, $i : G \to G$ есть непрерывное отображение и $i(g) = g^{-1}$ для любого $g \in G$.

Заметим еще, что единица группы G определяет последовательность отображений (сечение)

$$E \to G \to E,$$

где E есть единичная группа - конечный объект категории Top.

Пример 2. Пусть $\mathcal{C}$ - некоторая категория и $\mathcal{F}$ - контравариантный функтор на $\mathcal{C}$ со значениями в категории множеств. Будем называть $\mathcal{F}$ *предпучком групп* на $\mathcal{C}$, если для всех Y из $\mathcal{C}$ множества $\mathcal{F}(Y)$ снабжены групповой структурой так, что для всякого морфизма $f : X \to Y$ индуцированное отображение $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ является групповым гомоморфизмом. Если $\mathcal{F}$ и G -два предпучка групп на $\mathcal{C}$, то назовем гомоморфизмом предпучка $\mathcal{F}$ в G всякий морфизм $u : \mathcal{F} \to G$ такой, что для каждого Y из $\mathcal{C}$ отображение множеств $u(Y) : \mathcal{F}(Y) \to G(Y)$ является гомоморфизмом групп.

Данное определение позволяет ввести понятие *группового объекта* в самой категории $\mathcal{C}$. Пусть X - объект категории $\mathcal{C}$. Определим контравариантный функтор h_X на категории $\mathcal{C}$ со значениями в категории множеств, полагая

$$h_X(Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

и каждому морфизму $g : Y \to Z$ ставим в соответствие отображение множеств

$$h_X(g) : h_X(Z) \to h_X(Y), \qquad h_X(g)(f) = f \circ g, \qquad f : Z \to X$$

Функтор h_X играет весьма важную роль благодаря следующему обстоятельству. Пусть $\mathcal{F}$ произвольный контравариантный функтор (предпучок) на категории $\mathcal{C}$ со значениями в категории множеств. Он называется *представимым*, если он изоморфен функтору вида h_X для некоторого объекта X категории $\mathcal{C}$. В теории категорий показывается, что, если функтор $\mathcal{F}$ представим, то представляющий его объект определен однозначно с точностью до изоморфизма. Более точно, соответствие $X \to h_X$ определяет эквивалентность категории $\mathcal{C}$ с полной подкатегорией предпучков на $\mathcal{C}$ со значениями в категории множеств. Отсюда ряд важных конструкций. Во-первых, замена X на h_X позволяет переносить на произвольную категорию определения обычных теоретико-множественных конструкций, например, понятия группы. Далее, среди предпучков на $\mathcal{C}$ могут существовать естественные функторы, которые в конце концов представимы некоторым объектом. Это обычно дает весьма нетривиальную информацию. Все это несколько напоминает применение теории производящих функций к исследованию последовательностей, получаемых с помощью какого-либо естественного процесса. В третьих, объект X определяет бесконечное семейство множеств $h_X(Y)$, что позволяет получать различную информацию об объекте X , используя теоретико - множественные конструкции, например, вычисляя когомологии или изучая вещественные, комплексные или иные структуры.

Определение. Объект X категории $\mathcal{C}$ называется групповым объектом или просто группой в $\mathcal{C}$, если функтор h_X есть предпучок групп на $\mathcal{C}$.

Если X_1 и X_2 являются группами в $\mathcal{C}$, то морфизм $X_1 \to X_2$ называется гомоморфизмом групп, если индуцированное отображение пучков $h_{X_1} \to h_{X_2}$ является гомоморфизмом.

Пример 3. Пусть теперь категория $\mathcal{C}$ обладает конечным объектом E и наряду с объектами X и Y категория $\mathcal{C}$ содержит и произведение $X \times Y$. В этом случае определение групповой структуры на объекте X, данное в примере 2, можно записать только в терминах самого объекта X, игнорируя остальные объекты категории. Путь к такому определению указан в примере 1. Пусть p_1 и p_2 -первая и вторая

проекции $X \times X \to X$. Тогда p_1 и p_2 лежат в группе $h_X(X \times X)$, следовательно, определен морфизм $m = p_1 p_2 : X \times X \to X$.

Далее, в группе $X(X)$ есть тождественный морфизм 1. Обратный к нему в смысле группового закона обозначим через i . В группе $X(E)$ есть единичный элемент, обозначим его $e : E \to X$. Пусть $q : X \to E$ - так называемый структурный морфизм на конечный объект категории и $(m, 1)$, $(1, m)$ - два морфизма $X \times X \times X \to X \times X$. Морфизмы m, i, e удовлетворяют следующим условиям:

а) $m \circ (m, 1) = m \circ (1, m)$ - ассоциативность;

б) $m \circ (e \circ q, 1) = m \circ (1, e \circ q) = 1$ - свойство единицы;

в) $m \circ (i, 1) = m \circ (1, i) = e \circ q$ - свойство обратного элемента

Оказывается, что и обратно, морфизмы m, i, e со свойствами а), б), в) вполне определяют пучок групп h_X .

1.2. Групповые схемы. Пусть теперь $Sch\,/S$ -категория S-схем Гротендика. В этой категории имеется конечный объект - это схема S. Для любой схемы X над S имеется структурный морфизм $q : X \to S$. Далее, для любых двух S-схем X и Y имеется произведение $X \times_S Y$.Поэтому групповая структура на S-схеме G состоит в задании трех морфизмов

$$\begin{aligned} m: &\quad G \times_S G \to G, \\ i: &\quad G \to G, \\ e: &\quad S \to G, \end{aligned}$$

удовлетворяющих аксиомам а), б), в). Эти морфизмы определяют групповое строение на каждом множестве $G(X)$, где X есть S-схема. Заметим, что морфизмы m, i, e не определяют структуру группы на самом топологическом пространстве G, ибо топология произведения $G \times_S G$ не совпадает с произведением топологий сомножителей.

Напомним теперь некоторые факты из области схем. Говоря о схеме X, не нужно забывать, что это сокращенное обозначение пары (X, O_X), где X – топологическое пространство, а O_X – пучок колец на X специального вида, а именно, любая точка $x \in X$ имеет такую окрестность U,что пара (U, O_U) изоморфна аффинной схеме $Spec\, A$. Здесь O_U – ограничение пучка O_X на U, $A = \Gamma(U, O_U)$ – кольцо сечений пучка O_X над U, $Spec\, A$ – пространство простых идеалов кольца A. Термин "X есть S-схема" означает, что задан морфизм схем $X \to S$. Пусть G– групповая схема над S и T – некоторая S-схема. Рассмотрим $G_T = G \times_S T$ как T-схему. Для любой T-схемы Y имеем тождество

$$G_T(Y) = Hom_T(Y, G \times_S T) = Hom_S(Y, G) = G(Y),$$

которое показывает, что G_T обладает групповой структурой в категории T-схем. Группа G_T представляет тот же функтор, что и S-группа G, но ограниченный на категорию T-схем. Схема G_T называется схемой, полученной из G *заменой базы.*

Пример 4. Пусть $q : G \to S$ – структурный морфизм, $x \in S$. Тогда каждый слой

$$G_x = G \times_S Spec\, k(x)$$

является группой над полем вычетов $k(x)$ точки x.

1.3. **Аффинные группы,алгебры Хопфа**. Пусть R – комутативное кольцо с единицей, $S = Spec\, R$. Групповая S-схема G называется *аффинной* S-группой или R-группой, если $G = Spec\, A$, где A есть R-алгебра. Аффинную R-группу G можно также определить как групповой объект в категории аффинных R-схем. Категория аффинных R-схем дуальна категории коммутативных R-алгебр. Поэтому групповая структура аффинной R-группы $G = Spec\, A$ полностью описывается в терминах

ее кольца A. Мы видели, что групповая структура на G состоит из трех морфизмов m, e, i, удовлетворяющих аксиомам а), б), в). Этим морфизмам соответствуют следующие гомоморфизмы R-алгебр

$$\begin{array}{lll} m^* : A & \to A \otimes_R A & (\textit{коумножение}), \\ e^* : A & \to R & (\textit{коединица}), \\ i^* : A & \to A & (\textit{кообращение}), \end{array}$$

которые удовлетворяют соответствующим аксиомам, полученным из а),б),в) по двойственности. Алгебра A с операциями m^*, e^*, i^* , удовлетворяющими этим трем аксиомам, называется *алгеброй Хопфа* . Вопросы классификации аффиных R-групп и R-алгебр Хопфа равносильны.

Пример 5. Аддитивная группа G_a. Пусть G_a – ковариантный функтор на категории коммутативных колец с 1, определяемый условиями $G_a(B) = B$, где B справа рассматривается как аддитивная группа. Этот функтор представим схемой $Spec\, Z[T]$,где $Z[T]$ – кольцо многочленов от одной переменной T, ибо

$$Hom_{ring}(Z[T], B) = B$$

для любого B. Итак $G_a = Spec\, Z[T]$. Выясним, как выглядят групповые операции. Имеем $m = p_1 \circ p_2$, где p_i-проекция $G_a \times G_a$ на соответствующий множитель. На языке колец

$$m^* : Z[T] \to Z[T] \otimes Z[T], \quad m^* = p_1^* \circ p_2^*, \quad p_1^*(T) = T \otimes 1, \quad p_2^*(T) = 1 \otimes T$$

Групповая операция m^* определяется сложением в группе

$$G_a(Z[T] \otimes Z[T]) = Z[T] \otimes Z[T]$$

Отсюда

$$\begin{array}{lll} m^*(T) & = & T \otimes 1 + 1 \otimes T, \\ e^*(T) & = & -T, \\ i^*(T) & = & 0. \end{array}$$

Если R – коммутативное кольцо с 1, то схему $G_a \times Spec\, R$ будем обозначать $G_a \otimes R$ или еще короче $G_{a,R}$. Группа $G_{a,R} = Spec\, R[T]$ представляет функтор G_a, ограниченный на категорию R-алгебр. Группа $G_{a,R}$ имеет естественное матричное представление

$$G_a(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in B \right\}$$

Пример 6. Мультипликативная группа G_m. Пусть $G_m(B) = B^*$,где B^* – мультипликативная группа обратимых элементов кольца B. Функтор G_m представим аффинной схемой $Spec\, Z[T, T^{-1}]$, ибо $Hom_{ring}(Z[T, T^{-1}], B) = B^*$. Когрупповые операции :

$$\begin{array}{lll} m^*(T) & = & T \otimes T, \\ e^*(T) & = & T^{-1}, \\ i^*(T) & = & 1. \end{array}$$

Аффинная группа G_m называется *мультипликативной группой*. Имеем матричное представление

$$G_m(B) = \left\{ \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \mid b \in B^* \right\}$$

Пример 7. Полная линейная группа GL_n. Рассмотрим предпучок групп $GL_n(X) = GL(n, \Gamma(X, O_X))$, где справа – группа обратимых матриц порядка n. Этот функтор представим аффинной схемой

$$GL_n = Spec\, Z[T_{11}, ..., T_{nn}, D^{-1}], \quad D = \det(T_{ij}),$$

$$m^*(T_{ij}) = \sum T_{ik} \otimes T_{kj}, \quad e^*(T_{ij}) = \delta_{ij}, i^*(T_{ij}) = (-1)^{i+j} D^{-1} \det(T_{rs}), \quad r \neq i, \quad s \neq j.$$

Пусть G есть S-группа, H – подсхема схемы G, H называется групповой подсхемой или подгруппой группы G, если для любой S-схемы T множество $H(T)$ является подгруппой группы $G(T)$. Если $H(T)$ – нормальный делитель группы $G(T)$ для всех T, то H называется нормальным делителем S-группы G.

Пример 8. Пусть $f : G \to G'$ – гомоморфизм S-групп. Если T – произвольная S-схема, то положим

$$K(T) = Ker\,[G(T) \to G'(T)]$$

Функтор $T \to K(T)$ является предпучком групп на категории S-схем. Нетрудно увидеть, что функтор K представим S-схемой $G \times_{G'} S$, которая является S-подгруппой группы G и называется ядром гомоморфизма

$$f : G \to G'$$

В произведении $G \times_{G'} S$ морфизмом $S \to G'$ является единичное сечение.

Пример 9. Если G и G' – две S-группы, то произведение $G \times_S G'$ снабжается естественной структурой S-группы

$$(G \times_S G')(T) = G(T) \times G'(T)$$

.

Пример 10 . Пусть $e : S \to G$ – единичное сечение, $\varphi : G \times_S G \to G$ – морфизм, который на точках имеет вид $\varphi(u, v) = uv^{-1}$, их расслоенное произведение $S \times_G (G \times_S G)$ изоморфно G. Имеем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Delta} & G \times_S G \\ \downarrow q & & \downarrow \varphi \\ S & \xrightarrow{e} & G, \end{array}$$

в котором верхняя стрелка есть диагональное отображение Δ. Поэтому S-группа G отделима тогда и только тогда, когда единичное сечение $e : S \to G$ является замкнутым погружением. В частности, всякая групповая схема над полем является отделимой.

Пример 11. Постоянные группы. Напомним, что для произвольного семейства схем X_i определена их сумма $\coprod X_i$. Это снова схема, топологическое пространство которой есть несвязное объединение пространств X_i, а структурный пучок является прямой суммой соответствующих пучков. Для любой схемы Y имеется функторная биекция

$$Hom(\coprod X_i, Y) \simeq \prod Hom(X_i, Y) \tag{1}$$

По другому, сумма $\coprod X_i$ представляет ковариантный функтор $Y \to \prod Hom(X_i, Y)$. Если все схемы X_i являются S-схемами, то сумма этих схем также снабжается строением S-схемы. В случае аффинных схем $X_i = Spec\, A_i$ и *конечной* суммы имеем явное представление

$$X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_n = Spec\,(A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n).$$

Пусть теперь E – произвольное множество и S – некоторая схема. Обозначим через E_S сумму схем $E_S = \sqcup S_i, i \in E$, где $S_i = S$ для всех i. Биекция (1) показывает,что $Hom_S(E_S, Y)$ можно отождествить с множеством всех функций на E со значениями в $Y(S)$. Функтор $E \rightsquigarrow E_S$ из категории множеств в категорию S-схем обладает следующими свойствами:

1)$(E \times F)_S = E_S \times_S F_S$,

2) если T есть S-схема, то $(E_S)_T = E_T$. В частности, $E_S = (E_Z)_S$.

Схемы вида E_S называются постоянными S-схемами. Найдем X-точки схемы E_S. Пусть сначала X – связная S-схема. Тогда $E_S(X) = Hom_S(X, E_S) = E$, ибо всякий морфизм $f : X \to E_S$ для связной схемы X сводится к S-морфизму $X \to S$, совпадающему со структурным морфизмом. Поэтому различных морфизмов во множестве $E_S(X)$ столько, сколько элементов в E. Этот результат и объясняет название "постоянная схема". Если же X – произвольная схема, то всякий морфизм $X \to E_S$ постоянен на связной компоненте X_α и значением на X_α может служить номер i компоненты S_i такой, что $f : X_\alpha \to S_i$. Таким образом, $E_S(X)$ есть множество всех функций, локально постоянных на X со значениями в E. Если теперь G – абстрактная группа, то $G_S(X)$ обладает естественным групповым строением и мы видим, что G_S является групповой схемой, которая называется постоянной S-группой. В конечном виде групповой закон в группе G_S можно задать следующим образом. Пусть $G \times G \to G$ – закон умножения в абстрактной группе G. Тогда имеем морфизм S-схем $(G \times G)_S \to G_S$, кроме того $(G \times G)_S = G_S \times_S G_S$. Следовательно, морфизм $G_S \times_S G_S \to G_S$ является законом умножения в S-группе G_S. Аналогично получаем единицу и обращение. Рассмотрим отдельно случай конечной группы G. Пусть $S = Spec\,Z, A = \oplus Z_g$ – прямая сумма абелевых групп, $g \in G, Z_g = Z$, с таблицей умножения

$$e_g e_h = \begin{cases} 0, & если \quad g \neq h \\ e_g, & если \quad g = h \end{cases}$$

Тогда $G_Z = Spec\,A$.

1.4. Групповые схемы над полем, алгебраические группы. В дальнейшем нас будут интересовать в основном группы в категории k-схем, где k – поле. Наиболее изученными в этой категории являются так называемые *алгебраические* группы, т.е., групповые k-схемы, гладкие и конечного типа над полем k. Отбрасывая условие гладкости, получаем более широкую категорию групповых схем конечного типа над полем k. Эта категория даже предпочтительнее категории алгебраических групп, так как всякая подгруппа алгебраической группы хотя и имеет конечный тип, но не всегда является гладкой.

Пример 12. Пусть $G_{m,k} = Spec\,k[T, T^{-1}]$ – мультипликативная k-группа. Отображение $g \to g^n$ определяет групповой гомоморфизм $f : G_{m,k} \to G_{m,k}$. Ядро этого гомоморфизма представляет функтор $A \to \mu_n(A)$, где $\mu_n(A) = \{a \in A \mid a^n = 1\}$, а A есть k-алгебра. Поэтому $\mu_{n,k} = Spec\,k[T]/(T^n - 1)$.

Группа $\mu_{n,k}$ является конечной групповой схемой. Если характеристика p поля k не делит n, то $\mu_{n,k}$ – гладкая k-группа и,следовательно, алгебраическая; если же p делит n, то группа $\mu_{n,k}$ не является приведенной. Заметим еще, что в случае, когда поле k содержит все корни n-й степени из единицы и $(p, n) = 1$, то группа $\mu_{n,k}$ постоянна над k.

Имеет место следующий замечательный факт.

Теорема Картье. Любая групповая схема конечного типа над полем характеристики нуль является гладкой, т.е., является алгебраической.△

Остановимся вкратце на вопросах классификации k-групп.

Пусть $GL_{n,k} = GL_n \otimes_Z k$ – полная линейная группа над полем k. Подгруппа G группы $GL_{n,k}$ называется *линейной группой*, определенной над полем k. Оказывается, что линейными группами исчерпываются любые аффинные групповые схемы конечного типа над полем k. Это установлено в работах Розенлихта и Шевалле. Заметим, что при таком определении линейной группы в ее кольце вполне могут быть нильпотентные элементы.По теореме Картье это может случиться только в случае поля k характеристики $p > 0$. Очень важный класс алгебраических групп составляют связные k-группы, многообразия которых проективны над k. Оказывается, закон умножения в таких группах всегда коммутативен. Проективные k-группы носят название абелевых многообразий. В данном обзоре мы не будем касаться абелевых многообразий, они не допускают нетривиальных гомоморфизмов в группу $GL_{n,k}$, для их изучения требуется совершенно другая техника. Детальное изучение строения абелевых многообразий проведено в книге Мамфорда [1].

Более подробно на строении линейных групп мы остановимся в §3, где будет рассмотрена теория k-форм.

1.5. Морфизм Фробениуса. Мы будем следовать весьма общему определению морфизма Фробениуса, имеющемуся в книге Демазюра и Гротендика [1]. Пусть S – схема над простым конечным полем F_p, p – простое число. Рассмотрим эндоморфизм f F_p-схемы S, индуцирующий тождественное отображение на топологическом пространстве S и переводящий локальное сечение s пучка O_S в s^p. Если X есть S-схема со структурным морфизмом $q : X \to S$, то имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow q & & \downarrow q \\ S & \xrightarrow{f} & S, \end{array}$$

которая позволяет построить расслоенное произведение $S \times_{f,q} X = F(X/S)$ и S-морфизм $F : X \to F(X/S)$, который и называется *морфизмом Фробениуса* схемы X относительно S. Эндоморфизм f F_p-схемы называют абсолютным эндоморфизмом Фробениуса. Из коммутативной диаграммы имеем соотношение : $f = pr_2 \circ F$.

Поскольку морфизм Фробениуса у нас встретится только в категории аффинных схем, переформулируем вышеприведенное определение на языке k-алгебр. Пусть k – поле характеристики $p > 0$. Отображение $a \to a^p$ определяет гомоморфизм поля k в себя, что позволяет наделить произвольную коммутативную k-алгебру A новой k-структурой, определенной по правилу

$$(a, x) \to a^p x, \quad a \in k, \quad x \in A.$$

Обозначим эту новую k-алгебру символом $F(A)$. Имеем соотношение $FA = Fk \otimes_k A$. Если $X = Spec\, A$, то определим FX по правилу $FX = Spec\,(FA)$. Морфизм $F : X \to FX$ определяется гомоморфизмом k-алгебр $FA \to A$ по правилу $a \otimes x \mapsto ax^p$. Можно ввести также итерации $F^n : X \to F^n X$. Если поле L есть расширение поля k, то справедливо соотношение $F(X_L) = (FX)_L$. Проверим это для аффинных схем $X = Spec\, A$. В самом деле

$$F(A \otimes_k L) = Fk \otimes_k (A \otimes_k L) = (Fk \otimes_k A) \otimes_k L = FA \otimes_k L.$$

Поскольку в простом поле F_p справедливо равенство $a^p = a$, то для любой F_p-схемы X схема FX изоморфна X. Предыдущая формула показывает, что для схем X над F_p выполняется соотношение $F(X_k) \cong X_k$ и морфизм Фробениуса F действует тождественно на топологическом пространстве X_k и переводит каждое сечение $s \in \Gamma(U, O_X)$ в s^p, где U – произвольное открытое подмножество в X_k.

Далее, гомоморфизм $Fk \to k$ является изоморфизмом, поэтому $F(X \times_k Y) = FX \times_k FY$ для k-схем X и Y.

Если $u : X \to Y$ – морфизм k-схем, имеем естественный морфизм $F(u) : FX \to FY$, причем диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ FX & \xrightarrow{F(u)} & FY \end{array}$$

коммутативна.

Ясно, если G есть k-группа, то FG снова k-группа и морфизм $F : G \to FG$ является групповым гомоморфизмом.

Рассмотрим более детально строение k-схемы FX, где $X = Spec\, A$. Пусть $B = A^{\otimes p}$ – тензорная степень алгебры A, C – подалгебра симметрических тензоров. Обозначим через N оператор симметризации

$$N(a_1 \otimes ... \otimes a_p) = \sum a_{i_1} \otimes ... \otimes a_{i_p},$$

где сумма взята по всем перестановкам множества $\{1, ..., p\}$. Если $b \in B$, $c \in C$, то $N(cb) = cN(b)$. Это показывает, что $N(B)$ является идеалом в алгебре C. Рассмотрим гомоморфизм $u^* : B \to A$, определяемый отображением $a_1 \otimes ... \otimes a_p \to a_1 ... a_p$. Так как

$$u^*(N(a_1 \otimes ... \otimes a_p)) = p! a_1 ... a_p = 0,$$

то имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{i^*} & C/N(B) \\ \downarrow j^* & & \downarrow v^* \\ B & \xrightarrow{u^*} & A, \end{array}$$

где j^* – вложение, i^* – естественная проекция, v^* – гомоморфизм, определяемый композицией $u^* j^*$. Заметим теперь, что тензоры вида $a \otimes ... \otimes a$, где $a \in A$, порождают $C/N(B)$ как k-алгебру.

Отображение $a \otimes \alpha \to a \otimes ... \otimes a\alpha$ устанавливает эпиморфизм $FA \to C/N(B)$, который, как нетрудно видеть, является изоморфизмом. Таким образом, имеем двойственную коммутативную диаграмму морфизмов

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & X^p \\ \downarrow v & & \downarrow j \\ FX & \xrightarrow{i} & Y^p, \end{array}$$

где i – замкнутое вложение, j – естественный морфизм произведения X^p на симметрическое произведение Y^p, u – диагональный морфизм. Так как $u^*(j^*(a \otimes ... \otimes a)) = a^p$, то $v = F$.

Пусть теперь G – коммутативная k-группа. Операция умножения в G определяет морфизм $m : G^p \to G$, такой, что $m(t_1, ..., t_p) = t_1 \circ .. \circ t_p$ на геометрических точках.

Так как группа G коммутативна, то морфизм m пропускается через симметрическую степень Y^p таким образом, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} G & \stackrel{u}{\longrightarrow} & G^p & \stackrel{m}{\longrightarrow} & G \\ \downarrow F & & \downarrow & & \| \\ FG & \stackrel{i}{\longrightarrow} & Y^p & \stackrel{r}{\longrightarrow} & G, \end{array}$$

коммутативна. Обозначим через V морфизм $FG \to G$, полученный композицией i и r.

Аккуратные конструкции, приведенные выше, сразу показывают, что функтор V обладает замечательными свойствами, а именно, если $\alpha : H \to G$ – гомоморфизм групп, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} FH & \stackrel{F(\alpha)}{\longrightarrow} & FG \\ \downarrow V & & \downarrow V \\ H & \stackrel{\alpha}{\longrightarrow} & G, \end{array}$$

коммутативна, функтор V коммутирует с произведением коммутативных групп; морфизм $V : FG \to G$ является групповым гомоморфизмом, наконец, $V \circ F = \mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ означает возведение в p-ю степень в группе G.

Пример 13. Пусть $G = G_{m,k} = G_{m,Z} \otimes k$. Тогда $F(G_{m,k}) = G_{m,k}$. Морфизм F совпадает с эндоморфизмом $\mathbf{p}$, морфизм V является тождественным.

Пример 14. Пусть $G = G_{a,k} = G_{a,Z} \otimes k$, $F(G_{a,k}) = G_{a,k}$. Морфизм Фробениуса F действует на $G_(T) = \Gamma(T, O_T)$, отображая t в t^p; ядро $\alpha_{p,k}$ морфизма F есть предпучок групп, сопоставляющий каждой k-схеме T группу

$$\alpha_{p,k}(T) = \{t \in \Gamma(T, O_T) \mid t^p = 0\}$$

Функтор $\alpha_{p,k}$ представим аффинной схемой $k[x]/(x^p)$, где $k[x]$ – кольцо многочленов от одной переменной. Морфизм V равен 0 , ибо p-кратная сумма в группе G_a равна 0.

1.6. Диагональные группы. Пусть M – коммутативная абстрактная группа с мультипликативным умножением, $Z[M]$ – групповое кольцо,$D(M) = Spec\, Z[M]$. Для любого коммутативного кольца R с единицей имеем

$$D(M)(R) = Hom_{ring}(Z[M], R) = Hom_{gr}(M, R^*)$$

по определению группового кольца. Мы видим, что множество $D(M)(R)$ обладает строением коммутативной группы и групповая структура функториальна по R. Таким образом, схема $D(M)$ является коммутативной групповой схемой. Группа $D(M)$ называется *диагональной* группой.

Замечание. В конструкции группового кольца $Z[M]$ существенно, что в M операция записывается мультипликативно. С другой стороны, аддитивная запись для коммутативных групп чрезвычайно удобна и привычна. Поэтому в некоторых безвыходных ситуациях типа $Z[Z]$ будем употреблять изоморфизм $e : M \to e(M)$ перехода от аддитивной записи к мультипликативной. Элемент $e(m)$, $m \in M$, обычно записывается в показательной форме:

$$e(m) = e^m, \quad e^{m+m'} = e^m e^{m'}, \quad e^0 = 1.$$

Если $\sigma \in Aut\,(M)$, то определим действие оператора σ на $e(M)$ по правилу $\sigma(e^m) = e^{\sigma m}$. Тогда σ будет и операторным изоморфизмом.

Запишем групповые операции в группе $D(M)$ на языке колец. Пусть p_1 и p_2 – первая и вторая проекции произведения $D(M) \times D(M)$. Тогда p_1 и p_2 лежат в группе $D(M)(D(M) \times D(M))$, следовательно, определен морфизм $m = p_1 p_2$, где справа произведение в группе

$$D(M)(D(M) \times D(M) = Hom_{ring}(Z[M], Z[M] \otimes Z[M]).$$

Дуальное произведение $m^* = {p_1}^* {p_2}^*$ легко вычисляется. Гомоморфизмы колец ${p_i}^* : Z[M] \to Z[M] \otimes Z[M]$ имеют вид:

$${p_1}^*(g) = g \otimes 1, \quad {p_2}^*(g) = 1 \otimes g, \quad g \in M,$$

откуда $m^*(g) = g \otimes g$. Коединица $e^* : Z[M] \to Z$ определяется правилом $e^*(g) = 1$, кообращение i^* – стандартное: $i^*(g) = g^{-1}$.

Пусть $f : M \to N$ – гомоморфизм абелевых групп, он продолжается до гомоморфизма групповых колец $f : Z[M] \to Z[M]$ и, следовательно, гомоморфизм f определяет морфизм схем $D(f) : D(N) \to D(M)$, который, как легко видеть, является групповым гомоморфизмом. Таким образом, соответствие $M \to D(M)$ есть контравариантный функтор из категории абелевых групп в категорию групповых аффинных схем. Очевидно, что $D(M \times N) = D(M) \times D(N)$.

Пример 15. Мультипликативная группа G_m примера 6 есть частный случай диагональной группы, $G_m = D(Z)$, где группу Z следует рассматривать в мультипликативной записи с образующим элементом t. Если $M \cong Z^n$, то $D(M) = D(Z^n) = G_m^n$.

Пример 16. Естественный мономорфизм колец $Z[t] \to Z[t, t^{-1}]$ определяет морфизм схем $G_m \to A^1$, причем, это открытое вложение. Сверх того, группа $G_m(R) = R^*$ действует на $A^1(R) = R$ умножениями, что определяет морфизм схем $G_m \times A^1 \to A^1$. На языке колец это действие определяется диагональным гомоморфизмом колец

$$Z[t] \to Z[t, t^{-1}] \otimes Z[t].$$

Переходя к произведениям, видим, что группа G_m^n естественно действует на A^n, так может быть истолкован гомоморфизм колец

$$Z[t_1, ..., t_n] \to Z[t_1, .., t_n, t_1^{-1}, .., t_n^{-1}].$$

Пример 17. Пусть Z/nZ – циклическая группа порядка n.Тогда $D(Z/nZ)$ есть не что иное как групповая схема μ_n примера 12. Поскольку всякая конечная абелева группа A есть прямая сумма циклических групп, то группа $D(A)$ есть произведение групповых схем вида μ_n. Далее, пусть M – абелева группа с конечным числом образующих. Известно, что M есть прямая сумма $Z^d \oplus A$, где A – конечная группа. Поэтому $D(M) = G_m^d \times D(A)$.

1.7. Характеры групповых схем. Пусть G – произвольная групповая схема, рассмотрим коммутативную группу

$$\widehat{G}(S) = Hom_{S-gr}(G_S, G_{m,S}),$$

которую будем называть *группой S-характеров группы G*. Для всякого морфизма $u : T \to S$ имеем гомоморфизм групп $\widehat{G}(u) : \widehat{G}(S) \to \widehat{G}(T)$. Получаем контравариантный функтор $\widehat{G}$ из категории групповых схем в категорию коммутативных абстрактных групп – пучок характеров группы G. Ограничение функтора $\widehat{G}$ на категорию S-групп обозначим через $\widehat{G}_S$. Пусть $f : G_1 \to G_2$ – гомоморфизм групповых схем. Ясно,

что мы имеем однозначно определенный гомоморфизм коммутативных абстрактных групп

$$\hat{f} : \widehat{G_2}(S) \to \widehat{G_1}(S)$$

т.е. $\hat{f}$ есть гомоморфизм пучков характеров $\widehat{G_2} \to \widehat{G_1}$. Заметим также, что

$$(\widehat{G_1 \times G_2})(S) = \widehat{G_1}(S) \times \widehat{G_2}(S).$$

Пример 18. Изучим пучок характеров $\widehat{D(M)}$ диагональной группы. Пусть $S = Spec\, R$ и $u \in \widehat{D(M)}(S)$, т.е. u есть гомоморфизм $u : D_R(M) \to G_{m,R}$ групповых схем. Обозначим через u^* соответствующий гомоморфизм R-алгебр

$$u^* : R[t, t^{-1}] \to R[M].$$

Поскольку u – групповой гомоморфизм, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R[t,t^{-1}] & \xrightarrow{u^*} & R[M] \\ \downarrow m^* & & \downarrow m_1^* \\ R[t,t^{-1}] \otimes R[t,t^{-1}] & \xrightarrow{(u^*,u^*)} & R[M] \otimes_R R[M] \end{array}$$

коммутативна. Гомоморфизм u^* вполне определяется значением $u^*(t) = \sum r_g g$, $r_g \in R$. Из коммутативности диаграммы следует, что $r_g^2 = r_g$, $r_g r_h = 0$, если $g \neq h$. Далее, единица переходит в единицу, т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R[t,t^{-1}] & \xrightarrow{u^*} & R[M] \\ \searrow e^* & & \swarrow e_1^* \\ & R & \end{array}$$

коммутативна. Отсюда $1 = e^*(t) = e_1^* u^*(t) = \sum r_g$. Выпишем конечную систему $r_1, .., r_m$ ненулевых коэффициентов элемента $u^*(t)$. Это конечная система идемпотентов кольца R.Такая система определяет прямое разложение кольца R, что, в свою очередь, индуцирует разбиение пространства $S = Spec\, R$ на открытые подмножества S_i. Элемент $u^*(t) = \sum_{i=1}^m r_i g_i$, однозначно определяет функцию на S, принимающую на S_i значение $g_i \in M$.

Обратно, пусть $f : S \to M$ – произвольная локально постоянная функция. Тогда $S = \bigcup S_g, g \in M,$, где $S_g = f^{-1}(g)$ (S_g может быть и пустым). Из квазикомпактности пространства S следует, что разбиение S на подмножества S_g конечно и , следовательно, определяется некоторой конечной системой идемпотентов

$$r_1, .., r_m, \quad \sum_{i=1}^m r_i = 1, \quad S = \bigcup_{i=1}^m S_{g_i}$$

Элемент $\sum_{i=1}^m r_i g_i$ обратим в $R[M]$ и отображение $t \to \sum r_i g_i$ определяет гомоморфизм групповых схем

$$D_R(M) \to G_{m,R}$$

Таким образом, имеем биекцию множеств $\widehat{D(M)}(S)$ и $M_Z(S)$, где M_Z – постоянная групповая схема. Легко видеть, что данная биекция является групповым изоморфизмом. Понятно, что все эти расчеты справедливы и в относительном случае, т.е. для

схемы $D_S(M)$. Таким образом, пучок характеров $\widehat{D_S(M)}$ диагональной S-группы представим постоянной групповой схемой M_S, $\widehat{D_S(M)} \cong M_S$.

Пример 19. Пусть M_S – постоянная групповая S-схема. Напомним, что для любой S-схемы X имеем биекцию

$Hom_S(M_S, X) = \{$множество всех функций на M со значениями в $X(S)\}$.

Если G есть S-группа, то можно рассмотреть множество $Hom_{S-gr}(M_S, G)$, являющееся подмножеством в $Hom_S(M_S, G)$. Пусть $f \in Hom_{S-gr}(M_S, G)$. Это означает, что коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_S \times_S M_S & \xrightarrow{(f,f)} & G \times_S G \\ \downarrow m & & \downarrow m \\ M_S & \xrightarrow{f} & G, \end{array}$$

где m означает групповое умножение. Истолковывая f как функцию на M со значениями в $G(S)$, мы видим из диаграммы, что $f(a)f(b) = f(ab)$ для всех $a, b \in M$. Таким образом,

$$Hom_{S-gr}(M_S, G) = Hom_{gr}(M, G(S)).$$

Пусть теперь $G = G_{m,S}$. Тогда

$$\widehat{M_S}(T) = Hom_{T-gr}(M_T, G) = Hom_{gr}(M, G(T)).$$

для любой S-схемы T. С другой стороны,

$$D_S(M)(T) = Hom_{gr}(M, G_m(T)).$$

Итак, пучок характеров постоянной групповой S-схемы M_S представим диагональной групповой схемой $D_S(M)$: $\widehat{M_S} \cong D_S(M)$.

1.8. Бихарактеры. Пусть G и H – две групповые схемы и $Hom_{bim}(G \times H, G_m)$ состоит из таких морфизмов $f \in Hom(G \times H, G_m)$, что для любой схемы S отображение групп $f(S) : G(S) \times H(S) \to G_m(S)$ *бимультипликативно*. Морфизмы из $Hom(G \times H, G_m)$ можно перемножать как функции со значениями в группе, произведение бимультипликативных функций бимультипликативно.

Пусть $T \to S$ – произвольный морфизм схем, $f \in Hom_{bim}(G \times H, G_m)$. Рассмотрим отображения

$$G(T) \times H(S) \to G(T) \times H(T) \xrightarrow{f(T)} G_m(T)$$

Всякий элемент $h \in H(S)$ определяет гомоморфизм групп $G(T) \to G_m(T)$ функторно по T. Таким образом, элемент h определяет гомоморфизм групповых схем $G_S \to G_{m,S}$, т.е. элемент группы $\widehat{G}(S)$. Далее, отображение $H(S) \to \hat{G}(S)$ является групповым гомоморфизмом, функторным по S. В результате, отображению f поставлен в соответствие вполне определенный элемент $u(f)$ группы $Hom\, gr(H, \hat{G})$, причем $u(f_1 f_2) = u(f_1)u(f_2)$. Итак, имеем естественный гомоморфизм

$$u : Hom_{bim}(G \times H, G_m) \to Hom_{gr}(H, \hat{G}) \tag{1}$$

Покажем, что u есть изоморфизм. Пусть $r \in Hom_{gr}(H, \hat{G})$. Тогда для любой схемы S имеем гомоморфизм групп

$$r(S) : H(S) \to \hat{G}(S) = Hom_{S-gr}(G_S, G_{m,S})$$

Положим $f(S)(h,g) = [r(S)(h)](g)$, где $h \in H(S), g \in G(S)$. Тогда $f(S)$ есть бимультипликативное отображение $G(S) \times H(S) \to G_m(S)$, определяющее морфизм $f : Hom_{bim}(G \times H, G_m)$. Ясно, что построенные отображения взаимно обратны, таким образом, гомоморфизм (1) является изоморфизмом. Соотношение (1) остается справедливым и в категории S-групп, ибо в рассуждениях ничего менять не надо. Левая часть формулы (1) симметрична относительно G и H, поэтому имеем изоморфизм

$$Hom_{S-gr}(G, \hat{H}) \cong Hom_{S-gr}(H, \hat{G}) \tag{2}$$

Воспользуемся примерами 18 и 19. Пусть $G = D_S(M), H = \widehat{D_S(N)} = N_S$. Тогда формула (2) принимает вид

$$Hom_{S-gr}(D_S(M), D_S(N)) \cong Hom_{S-gr}(N_S, M_S) \tag{3}$$

Рассмотрим более подробно предпучок $\mathcal{F}$ на категории S-схем со значениями в категории коммутативных групп, определяемый по правилу $\mathcal{F}(T) = Hom_{T-gr}(N_T, M_T)$, для любой S-схемы T. Пусть $Hom_{gr}(N,M)_S$ – постоянная групповая S-схема. Группа $(Hom_{gr}(N,M)_S)(T)$ есть группа локально постоянных функций на топологическом пространстве T со значениями в группе $Hom_{gr}(N,M)$. Всякую такую функцию можно представить как отображение $f : T \times N \to M$, мультипликативное по второму множителю. Для каждого фиксированного $n \in N$, функция $t \to f(t,n)$ есть элемент множества $M_T(T)$, таким образом, отображение f есть элемент группы

$$Hom_{gr}(N, M_T(T)) = Hom_{T-gr}(N_T, M_T) = \mathcal{F}(T).$$

Итак, имеем канонический мономорфизм пучков

$$Hom_{gr}(N,M)_S \to \mathcal{F} \tag{4}$$

Пусть теперь группа N имеет конечное число образующих с базой $n_1, \ldots, n_k$. Выберем $h \in \mathcal{F}(T) = Hom_{gr}(N, M_T(T))$, пусть $h(n_i) = f_i \in M_T(T)$. Положим $g(t, n_i) = f_i(t)$. Если $n = \sum_{i=1}^k a_i n_i$, то полагаем $g(t,n) = \sum_{i=1}^k a_i g(t, n_i) = \sum_{i=1}^k a_i f_i(t)$. Ясно, что $g(t, n+n') = g(t,n) + g(t,n')$ и при постоянном n функция $g(t,n)$ будет лежать в $N_T(T)$. Отображение $h \to g$ определяет гомоморфизм $\mathcal{F}(T) \to Hom_{gr}(N,M)_S(T)$. Легко видеть, что этот гомоморфизм пучков $\mathcal{F} \to Hom_{gr}(N,M)_S$ и гомоморфизм (4) взаимно обратны. Таким образом,предпучок групп $\mathcal{F}$ представим S-схемой $Hom_{gr}(N,M)_S$, если группа N конечного типа. Вернемся теперь к изоморфизму (3) при условии, что группа N имеет конечный тип, а схема S – связна. Тогда $Hom_{S-gr}(N_S, M_S) = \mathcal{F}(S) = Hom_{gr}(N,M)_S(S) = Hom_{gr}(N,M)$ и мы имеем следующее утверждение:

Теорема. Пусть S – связная схема и N – коммутативная группа конечного типа, тогда имеем групповой изоморфизм

$$Hom_{S-gr}(D_S(M), D_S(N)) \quad \cong \quad Hom_{gr}(N,M). \ \triangle$$

В частности,

$$Aut_{S-gr}(D_S(N)) \quad \cong \quad Aut_{gr}(N).$$

Следствие. Если S – связная схема, то

$$Aut_{S-gr}(D_S(N)) \ \cong \ Aut_{gr} D_S(Z^n) \ \cong \ GL(n,Z),$$
$$Hom_{S-gr}(G^n_{m,S}, G_{m,S}) \ \cong \ Hom_{gr}(Z, Z^n) \ \cong \ Z^n.$$

1.9. Точность функтора D. Пусть B является A-алгеброй и $\varphi : A \to B$ – канонический гомоморфизм, кольца A и B коммутативны с единицами. Напомним, что A-модуль M называется *плоским*,если функтор $\mathcal{F}_M : N \to N \otimes_A M$ является точным на категории A-модулей. Далее, B называется *строго плоской* A-алгеброй, если выполняется одно из двух эквивалентных условий:

а) $\varphi : A \to B$ есть вложение и A-модуль $B/\varphi(A)$ является плоским;

б) B есть плоский A-модуль и отображение $\varphi^* : Spec\, B \to Spec\, A$ сюръективно.

Морфизм $Spec\, B \to Spec\, A$ называется строго плоским, если B является строго плоской A-алгеброй. Строго плоские морфизмы обладают рядом приятных свойств, которые мы будем подчеркивать в нужных местах.

Пусть $u : M \to N$ мономорфизм абстрактных групп, тогда имеем вложение $R[M] \to R[N]$ групповых колец и $R[N]$ как $R[M]$-модуль является свободным с базой, образованной представителями смежных классов N/M. Это показывает, что $R[N]$ есть строго плоская $R[M]$-алгебра и, следовательно, морфизм $u^* : D_R(N) \to D_R(M)$ является строго плоским. Обратно, если $R[N]$ – строго плоская $R[M]$-алгебра, то гомоморфизм $R[M] \to R[N]$ инъективен, поэтому гомоморфизм $u : M \to N$ является мономорфизмом. Пусть теперь $u : M \to N$ – эпиморфизм групп, тогда $R[M] \to R[N]$ – эпиморфизм колец и, следовательно, u^* есть замкнутое вложение. Обратно, пусть u^* есть мономорфизм. Тогда $Hom_{gr}(N, T^*) \to Hom_{gr}(M, T^*)$ есть мономорфизм для любой R-алгебры T.Рассмотрим точную последовательность абелевых групп $0 \to u(M) \to N \to N/u(M) \to 0$.Из точности слева функтора Hom и нашего предположения следует, что $Hom_{gr}(N/u(M), T^*) = 0$ для всех T. Если взять в качестве T групповое кольцо $R[N/u(M)]$, то ясно, что $N = u(M)$. Попутно нами установлено, что условия $D_R(M) = E$ и $M = 0$ равносильны.

Определение. Последовательность S-групп

$$1 \to G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \to 1 \tag{1}$$

назовем точной, если гомоморфизм α есть замкнутое вложение, отождествляющее G' с ядром гомоморфизма β, а гомоморфизм β является сторого плоским.

Группу G'' называют фактор-группой группы G по подгруппе G' и обозначают G/G'. Вопрос о существовании фактора т.е. вопрос о дополнении замкнутого мономорфизма $G' \to G$ до точной последовательности (1) является весьма деликатным для общих схем S. Для диагональных групп частичный ответ дают вышеприведенные рассуждения, из которых следует, что из точной последовательности абелевых групп

$$0 \to M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \to 0$$

следует точность последовательности соответствующих диагональных групп

$$1 \to D_R(M'') \longrightarrow D_R(M) \longrightarrow D_R(M') \to 1.$$

Пусть теперь схема $S = Spec\, R$ связна, а M и N – абелевы группы конечного типа. Тогда, как мы видели в п.1.6., всякий гомоморфизм R-групп

$$D_R(N) \quad \to \quad D_R(M)$$

определяется единственным гомоморфизмом групп. Далее, точная последовательность R-групп

$$1 \to D_R(M'') \longrightarrow D_R(M) \longrightarrow D_R(M') \to 1$$

определяет точную последовательность групп

$$0 \to M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \to 0$$

Таким образом, в категории диагонализируемых R-групп конечного типа над связной схемой $S = Spec\, R$ для всякого гомоморфизма

$$u : D_R(N) \quad \to \quad D_R(M)$$

имеется ядро и коядро, причем группы $D_R(N)/Ker\,(u)$ и $Im(u)$ изоморфны. Иначе говоря, эта категория является абелевой, двойственной категории абелевых групп с конечным числом образующих. Двойственность устанавливается соответствием

$$M \quad \longrightarrow \quad D_R(M)$$

или обратным для него

$$D_R(M) \quad \longrightarrow \quad \widehat{D_R(M)}(R) = M.$$

Пример 20. Построение фактор-группы в категории диагонализируемых R-групп. Пусть $u^* : D_R(N) \to D_R(M)$ – мономорфизм R-групп, он определяется вполне определенным эпиморфизмом $u : M \to N$. Пусть $H = Ker\,(u)$. Тогда $D_R(M)/D_R(N) = D_R(H)$.

Замечание. Существование фактор-групп доказано к настоящему времени в гораздо более общей ситуации: например, в категории всех k-групп конечного типа, в категории алгебраических групп, в категории аффинных алгебраических групп. Подробности в фундаментальном труде Демазюра и Гротендика [1].

Пример 21. Пусть k – поле характеристики $p > 0$ и $G = D_k(M)$. Поскольку $G = D_Z(M) \otimes k$, то $FG = G$ и морфизм Фробениуса F действует по правилу $x \to x^p$ на геометрических точках, а морфизм V является тождественным.

1.10. Когомологии Галуа. Пусть Π – конечная группа, A – некоторый Π-модуль, тогда определены группы гомологий $H_n(\Pi, A)$ и когомологий $H^n(\Pi, A)$, Картан и Эйленберг [1]. Для любой точной последовательности Π-модулей

$$0 \quad \to A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \to \quad 0$$

возникают точные последовательности гомологий и когомологий

$$.. \to H_{n+1}(\Pi, A'') \to H_n(\Pi, A') \to H_n(\Pi, A) \to H_n(\Pi, A'') \to ..$$

$$.. \to H^{n-1}(\Pi, A'') \to H^n(\Pi, A') \to H^n(\Pi, A) \to H^n(\Pi, A'') \to ..$$

Символ A^{Π} означает подмножество элементов в A, инвариантных относительно действия группы Π. В групповом кольце $Z[\Pi]$ пусть $N = \sum \sigma, \quad \sigma \in \Pi$, а I – ядро пополняющего гомоморфизма $\varepsilon : Z[\Pi] \to Z$, переводящего каждый элемент $\sigma \in \Pi$ в 1. Ядро ε порождается элементами вида $\sigma - 1, \quad \sigma \in \Pi$. Модуль $A/IA = Z \otimes_{\Pi} A$ обозначим через A_{Π}, пусть NA и A_N – образ и ядро норменного отображения $N : A \to A$. Если Γ является подгруппой группы Π, то имеется естественный гомоморфизм ограничения

$$res : H^q(\Pi, A) \quad \to \quad H^q(\Gamma, A),$$

если же Γ нормальная подгруппа, то существует гомоморфизм

$$inf : H^q(\Pi/\Gamma, A^{\Gamma}) \quad \to \quad H^q(\Pi, A),$$

называемый инфляцией. В этом случае точна последовательность Хохшильда-Серра

$$0 \to H^1(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \to H^1(\Pi, A) \to H^1(\Gamma, A)^{\Pi/\Gamma} \to H^2(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \to H^2(\Pi, A).$$

Ее обобщение. Если $H^q(\Gamma, A) = 0$ при $1 \leq q \leq n-1$, то последовательность

$$0 \to H^n\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \to H^n(\Pi, A) \to H^n(\Gamma, A)^{\Pi/\Gamma} \to H^{n+1}(\Pi/\Gamma, A^\Gamma) \to H^{n+1}(\Pi, A)$$

точна. Дж.Тейт предложил срастить точные последовательности гомологий и когомологий в одну когомологическую последовательность следующим образом. Он вводит следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{H}^n(\Pi, A) &= H^n(\Pi, A) \quad \textit{для} \quad n \geq 1, \\ \hat{H}^0(\Pi, A) &= A^\Pi/NA, \\ \hat{H}^{-1}(\Pi, A) &= A_\Pi/A_N, \\ \hat{H}^{-n}(\Pi, A) &= H_{n-1}(\Pi, A), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Тогда имеем точную последовательность, бесконечную в обе стороны

$$.. \to \hat{H}^{n-1}(\Pi, A'') \to \hat{H}^n(\Pi, A') \to \hat{H}^n(\Pi, A) \to \hat{H}^n(\Pi, A'') \to ..$$

Естественным источником и образцом для построения теории когомологий групп явились, не в последнюю очередь, так называемые когомологии Галуа. Пусть L/k – конечное расширение Галуа с группой $\Pi = Gal\,(L/k)$, A – Π-модуль, его называют модулем Галуа. Огромное количество модулей Галуа доставляет нам теория алгебраических чисел и диофантова геометрия, к примеру, группа идеалов, группа классов идеалов, группа единиц поля L, группа Пикара алгебраического многообразия и т.д. Группы $\hat{H}^q(\Pi, A)$ обозначаются также $\hat{H}^q(L/k, A)$. Простейшими Π-модулями являются аддитивная группа поля L и его мультипликативная группа L^* .

Пример 22. Когомологии группы L тривиальны: $\hat{H}^q(L/k, A) = 0$ для всех q. Это отражение того факта, что расширение L/k обладает нормальным базисом.

Однако, когомологические характеристики группы L^* весьма нетривиальны и их изучение проливает дополнительный свет на конструкцию самого поля. Известно, что $H^1(L/k, L^*) = 1$ (теорема Гильберта 90). Группа $H^2(L/k, L^*)$ играет особую роль в алгебраических конструкциях, причем она описывает объекты существенно некоммутативной природы. Пусть k_s – сепарабельное замыкание поля k, $\{L_i\}$ – множество всевозможных конечных расширений Галуа поля k, $k \subset k_s$, тогда определен индуктивный предел $\lim H^2(L/k, L^*)$, он обозначается $H^2(k, k_s^*)$ и называется когомологической группой Брауэра $Br\,k$ поля k. Поскольку $H^1(L/k, L^*) = 1$, то вложение $L \subset k_s$ определяет точную последовательность

$$0 \;\to\; H^2(L/k, L^*) \;\to\; H^2(k, k_s^*) \;\to\; H^2(L, k_s^*)$$

или, в других обозначениях,

$$0 \quad \to \quad Br\,(L/k) \quad \to \quad Br\,k \quad \to \quad Br\,L,$$

где $Br\,(L/k)$ есть $H^2(L/k, L^*)$. Группа $H^2(L/k, L^*)$ подробно рассмотрена в книге Ван-дер-Вардена [1] в терминах скрещенных произведений. Из этой трактовки следует, что группа $Br\,k$ изоморфна группе классов центральных простых алгебр над

полем k, этим объясняется и название. Элементы из $H^2(L/k, L^*)$ соответствуют тем классам алгебр, которые распадаются над полем L.

Если A – группа, не обязательно коммутативная, на которой действует группа Π, то определена группа $H^0(\Pi, A) = A^\Pi$ и множество $H^1(\Pi, A)$ с отмеченной точкой, и для точной последовательности таких Π-групп

$$1 \to A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \to 1$$

возникает точная последовательность когомологий

$$1 \to H^0(\Pi, A') \to H^0(\Pi, A) \to H^0(\Pi, A'') \to H^1(\Pi, A') \to H^1(\Pi, A).$$

Если A' – нормальный делитель в A, то эта последовательность продолжается на одну стрелку вправо, если же A' – нормальный делитель, лежащий в центре группы A, то вышеуказанная последовательность продолжается до $H^2(\Pi, A')$.

1.11. Пучки и когомологии в этальной топологии. Очень широким обобщением теории когомологий Галуа явились введенные Гротендиком этальные когомологии схем. На схеме X рассматривается так называемая этальная топология и для любого пучка коммутативных групп $\mathcal{F}$ на X определены группы когомологий $H^q_{et}(X, \mathcal{F})$, несущие в себе значительно большую информацию, чем когомологии в топологии Зарисского. Этальные когомологии имеют преимущество даже перед комплексными когомологиями, так как первые реагируют на действие группы Галуа $Gal\,(\overline{k}/k)$, если комплексное алгебраическое многообразие X определено над подполем k поля комплексных чисел C. Сделаем обзор основных фактов из области пучков и когомологий в этальной топологии, необходимых для дальнейшего. Подробности в книге Милна [1].

Пусть x – точка топологического пространства схемы X. Через $\overline{x}$ будет всегда обозначаться спектр сепарабельного замыкания поля $k(x)$, а через $u_x : \overline{x} \to X$ – отображение, индуцированное вложением поля $k(x)$ в $k(\overline{x}) = k(x)_s$, u_x – геометрическая точка. Пусть $\mathcal{F}$ – предпучок на X_{et} . Слой $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ есть $\varinjlim \mathcal{F}(U)$, где индуктивный предел берется по всем коммутативным треугольникам

$$\begin{array}{ccc} \overline{x} & \longrightarrow & U \\ u_x & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

со схемами U, этальными над X. Справедливо обычное свойство, если $s \in \mathcal{F}(U)$ – ненулевое сечение, то существует $x \in X$ и геометрическая точка $\overline{x}$ схемы U, для которой $s_{\bar{x}} \neq 0$. Далее, последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

точна на X_{et} тогда и только тогда, когда точна последовательность

$$0 \to \mathcal{F}'_{\bar{x}} \to \mathcal{F}_{\bar{x}} \to \mathcal{F}''_{\bar{x}} \to 0$$

для всех геометрических точек $\overline{x}$.

Пусть $\pi : Y \to X$ – морфизм, $\mathcal{F}$ – пучок на X_{et}, $\mathcal{G}$ – пучок на Y_{et}. Определения прямого и обратного образов традиционны, мы считаем их известными. Имеется изоморфизм $(\pi^*\mathcal{F})_{\bar{y}} \cong \mathcal{F}_{\overline{\pi(y)}}$ для любой точки $y \in Y$. Пусть $\tilde{X} = Spec\, O_{X,\overline{x}}$, $f : \tilde{X} \to X$ – канонический морфизм, $\tilde{Y} = Y \times_X \tilde{X}$ – расслоенное произведение.Если морфизм π является квазикомпактным, то

$$(\pi_*\mathcal{G})_{\bar{x}} = \Gamma(\tilde{Y}, \mathcal{G}), \tag{1}$$

где $\mathcal{G}$ – ограничение пучка $f_1^*(\mathcal{G})$ на $\tilde{Y}$. Пусть $i : Z \to X$ – замкнутое вложение, $\mathcal{F}$ – пучок на Z_{et}, $x \in X$. Тогда $(i_*\mathcal{F})_{\bar{x}} = 0$, если $x \notin i(Z)$, и $(i_*\mathcal{F})_{\bar{x}} = \mathcal{F}_{\bar{z}}$, если $x = i(z)$, $z \in Z$. Если $\pi : Y \to X$ – конечный морфизм, например, замкнутое вложение, то функтор π_* точен в этальной топологии.

Пусть теперь G – групповая схема над X, она определяет пучок групп $U \to G(U)$ в этальной топологии, который снова будем обозначать тем же символом G. Таким образом, для любой коммутативной групповой схемы G над X имеем последовательность групп этальных когомологий $H^q_{et}(X, G), q \geq 0$. Если $X = Spec\, k$, то группы

$H^q_{et}(Spec\, k, G)$ являются когомологиями Галуа $H^q(k, G(k_s))$ расширения k_s/k.Для некоммутативных групп G определена группа $H^0(X, G) = \Gamma(X, G) = G(X)$ и множество $H^1_{et}(X, G)$ с отмеченной точкой. Множество $H^1_{et}(X, G)$ тесно связано с главными однородными пространствами или торсорами групповой схемы G. В более конкретной ситуации мы с ними встретимся далее.

Пусть $\pi : Y \to X$ – квазикомпактный морфизм. Из формулы (1) имеем для групповых схем G конечного типа над Y следующее соотношение

$$(\pi_*G)_{\bar{x}} = H^0_{et}(\tilde{Y}, G), \quad \tilde{Y} = Y \times_X Spec\, O_{X,\bar{x}}.$$

Более общо в тех же условиях имеем равенство

$$(R^q\pi_*G)_{\bar{x}} = H^q_{et}(\tilde{Y}, G).$$

Более обстоятельно этальные когомологии изложены в книге Милна [1].

1.12. Дивизоры Картье и Вейля. Пусть X – целая квазикомпактная схема, R_X – пучок колец рациональных функций на X_{et}, $R_X(X) = K$ – поле рациональных функций на X. Рассмотрим вложение

$$\varphi : Spec\, K \quad \to \quad X$$

и прямой образ $\varphi_*G_{m,K}$ пучка $G_{m,K}$. Для любого этального морфизма $U \to X$ имеем

$$\Gamma(U, \varphi_*G_{m,K}) = G_{m,K}(U \times_X SpecK) = R_X(U)^*,$$

где $R_X(U)^*$ – мультипликативная группа кольца $R_X(U)$. Таким образом, $\varphi_*G_{m,K} = R_X^*$ есть пучок обратимых рациональных функций на X_{et}. Вложение $\Gamma(U, O_U^*) \to R_X(U)^*$ определяет мономорфизм пучков $G_{m,X} \to R_X^*$. Фактор-пучок $R_X^*/G_{m,X}$ носит название *пучка дивизоров Картье* схемы X, обозначим его $\tilde{Div}(X)$. Таким образом, имеем точную последовательность пучков абелевых групп в этальной топологии

$$1 \quad \to \quad G_{m,X} \quad \to \quad R_X^* \quad \to \quad \tilde{Div}(X) \quad \to \quad 0,$$

откуда точная последовательность когомологий

$$1 \quad \to G_m(X) \to K^* \to H^0(X, \tilde{Div}(X)) \to H^1(X, G_m) \to \tag{1}$$

$$\to H^1(X, R_X^*) \to H^1(X, \tilde{Div}(X)) \to H^2(X, G_m) \to H^2(X, R_X^*) \to ...$$

Все когомологии этальные, для краткости мы иногда будем опускать нижний индекс. Группа сечений $H^0(X, \tilde{Div}(X))$ называется *группой дивизоров Картье* схемы

X и обозначается кратко $Div(X)$. Группа $H^1_{et}(X, G_m)$ совпадает с группой $H^1_{Zar}(X, G_m)$, она называется *группой Пикара* схемы X и обозначается символом $Pic\,X$. Группа $H^2_{et}(X, G_m)$ называется когомологической группой Брауэра, она обозначается символом $Br\,X$. Для вычисления группы $H^q_{et}(X, R^*_X)$ используется спектральная последовательность Лере включения $\varphi : Spec\,K \to X$

$$H^p_{et}(X, R^q\varphi_* G_{m,K}) \Rightarrow H^{p+q}_{et}(Spec\,K, G_m) = H^{p+q}(K, K^*_s).$$

Спектральная последовательность всегда позволяет написать восьмичленную точную последовательность, ставшую уже классической. В нашем случае имеем

$$\begin{aligned} 0 \quad &\to H^1(X, R^*_X) \to H^1(K, K^*_s) \to H^0(X, R^1\varphi_* G_{m,K}) \to H^2(X, R^*_X) \to \\ &\to Ker\,[H^2(K, K^*_s) \to H^0(X, R^2\varphi_* G_{m,K})] \to H^1(X, R^1\varphi_* G_{m,K}) \to H^3(X, G_m). \end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку $H^1(K, K^*_s) = 0$, то и $H^1(X, R^*_X) = 0$. Пусть теперь схема X является гладкой. Тогда пучок дивизоров Картье можно отождествить с пучком дивизоров Вейля, сечениями последнего являются элементы свободной абелевой группы, порожденной неприводимыми замкнутыми подмножествами коразмерности один. В этом случае

$$H^1(X, \tilde{Div}(X)) = \oplus_{x \in X^1} H^1(k(x), Z) = 0,$$

$$H^2(X, \tilde{Div}(X)) = \oplus_{x \in X^1} H^2(k(x), Z) = 0,$$

где X^1 обозначает множество точек схемы X, имеющих коразмерность 1. Далее,

$$(R^2\varphi_* G_{m,K})_{\bar{x}} = H^2(Spec\,(K \otimes O_{X,\bar{x}}), G_m) = H^2(K_s, G_m) = 0,$$

откуда $R^2\varphi_* G_{m,K} = 0$. Из (1) и (2) следует

Теорема. Пусть X – целая гладкая нетерова схема. Тогда точны последовательности

$$1 \quad \to G_m(X) \to K^* \to Div(X) \to Pic\,X \to 0,$$

$$0 \quad \to Br\,X \to Br\,K \to H^2(X, \tilde{Div}(X)) \to H^3(X, G_m).$$

При этом

$$\begin{aligned} H^2(X, \tilde{Div}(X)) &= \oplus_{x \in X^1} H^2(k(x), Z) = \\ &= \oplus_{x \in X^1} H^1(k(x), Q/Z) = \oplus_{x \in X^1} Hom(\Pi_x, Q/Z), \end{aligned}$$

где $\Pi_x = Gal\,(k(\bar{x})/k(x))$. $\triangle$

§2. ГРУППА БРАУЭРА ПРОЕКТИВНОГО МНОГООБРАЗИЯ

2.1. Неразветвленная группа Брауэра функционального поля. Пусть X – геометрически неприводимое алгебраическое многообразие над полем k характеристики нуль, $F = k(X)$ – поле рациональных функций на X, A_v – кольцо дискретного нормирования ранга 1 поля F, $k \in A_v$.Вложение $i_v : Spec\,F \to Spec\,A_v$ определяет точную последовательность когомологий

$$0 \quad \to Br\,A_v \to Br\,F \to H^2(A_v/m_v, Z),$$

где m_v – максимальный идеал кольца A_v. В группе $Br\,F$ можно рассмотреть пересечение $\bigcap_v Br\,A_v$,которое называется неразветвленной группой Брауэра поля F и обозначается символом $Br_{nr}(F)$. Используя теорию Хиронаки разрешения особенностей, можно построить гладкую проективную модель X поля F. Оказывается, группа $Br\,X$ совпадает с $Br_{nr}(F)$ и,следовательно, группа $Br\,X$ есть бирациональный инвариант многообразия X, т.е., если X и Y – две гладкие проективные модели поля F, то группы $Br\,X$ и $Br\,Y$ изоморфны. Поскольку $H^2(A_v/m_v, Z) = H^1(A_v/m_v, Q/Z)$, то

$$Br\,X = Br_{nr}(F) = Ker\,[Br\,F \to \oplus_v H^1(A_v/m_v, Q/Z)].$$

Заметим также, если $U = X - Z$, $codim\,Z \geq 2$, то ограничение $Br\,X \to Br\,U$ есть изоморфизм. Подробности в работе Гротендика [1].

2.2. Точная последовательность Куммера. Так называется точная последовательность вида

$$1 \to \mu_{n,X} \to G_{m,X} \xrightarrow{n} G_{m,X} \to 1$$

над схемой X, где n означает гомоморфизм возведения в n-ю степень. Если n взаимнопросто с характеристикой поля $k(x)$ для любой точки $x \in X$, то имеем точную последовательность этальных когомологий

$$1 \to \mu_n(X) \to G_m(X) \xrightarrow{n} G_m(X) \to H^1(X, \mu_n) \to Pic\,X \xrightarrow{n} Pic\,X \to$$

$$\to H^2(X, \mu_n) \to Br\,X \xrightarrow{n} Br\,X. \tag{1}$$

Пусть теперь X – гладкое неприводимое многообразие над полем C. Тогда пучок μ_n является постоянным, изоморфным Z/nZ и

$$H^1_{et}(X, \mu_n) \cong H^1_{an}(X, Z/nZ) \cong \pi_1(X, Z/nZ)$$

есть группа классов изоморфных накрытий Галуа многообразия X с группой Z/nZ. Далее, пусть X – проективно. Тогда $G_m(X) = C^*$,группы $H^q(X, \mu_n)$ конечны и из (1) следует, что

$$H^1_{et}(X, \mu_n) =_n (Pic\,X),$$

кроме того, точна последовательность

$$0 \to Pic\,X/n(Pic\,X) \to H^2(X, \mu_n) \to_n (Br\,X) \to 0, \tag{2}$$

где ${}_n()$ означает ядро отображения n. Пусть теперь ℓ – простое число, имеем две естественные, двойственные друг другу точные последовательности

$$0 \to Z/\ell Z \to Z/\ell^{m+1}Z \to Z/\ell^m Z \to 0$$

$$1 \to \mu_{\ell^m} \to \mu_{\ell^{m+1}} \to \mu_\ell \to 1.$$

Пусть, далее μ_{ℓ^∞} –индуктивный предел семейства μ_{ℓ^m} , Z_ℓ – проективный предел семейства $Z/\ell^m Z$. Предел Z_ℓ является кольцом целых ℓ-адических чисел, пусть

Q_ℓ будет полем ℓ-адических чисел. Заметим также , что можно рассмотреть и проективную систему $\mu_{\ell^{m+1}} \xrightarrow{\ell} \mu_{\ell^m}$. Предел этой системы обозначается $Z_\ell[1]$, на нем естественно действует группа Галуа кругового расширения. Имеем изоморфизмы

$$Pic\, X/\ell^m(Pic\, X) \cong Pic\, X \otimes (Z/\ell^m Z) \cong Pic\, X \otimes (\ell^{-m} Z/Z),$$

откуда

$$\lim_{\to} Pic\, X/\ell^m(Pic\, X) \cong Pic\, X \otimes (Q_\ell/Z_\ell).$$

Далее, пусть

$$H^2(X, \mu_{\ell^\infty}) = \lim_{\to_m} H^2(X, \mu_{\ell^m}).$$

Переходя к пределу в последовательности (2), получаем точную последовательность

$$0 \to Pic\, X \otimes (Q_\ell/Z_\ell) \to H^2(X, \mu_{\ell^\infty}) \to (Br\, X)(\ell) \to 0, \qquad (3)$$

где $(Br\, X)(\ell)$ – есть ℓ-примарная компонента периодической группы $Br\, X$.

2.3. Группа Тейта, число Пикара, число Лефшеца. Если M есть абелева группа, ℓ – простое число, $\ell^m : M \to M$ – оператор умножения на ℓ^m , ${}_{\ell^m}M$ – ядро этого оператора, то имеем проективную систему

$${}_{\ell^{m+1}}M \xrightarrow{\ell}{}_{\ell^m} M.$$

Проективный предел этой системы $T_\ell(M)$ называется ℓ-адической группой Тейта группы M, она обладает структурой Z_ℓ-модуля. Если группа ${}_\ell M$ – конечна, то $T_\ell(M)$ является свободным Z_ℓ-модулем конечного ранга. Рассмотрим точную последовательность

$$1 \to \mu_{\ell^m} \to \mu_{\ell^\infty} \xrightarrow{\ell^m} \mu_{\ell^\infty} \to 1.$$

индуцирующую точную когомологическую последовательность

$$H^{q-1}(X, \mu_{\ell^\infty}) \xrightarrow{\ell^m} H^{q-1}(X, \mu_{\ell^\infty}) \longrightarrow H^q(X, \mu_{\ell^m}) \longrightarrow {}_{\ell^m} H^q(X, \mu_{\ell^\infty}) \longrightarrow 0. \qquad (4)$$

Напомним, что X – гладкое неприводимое проективное многообразие над полем комплексных чисел C. В этих условиях группы $H^q(X, \mu_n)$ конечны, сверх того, группы $H^q(X, \mu_{\ell^\infty})$ имеют конечный котип, т.е. группа $H^q(X, \mu_{\ell^\infty})$ есть прямая сумма наибольшей делимой подгруппы $(Q_\ell/Z_\ell)^r$ и конечной ℓ-группы $t^q(X, \ell)$. Наибольшую делимую часть ℓ-группы A обозначим через A^0. Число r называется корангом группы A, он равен также Z_ℓ-рангу группы Тейта $T_\ell(A)$. Таким образом, последовательность (4), начиная с некоторого m, может быть записана в виде

$$0 \to t^{q-1}(X, \ell) \to H^q(X, \mu_{\ell^m}) \to {}_{\ell^m} H^q(X, \mu_{\ell^\infty}) \to 0.$$

Перейдя в ней к проективному пределу, исходя из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mu_{\ell^{m+1}} & \to & \mu_{\ell^\infty} & \to & \mu_{\ell^\infty} & \to & 1 \\ & & \ell\downarrow & & \ell\downarrow & & \downarrow Id & & \\ 1 & \to & \mu_{\ell^m} & \to & \mu_{\ell^\infty} & \to & \mu_{\ell^\infty} & \to & 1, \end{array}$$

получаем факторизацию

$$0 \quad \to t^{q-1}(X,\ell) \to H^q(X, Z_\ell[1]) \to T_\ell(H^q(X,\mu_{\ell^\infty})) \to \quad 0, \tag{5}$$

которая показывает, что $t^{q-1}(X,\ell)$ изоморфна подгруппе кручения в $H^q(X,Z_\ell[1])$, а модуль $T_\ell(H^q(X,\mu_{\ell^\infty}))$ изоморфен свободной части Z_ℓ-модуля $H^q(X,Z_\ell[1])$. При $q=2$ имеем

$$0 \quad \to t(X,\ell) \to H^2(X, Z_\ell[1]) \to T_\ell(H^2(X,\mu_{\ell^\infty})) \to \quad 0.$$

Переходя к проективному пределу в последовательности (2) при $n=\ell^m$, получаем точную последовательность

$$0 \quad \to NS(X)\otimes Z_\ell \to H^2(X, Z_\ell[1]) \to T_\ell(Br\,X) \to \quad 0,$$

где $NS(X) = Pic\,X/(Pic\,X)^0$. Пусть B_2 – ранг Z_ℓ-модуля $H^2(X,Z_\ell[1])$– второе число Бетти многообразия X, $B_2 = \dim H^2_{an}(X,C)$; ρ –ранг модуля $NS(X)\otimes Z_\ell$, ρ – есть также Z-ранг группы $NS(X)$, число $B_2-\rho$ называется числом Лефшеца, это ранг модуля $T_\ell(Br\,X)$ или коранг группы $(Br\,X)(\ell)$. Число Лефшеца показывает максимальное количество линейно независимых трансцендентных дивизоров, оно совпадает с числом линейно независимых форм второй степени и второго рода на X. Вернемся к последовательности (3). Поскольку группа $Pic\,X\otimes(Q_\ell/Z_\ell)$ является ℓ-делимой группой коранга ρ,то

$$(Br\,X)(\ell)/(Br\,X)(\ell)^0 = H^2(X,\mu_{\ell^\infty})/H^2(X,\mu_{\ell^\infty})^0 = t^2(X,\ell) = H^3(X,Z_\ell[1])_{tors},$$

последнее следует из (5). Итак, имеем точную последовательность

$$0 \quad \to (Q_\ell/Z_\ell)^{B_2-\rho} \to (Br\,X)(\ell) \to H^3(X,Z_\ell[1])_{tors} \to \quad 0.$$

Поскольку $H^3_{et}(X,Z_\ell[1]) = H^3_{an}(X,Z)\otimes Z_\ell$, то группа $H^3_{et}(X,Z_\ell[1])_{tors}$ совпадает с подгруппой ℓ-кручения в $H^3_{an}(X,Z)$.

Теорема. Пусть X – гладкое неприводимое проективное алгебраическое комплексное многообразие. Тогда имеем факторизацию

$$0 \quad \to (Q/Z)^{B_2-\rho} \to Br\,X \to H^3(X,Z)_{tors} \to \quad 0,$$

при этом ρ и $H^3(X,Z)_{tors}$ являются бирациональными инвариантами многообразия X. $\triangle$

Пусть X – унирационально. Тогда транцендентных дивизоров нет, т.е. $B_2=\rho$, и мы получаем изоморфизм

$$Br\,X \cong H^3(X,Z)_{tors}.$$

§3. ТЕОРИЯ k-ФОРМ

В данном параграфе будут рассмотрены результаты, справедливые для полей общего типа. Иногда будут накладываться ограничения, связанные с характеристикой поля. Факты, верные в случаях полей специального вида, будут представлены в следующих параграфах.

3.1. Формы и одномерные когомологии. Пусть k-поле, L– его нормальное сепарабельное расширение с группой Галуа П. Для всякой k- схемы X символ X_L или $X\otimes_k L$ будет означать схему $X\times_k Spec\,L$. Группа П действует на схеме $X\otimes_k L$

через второй множитель: $\sigma \to 1 \otimes \sigma, 1 \otimes \sigma : X_L \to X_L$. Оператор $1 \otimes \sigma$ является k-автоморфизмом схемы X_L. Имея оператор $1 \otimes \sigma$, можно определить действие группы Π и на L-морфизмах $X_L \to Y_L$, где X и Y – k-схемы. Пусть $f \in Mor_L(X_L, Y_L)$. Положим

$$\sigma f = (1 \otimes \sigma) f (1 \otimes \sigma)^{-1}.$$

Ясно, что $\sigma f \in Mor_L(X_L, Y_L)$. Среди морфизмов $f : X_L \to Y_L$ имеются морфизмы, полученные поднятием из k-морфизмов $h : X \to Y$. Такие поднятые морфизмы $f = h \otimes 1$ будем часто обозначать одним символом h и называть морфизмами, определенными над полем k. Если A – произвольная k-алгебра, то символ $X(A)$ означает $X(Spec\, A)$. Следующие свойства легко проверяются на языке L-алгебр, учитывая, что L есть сепарабельное расширение поля k.

а) Пусть $f \in Mor_L(X_L, Y_L)$. Условие $\sigma f = f$ для всех $\sigma \in \Pi$ эквивалентно равенству $f = h \otimes 1, h : X \to Y$;

б) если $f \in Mor_L(X_L, Y_L)$, то $\sigma f \in Mor_L(X_L, Y_L)$;

в) если $f \in Mor_L(X_L, Y_L), g \in Mor_L(X_L, Y_L)$, то $\sigma(gf) = (\sigma g)(\sigma f)$;

г) для k-алгебры A справедливо равенство $X(L \otimes A)^{\Pi} = X(A)$.

Определение. Пусть F – расширение поля k, X – k-схема. Схема Y над полем k называется F/k-формой схемы X, если существует изоморфизм F-схем $X \otimes_k F \cong Y \otimes_k F$. Если $F = \bar{k}$, то Y называют просто k-формой.

Пример 1. Все вещественные невырожденные кривые второго порядка в R^2 являются C/R-формами одной из них, например, $x^2 + y^2 = 1$ или $xy = 1$.

Пример 2. Если X – аффинная k-схема, то ее F/k-форма Y также аффинна над k. В самом деле, пусть $k[Y]$ – кольцо регулярных функций на Y, имеется естественный k-морфизм $f : Y \to Spec\, k[Y]$, который продолжается до F-морфизма $f \otimes 1 : Y_F \to Spec\, F[Y]$. Поскольку Y_F – аффинная F-схема, то $f \otimes 1$ – изоморфизм, а так как F – строго плоская k-алгебра, то и f– изоморфизм.

Пусть теперь L/k – конечное расширение Галуа, $\Pi = Gal\,(L/k)$– группа Галуа, $\mathcal{F}(L/k, X)$ – множество всех L/k-форм данной k-схемы X, взятых с точностью до изоморфизма. Поскольку σf – также изоморфизм этих схем, то $a_\sigma = f^{-1}(\sigma f)$ есть автоморфизм схемы X_L. Функция $\sigma \to a_\sigma$ на группе Π со значениями в группе $Aut_L(X)$ удовлетворяет условиям $a_{\sigma\tau} = a_\sigma(\sigma a_\tau)$ для всех $\sigma, \tau \in \Pi$. Такие функции называются 1-коциклами и множество всех 1-коциклов обозначим через $Z^1(L/k, Aut_L(X))$. Два коцикла a_σ и a'_σ называют когомологичными, если существует элемент $b \in Aut_L(X)$ такой, что $a'_\sigma = b^{-1} a_\sigma (\sigma b)$. Когомологичность является отношением эквивалентности на множестве Z^1 и множество классов эквивалентности называют множеством одномерных когомологий группы Π со значениями в $Aut_L(X)$ и обозначают

$$H^1(\Pi, Aut_L(X)) \quad или \quad H^1(L/k, Aut_L(X)).$$

Если группа $Aut_L(X)$ – коммутативная, то $H^1(\Pi, Aut_L(X))$ также коммутативная группа, в общем же случае $H^1(\Pi, Aut_L(X))$ лишь множество с отмеченной точкой – классом коцикла $b^{-1}(\sigma b)$. Пусть Y и Z – две L/k-формы схемы X, a_σ и a'_σ – соответствующие коциклы. Непосредственно проверяется, что изоморфность Y и Z равносильна когомологичности коциклов a_σ и a'_σ. Таким образом, имеем каноническое инъективное отображение

$$\varphi : \mathcal{F}(L/k, X) \to H^1(L/k, Aut_L(X)). \tag{1}$$

Вопрос о сюръективности отображения φ уже не может быть решен так просто, поскольку для произвольных k-схем X это не так. Остановимся несколько подробнее

на этом вопросе, поскольку методы решения задачи о сюръективности отображения φ будут неоднократно использоваться в дальнейшем. Возьмем произвольный коцикл a_σ и рассмотрим k-автоморфизм $h(\sigma) = a_\sigma(1 \otimes \sigma)$. Условие коцикла показывает, что $h(\sigma\tau) = h(\sigma)h(\tau)$, т.е. отображение h является представлением группы Галуа Π в группу $Aut_k(X_L)$. Возникает первое препятствие: существует ли фактор $X_L/h(\Pi)$ в категории k-схем? Далее, если X – схема конечного типа, будет ли фактор $X_L/h(\Pi)$ таким же?

Пример 3. Пусть B – коммутативная алгебра конечного типа над полем k, Π – конечная группа k-автоморфизмов алгебры B. Тогда алгебра инвариантов B^Π имеет конечное число образующих.

Этот пример показывает, что в случае, когда $X = Spec\, A$, где A – алгебра конечного типа над полем k, фактор $(X \otimes_k L)/h(\Pi) = Y$ существует и является аффинной k-схемой конечного типа. Схема Y имеет вид $Y = Spec\, R$, где R есть k-алгебра инвариантов: $R = (L \otimes_k A)^{h^*(\Pi)}$, h^* – автоморфизм k-алгебры $L \otimes_k A$, дуальный автоморфизму h. Далее, проверяется, что сквозное каноническое отображение $L \otimes_k R \to LR \to L \otimes_k A$ является изоморфизмом, откуда $X \otimes_k L \cong Y \otimes_k L$, т.е. Y является L/k-формой схемы X. Непосредственно проверяется, что построенный L-изоморфизм $f : X \otimes_k L \to Y \otimes_k L$ удовлетворяет соотношениям $f^{-1}(\sigma f) = a_\sigma$. Это показывает, что для аффинных k-схем X конечного типа отображение (1) является биекцией. Анализ доказательства сюръективности для аффинных схем показывает, что сюръективность отображения φ имеет место и в более общем случае. Например, если схема X_L допускает покрытие открытыми аффинными схемами U_i конечного типа, инвариантными относительно действия группы $h(Pi)$. Тогда схему $X_L/h(\Pi)$ можно получить путем склеивания из факторов $U_i/h(\Pi)$. В частности, это так, если каждое конечное подмножество пространства X_L содержится в открытом аффинном подмножестве конечного типа. Это всегда выполняется для локально замкнутых подмногообразий проективного пространства $\mathbf{P}^n_k$, такие подмногообразия называются *квазипроективными.*

Теорема. Пусть X – квазипроективное многообразие над полем k. Тогда классы изоморфных L/k-форм многообразия X находятся в биективном соответствии с элементами множества $H^1(L/k, Aut_L(X))$.$\triangle$

Пример 4. Пусть f – знакопеременная невырожденная билинейная форма линейного пространства V над полем k, группа всех линейных преобразований пространства V, сохраняющих форму f, называется симплектической группой формы f и обозначается $Sp(f)$. Так как все невырожденные знакопеременные формы на V эквивалентны между собой, то $H^1(L/k, Sp(f)) = 0$.

Аналогично, если f квадратичная форма над полем k, характеристика которого отлична от двух, то $H^1(L/k, O(f))$ есть множество неэквивалентных квадратичных форм над k, которые становятся эквивалентными над полем L, $H^1(L/k, SO(f))$ – подмножество в $H^1(L/k, O(f))$, состоящее из классов квадратичных форм, имеющих тот же дискриминант, что и f.

3.2. Поле разложения k-формы. Пусть Y является k-формой k-схемы X. Поле $L \supset k$ называется полем разложения формы Y,если L-схемы $Y \otimes_k L$ и $X \otimes_k L$ изоморфны. Достаточно очевидно, что всякая k-форма аффинной k-схемы конечного типа разлагается над конечным расширением поля k. Это же верно и для квазипроективных многообразий. Более деликатный вопрос о существовании сепарабельного поля разложения. Наличие сепарабельного поля разложения для квазипроективного многообразия Y позволяет описать все k-формы многообразия X с помощью когомологий. Действительно, пусть L и M – расширения Галуа поля k конечной степени,

причем $k \subset L \subset M$. Тогда мы имеем инъективное отображение

$$H^1(L/k, Aut_L(X)) \to H^1(M/k, Aut_M(X))$$

Эти отображения образуют индуктивную систему. Символ
$H^1(k, Aut_{k_s}(X))$ или $H^1(k, Aut(X))$ обозначает предел $\varinjlim H^1(L/k, Aut_L(X))$ этой индуктивной системы. Таким образом, множество $H^1(k, Aut(X))$ описывает все k_s/k-формы квазипроективного многообразия X.

3.3. Формы групповых схем. В случае , когда X является групповой схемой, естественно рассмотреть среди L/k-форм схемы X те формы Y, которые являются k-группами, а соответствующие изоморфизмы $f : X_L \to Y_L$ – групповыми L-изоморфизмами. В этой ситуации коцикл $a_\sigma = f^{-1}(\sigma f)$ является групповым автоморфизмом L-группы X_L. Рутинная проверка показывает, что обратное утверждение также верно: если a_σ лежит в $Aut_{gr}(X_L)$ и a_σ определяет L/k-форму Y схемы X, то на Y можно ввести групповую структуру таким образом, чтобы группы X_L и Y_L стали изоморфными.Итак,множество $H^1(L/k, Aut_L(X))$ описывает все L/k-формы группы X с точностью до изоморфизма, по крайней мере, для квазипроективных групп.

3.4. Группы мультипликативного типа. Назовем групповую k-схему G группой *мультипликативного типа* (МТ), если группа $G \otimes_k \bar{k}$ диагонализируема и имеет конечный тип, т.е. существует абелева группа M с конечным числом образующих, такая, что

$$G \otimes_k \bar{k} \cong D_{\bar{k}}(M) = Spec(\bar{k}[M]).$$

В этом случае, как мы видели в §1, группа M есть группа рациональных характеров схемы $D_{\bar{k}}(M)$, т.е.

$$M \cong Hom_{gr}(D_{\bar{k}}(M), G_{m,\bar{k}}) = Hom_{gr}(G_{\bar{k}}, G_{m,\bar{k}}).$$

Для любой групповой схемы G имеем пучок характеров $\hat{G}$, см.п.1.7. Если G – аффинная алгебраическая группа над полем k, то группу $\hat{G}(\bar{k})$ можно отождествить с подгруппой мультипликативной группы кольца регулярных функций $\bar{k}[G]$. Нам понадобится

Теорема Розенлихта. Если X есть геометрически неприводимое алгебраическое многообразие над полем k, то группа $U(X) = \bar{k}[X]^*/\bar{k}^*$ является свободной абелевой группой конечного ранга. Далее, для двух таких многообразий имеем изоморфизм

$$U(X \times_k Y) \cong U(X) \times U(Y),$$

где справа прямое произведение групп.△

Теорема Розенлихта показывает, что для любой алгебраической группы G над полем k группа $\hat{G}(\bar{k})$ имеет конечное число образующих, $\hat{G}(\bar{k})$ – свободна, если G – связна. Поскольку группа $\hat{G}(\bar{k})$ имеет конечный тип, то существует конечное расширение L поля k, над которым определены все элементы группы $\hat{G}(\bar{k})$, т.е. $\hat{G}(\bar{k}) = \hat{G}(L)$. В дальнейшем, при рассмотрении алгебраических k-групп G, будем часто сокращать обозначение $\hat{G}(\bar{k})$ до $\hat{G}$, это не приводит к недоразумениям.

Вернемся к группе (МТ) G. Если $\hat{G}(\bar{L}) = \hat{G}(\bar{k}) = \hat{G}$, то $G_L = D_L(\hat{G})$. В этом случае поле L называется *полем разложения* k-группы G. Оказывается, группа (МТ) всегда имеет сепарабельное поле разложения. Действительно, пусть характеристика p поля k больше нуля. Если L– несепарабельное конечное расширение поля k, над

которым группа G расщепляется, то L имеет максимальное сепарабельное подполе L^s, $k \subset L^s \subset L$ и существует такое число $n \geq 1$, что $L^{p^n} \subset L^s$. Пусть $L_0 = L$ и $L_i = kL_{i-1}^p$, $1 \leq i \leq n$. Оператор возведения в р-ю степень определяет гомоморфизм $f : L_i \to L_{i+1}$. Имеем изоморфизм $u : G_L \to D_L(\hat{G})$ и коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G_L & \xrightarrow{\mathbf{p}} & G_L \\ u \downarrow & & u \downarrow \\ D_L(\hat{G}) & \xrightarrow{\mathbf{p}} & D_L(\hat{G}), \end{array} \tag{1}$$

где $\mathbf{p}$ есть оператор возведения в р-ю степень. Рассмотрим первый шаг: $F : L \to L$, который разобьем на два этапа: $f : L \to L_1$, $i : L_1 \to L$, где i – вложение, $F = if$. Мы видели в п.1.5., что оператор $\mathbf{p}$ разлагается в произведение $V \cdot F$, поэтому из (1) имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} G_L & \xrightarrow{f} & G_{L_1} & \xrightarrow{i} & G_L & \xrightarrow{V} & G_L \\ u \downarrow & & u_1 \downarrow & & u_2 \downarrow & & u \downarrow \\ D_L(\hat{G}) & \xrightarrow{f} & D_{L_1}(\hat{G}) & \xrightarrow{i} & D_L(\hat{G}) & \xrightarrow{V} & D_L(\hat{G}) \end{array}$$

Поскольку V есть изоморфизм, то $u_2 = u = u_1 \otimes 1$. Итак, изоморфизм u определен над L_1, мы спустились на один этаж ниже. Итерируя этот процесс, мы придем к изоморфизму

$$u_n : G_{L_n} \quad \to \quad D_{L_n}(\hat{G}),$$

причем $u = u_n \otimes 1$. Поскольку L_n сепарабельно над k, то этим показано, что u определено над сепарабельным расширением поля k.

Зафиксируем теперь коммутативную группу M с конечным числом образующих. Как мы только что видели, все k-формы группы $D_k(M)$ расщепляются уже над сепарабельными расширениями поля k, поэтому все они с точностью до изоморфизма описываются множеством $H^1(k, Aut_{k_s}(D(M)))$. Но группа $Aut_L(D(M))$ совпадает с группой $Aut\, D(M) \cong Aut\,(M)$ для любого расширения L поля k, поэтому

$$H^1(k, Aut_{k_s}(D(M))) = H^1(k, Aut\,(M)) = H^1(\mathcal{G}, Aut\,(M)),$$

где $\mathcal{G}$ – группа Галуа расширения k_s/k и $\mathcal{G}$ действует тривиально на $Aut\,(M)$. В таком случае $H^1(\mathcal{G}, Aut\,(M))$ совпадает с множеством эквивалентных непрерывных представлений топологической компактной группы $\mathcal{G}$ в дискретную группу $Aut\,(M)$. Каждое такое представление определяет строение непрерывного $\mathcal{G}$-модуля на группе M, и обратно, строение непрерывного $\mathcal{G}$-модуля на M определяет представление группы $\mathcal{G}$ в $Aut\,(M)$ с точностью до эквивалентности. Если отождествить группу M с группой рациональных характеров $\hat{G}$ k-группы G,определяемой представлением $h : \mathcal{G} \to Aut\,(M)$,то модуль (M, h) в точности изоморфен $\mathcal{G}$-модулю $\hat{G}$ с естественным действием группы Галуа $\mathcal{G}$.

Теорема. Пусть G является k-группой. Тогда соответствие $G \to \hat{G}$ определяет двойственность категории k-групп мультипликативного типа с категорией непрерывных $\mathcal{G}$-модулей конечного типа, где $\mathcal{G}$ – группа Галуа сепарабельного замыкания поля k.

Сверх того, для того, чтобы последовательность гомоморфизмов k-групп (MT)

$$1 \quad \to G' \to G \to G'' \to \quad 1$$

была точной, необходимо и достаточно, чтобы двойственная последовательность $\mathcal{G}$-модулей рациональных характеров

$$0 \quad \to \hat{G}'' \to \hat{G} \to \hat{G}' \to \quad 0$$

была точной. $\triangle$

Пример 5. Как построить по $\mathcal{G}$-модулю M конечного типа k-группу (МТ) G? Имеем представление $h : \mathcal{G} \to Aut(M)$. Из непрерывности h, компактности $\mathcal{G}$ и дискретности $Aut(M)$ следует, что $Im(h)$ –конечная группа, пусть $\mathcal{H} = Ker(h)$. Рассмотрим групповое кольцо $k_s[M]$ как $\mathcal{G}$-модуль с действием на M и естественным действием на k_s. Пусть $A = k_s[M]^{\mathcal{G}}$ – алгебра инвариантов, она имеет конечный тип над полем k, $Spec\, A = G$ и есть искомая групповая схема.

Для k-группы G (МТ), определяемой представлением $h : \mathcal{G} \to Aut(\hat{G})$, конечную группу $h(\mathcal{G}) \subset Aut(\hat{G})$ назовем *группой разложения* схемы G. Пусть $L = k_s^{\mathcal{H}}$ – поле инвариантов , $\Pi = Gal(L/k) \cong \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Нетрудно видеть, что L есть пересечение всех полей разложения k-группы G, содержащихся в k_s. Таким образом, L есть минимальное поле разложения группы G, степень расширения L/k равна порядку группы разложения.

Пример 6.Алгебраический тор. Групповая k-схема T называется алгебраическим тором, если

$$T \otimes_k \bar{k} \quad \cong D_{\bar{k}}(Z^n) = G^n_{m,\bar{k}}.$$

Категория алгебраических k-торов дуальна категории $\mathcal{G}$-модулей конечного типа без кручения. Пусть L/k – конечное расширение Галуа, над которым тор T распадается, $\Pi = Gal(L/k)$. Тогда для всякой k-алгебры A имеем

$$T(A) = T(A_L)^{\Pi} = Hom(\hat{T}, A_L^*)^{\Pi} = Hom_{\Pi}(\hat{T}, A_L^*) =$$
$$= (\hat{T}^0 \otimes A_L^*)^{\Pi}, \quad \hat{T}^0 = Hom(\hat{T}, Z), \quad A_L = L \otimes_k A.$$

Пример 7. Полем разложения k-группы $\mu_{n,k} = D_k(Z/nZ)$ является само поле k, хотя группа точек $\mu_n(k)$ может сводиться к 1. Если поле k содержит все корни степени n из единицы и характеристика поля k не делит n, то $\mu_{n,k}$ – постоянная k-группа.

Пример 6 указывает на возможность следующего определения алгебраического тора. Пусть L/k – конечное расширение Галуа, $\Pi = Gal(L/k)$, $\hat{T}$ – Π-модуль без кручения конечного ранга, A – коммутативная k-алгебра. Тор T над полем k, разложимый над L, есть групповая k-схема, представляющая функтор

$$A \quad \to \quad Hom_{\Pi}(\hat{T}, (L \otimes_k A)^*)$$

.

3.5. Главные однородные пространства. Пусть G есть S-группа, а X – схема над S. Говорят, что G действует слева на схеме X, если задан S-морфизм $G \times_S X \to X$ такой, что для всякой S-схемы Y, для которой $X(Y) \neq \emptyset$, отображение $G(Y) \times X(Y) \to X(Y)$ определяет обычное действие группы $G(Y)$ на множестве $X(Y)$, функторное по Y.

Рассмотрим очень частный случай, когда G есть алгебраическая k-группа, действующая на k-многообразии X просто транзитивно, т.е. для каждой точки $x \in X(k_s)$ отображение $g \to gx$ является биекцией множества $G(k_s)$ на $X(k_s)$. Многообразие X называется *главным однородным пространством* (ГОП) k-группы G. В случае,

когда $X(k) \neq \emptyset$, многообразия G и X изоморфны над полем k и X называется тривиальным (ГОП).

Пример 8. Пусть $G = SO(2)$ – линейная группа над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, определяемая общей точкой

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1,$$

а X – многообразие над $\mathbf{R}$ с общей точкой

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad x^2 + y^2 = -1,$$

Матричное умножение определяет $\mathbf{R}$- морфизм $G \times_{\mathbf{R}} X \to X$. Ясно, что $X(\mathbf{R}) = \emptyset$, а $X_{\mathbf{C}}$ есть тривиальное (ГОП) группы G, таким образом X – нетривиальное (ГОП) $\mathbf{R}$- группы G.

Два (ГОП) X и X' k-группы G называются изоморфными, если существует k-изоморфизм $h : X \to X'$ такой, что $h(gx) = gh(x), \quad g \in G(k_s), \quad x \in X(k_s)$. Пусть $\mathcal{P}(k, G)$ – множество классов (ГОП) относительно этого отношения эквивалентности. Пусть L – некоторое расширение поля k. Поле L называется полем разложения(ГОП) X, если $X \otimes_k L$ есть тривиальное (ГОП) группы G_L. Это равносильно условию $X(L) \neq \emptyset$. Поскольку всякое алгебраическое многообразие имеет точки со значениями в поле k_s, то всякое (ГОП) X алгебраической k-группы G имеет конечное сепарабельное поле разложения. Пусть L/k – расширение Галуа с группой Галуа П, $\mathcal{P}(L/k, G)$ – множество всех (ГОП) группы G, разложимых над L (с точностью до изоморфизма). Возьмем $X \in \mathcal{P}(L/k, G)$ и рассмотрим эквивариантный изоморфизм $f : G \to X$. Тогда коцикл $a_\sigma = f^{-1}(\sigma f)$ есть эквивариантный изоморфизм группы G_L на себя для каждого $\sigma \in$ П. Но каждый эквивариантный изоморфизм однозначно определяется сдвигом на элемент из $G(L)$.

Теорема. Пусть G – алгебраическая группа над полем k. Тогда множество главных однородных пространств $\mathcal{P}(k, G)$ биективно множеству $H^1(k, G(k_s))$.$\triangle$

Данная теорема допускает весьма существенное обобщение в этальной топологии Гротендика, а именно, для схемы X и групповой схемы G элемент множества $H^1_{et}(X, G)$ определяет схему главных однородных пространств над X (торсор), каждый слой которого есть (ГОП) над полем $k(x), \quad x \in X$. Некоторые примеры торсоров встретятся в дальнейшем.

Пример 9. Для любого конечного расширения Галуа L/k справедливо равенство $H^1(L/k, GL\,(n, L)) = 1$. В самом деле, пусть a_σ – коцикл со значениями в группе $GL\,(n, L)$, V – линейное пространство над полем k размерности n, $L \otimes_k V$ – пространство над L. Выбирая какой-нибудь базис $v_1, .., v_n$ в V, будем считать a_σ линейным оператором в $L \otimes_k V$. Мы видели, что оператор $h(\sigma) = a_\sigma(\sigma \otimes 1)$ обладает свойством $h(\sigma\tau) = h(\sigma)h(\tau)$. Пусть W – подпространство инвариантов действия группы $h(\Pi)$. Нетрудно показать, что $\dim W = n$ и, сверх того, $L \otimes_k W \cong LW = L \otimes_k V$. Пусть $w_1, .., w_n$ – базис пространства W над k. Существует оператор $b \in GL\,(L \otimes_k V)$ такой, что $bw_i = v_i$. Тогда $a_\sigma = b^{-1}(\sigma b)$.

Отметим частный случай $n = 1, \quad GL\,(1, L) = L^*$. Имеем $H^1(L/k, L^*) = 1$. Таким образом, равенство примера 9 является прямым обобщением теоремы 90 Гильберта.

Пример 10. Справедливо равенство $H^1(L/k, SL(n, L)) = 1$. Это вытекает из точной последовательности неабелевых когомологий

$$GL\,(n, k) \xrightarrow{\det} k^* \to H^1(L/k, SL\,(n, L)) \to H^1(L/k, GL\,(n, L))$$

и примера 9.

Теперь появилась возможность рассмотреть и более сложные примеры.

Пример 11. Формы аффинного пространства A^n. Очень трудной оказалась задача нахождения всех k-форм пространства $\mathbf{A}^n$. Дело в том, что группа $Aut_L(\mathbf{A}^n)$ для $n \geq 2$ не имеет конечной размерности, ряд гипотез о ее строении пока не доказан при $n \geq 3$. Имеется теорема Шафаревича, утверждающая, что $H^1(k, Aut_{k_s}(\mathbf{A}^2)) = 0$ т.е. не существует k-форм плоскости $\mathbf{A}^2$, отличных от $\mathbf{A}^2_k$. Доказательство состоит из нескольких этапов. Во-первых, показывается, что группа $G_L = Aut_L(\mathbf{A}^2)$ есть амальгамированное произведение двух групп G_1 и G_2 с отмеченной подгруппой H, где G_1 – группа аффинных преобразований плоскости $\mathbf{A}^2_L$, G_2 – группа "треугольных" преобразований: $x \to ax + c, \quad y \to by + f(x), \quad f(x)$ – многочлен, $H = G_1 \bigcap G_2$. Пусть a_σ – коцикл со значениями в группе G_L, $\Pi = Gal(L/k)$. Оператор $h : \sigma \to a_\sigma(\sigma \otimes 1)$ является k-гомоморфизмом группы Π в группу G_L и группа $h(\Pi)$ конечна. Из теории амальгамированных произведений известно, что любая конечная подгруппа в G_L сопряжена подгруппе в $G_i, \quad i = 1, 2$. Таким образом, задача сведена к доказательству тривиальности когомологий $H^1(L/k, G_1)$ и $H^1(L/k, G_2)$. Группы G_1 и G_2 обладают нормальными рядами с факторами L, L^* или $GL(2, L)$, а когомологии последних 1-тривиальны.

3.6. Проективная группа и созвездие сопутствующих k-форм. Группа $Aut_k(\mathbf{P}^n)$ всех k-автоморфизмов проективного пространства $\mathbf{P}^n$ изоморфна факторгруппе $GL(n+1, k)/k^*$, она обозначается $PGL(n+1, k)$. Поэтому множество $H^1(k, PGL(n+1, k_s))$ описывает все формы проективного пространства $\mathbf{P}^n_k$ с точностью до изоморфизма. Всякая k-форма пространства $\mathbf{P}^n$ называется многообразием Севери-Брауэра размерности n. С другой стороны, группа $PGL(n+1, k_s)$ может быть истолкована как группа дробно-линейных автоморфизмов поля рациональных функций $k_s(x_1, .., x_n)$. Как и в примере 11 всякий коцикл a_σ группы $\mathcal{G}$ со значениями в $PGL(n+1, k_s)$ определяет непрерывное представление $h : \mathcal{G} \to PGL(n+1, k_s)$ и группа $h(\mathcal{G}) = W$ – конечна. Подполе инвариантов $F = k_s(x_1, .., x_n)^W$ обладает свойствами: $F \cap k_s = k, \quad Fk_s = k_s(x_1, .., x_n)$, F есть поле рациональных функций $k(X)$ на многообразии Севери-Брауэра X, которое определяется тем же коциклом a_σ.

Еще одна очень важная ипостась группы $PGL(n)$. Пусть $M(n, k)$ – алгебра всех квадратных матриц порядка n с коэффициентами из поля k. Известно, что всякий автоморфизм этой алгебры является внутренним, т.е. группа $Aut(M(n, k))$ изоморфна группе $PGL(n, k)$.Поэтому когомологии $H^1(k, PGL(n, k_s))$ описывают также множество всех простых центральных k-алгебр ранга n^2 с точностью до изоморфизма.

Итак, каждый элемент $h \in H^1(k, PGL(n))$ однозначно определяет многообразие Севери-Брауэра X_h, поле F_h и центральную простую алгебру Λ_h. Язык схем позволяет дать элегантное описание этих объектов и их связей между собой. Но сначала одно замечательное наблюдение.

Пример 12. Параметризация левых идеалов матричной алгебры. Пусть V – векторное пространство над полем k размерности n,

$$E = End(V) = V^* \otimes_k V \cong M(n, k), \quad Gr(E, n)$$

– многообразие Грассмана n-мерных подпространств n^2-мерного пространства E. Выберем базис $e_1, .., e_n$ в V и дуальный базис $f_1, .., f_n$ в V^*. Пусть $a = (a_1, .., a_n) \in V, \ a \neq 0, \ f = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n, \ a_i \in k$. Вектор a определяет n-мерное подпространство $< f > \otimes_k V$ в $V^* \otimes V = E$, где $< f >$ – одномерное подпространство, порожденное функцией f. Если $a = \lambda a', \quad \lambda \in k$, и f' – линейная форма, соответствующая вектору

a', то $< f >=< f' >$. Таким образом, имеем инъективное отображение

$$\varphi : P(V) \to Gr(E, k),$$

где $P(V)$ – проективизация пространства V. Заметим теперь, что $< f > \otimes_k V$ является левым идеалом в E. Обратно, если $\mathbf{a}$ – левый идеал в E такой, что $\mathbf{a} \oplus \mathbf{a}' = E$, $\dim \mathbf{a} = n$, то правое действие алгебры E на линейном пространстве V^* определяет одномерное пространство $< f >= V^*\mathbf{a} \subset V^*$. Имеем прямую сумму $< f > \oplus V_1^* = V^*$, откуда $E = (< f > \otimes_k V) \oplus (V_1^* \otimes_k V)$. Поскольку $\mathbf{a} \cdot 1 = \mathbf{a}$ и $V_1^*\mathbf{a} = 0$, то $\mathbf{a} =< f > \otimes_k V$. Итак, множество $\varphi(P(V))$, изоморфное $\mathbf{P}^{n-1}(k)$, есть подмножество в $Gr(E, n)$, параметризующее множество всех левых идеалов ранга n алгебры $M(n, k)$. Поскольку свойство быть левым идеалом задается системой алгебраических уравнений на плюккеровы координаты в $Gr(E, n)$, то множество $\varphi(P(V))$ замкнуто в $Gr(E, n)$.

Пусть теперь Λ – центральная простая алгебра над полем k размерности n^2, $Gr(\Lambda, n)$ – многообразие Грассмана n-мерных подпространств векторного k-пространства Λ. Для любой коммутативной k-алгебры A имеем

$$Gr(\Lambda, n)(A) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{множество прямых слагаемых } A - \textit{модуля } A \otimes_k \Lambda, \\ \textit{имеющих постоянный ранг } n. \end{array} \right.$$

Рассмотрим подфунктор X_Λ этого функтора

$$X_\Lambda(A) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{множество прямых слагаемых } A - \textit{модуля } A \otimes_k \Lambda, \\ \textit{ранга } n, \textit{ являющихся левыми идеалами.} \end{array} \right.$$

Если L/k – расширение полей, то $X_{L \otimes_k \Lambda} = X_\Lambda \otimes_k L$. Поскольку алгебра Λ расщепляется над расширением k_s, то X_Λ есть k-форма $\mathbf{P}_k^{n-1}$, т.е., X_Λ является многообразием Севери - Брауэра. Вложение $X_\Lambda \to Gr(\Lambda, n)$ есть замкнутый k-морфизм, это реализация многообразия Севери - Брауэра в качестве проективного многообразия. На грассманиане $Gr(\Lambda, n)$ имеется каноническое векторное расслоение ранга n, сопоставляющее каждой точке векторное пространство размерности n /тавтологическое расслоение/, пусть J - его ограничение на X_Λ. Каждый слой является левым идеалом, поэтому J есть левый $O_X \otimes_k \Lambda$ модуль, где O_X - структурный пучок на $X = X_\Lambda$. Пучок J^* является правым $O_X \otimes_k \Lambda$ – модулем. Имеем естественный гомоморфизм пучков O_X - алгебр

$$O_X \otimes_k \Lambda \to J^* \otimes_{O_X} J = End_{O_X}(J)$$

При расширении поля k до k_s он становится изоморфизмом, а, значит, был изоморфизмом с самого начала. Следующие изоморфизмы показывают, что поле $F = k(X)$ является полем разложения алгебры Λ, а, значит, и k - схемы X_Λ.

$$F \otimes_k \Lambda = F \otimes_{O_X} (O_X \otimes_k \Lambda) = F \otimes_{O_X} (J^* \otimes_{O_X} J) \cong$$

$$\cong J^* \otimes_{O_X} (F \otimes_{O_X} J) \cong J^* \otimes_{O_X} F^n \cong (F^n)^* \otimes_F F^n \cong M(n, F)$$

Поле $F = k(X)$ называется общим полем разложения алгебры Λ, оно обладает свойством универсальности, т.е., если L/k расщепляет k-алгебру Λ,то существует k-точка $\varphi : F \to L$ и обратно. Поля $k(X)$, $X = X_\Lambda$ сыграли существенную роль в исследованиях Меркурьева и Суслина в теории норменных вычетов, Суслин [1].

3.7. Группа Брауэра поля. В п.1.8 было отмечено, что группа $H^2(k, k_s^*)$ изоморфна группе Брауэра поля k, группа $Br\, k$ периодична. Будем предполагать, что характеристика поля k равна нулю. Из точной последовательности Куммера

$$1 \to \mu_n \to \bar{k}^* \xrightarrow{n} \bar{k}^* \to 1, \quad \mu_n = \mu_n(\bar{k}),$$

и соотношения $H^1(k, \bar{k}^*) = 0$ получаем изоморфизм $H^1(k, \mu_n) =_n (Br\, k)$, где ${}_n(Br\, k)$ – подгруппа элементов группы Брауэра, порядок которых делит n. С другой стороны, каждый элемент множества $H^1(k, PGL_n)$ представляет собой алгебру ранга n^2, которая имеет порядок в группе Брауэра делящей n. Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & \to & \mu_n & \to & G_m & \stackrel{n}{\to} & G_m & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
1 & \to & SL_n & \to & GL_n & \stackrel{\det}{\to} & G_m & \to & 1, \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & PGL_n & = & PGL_n & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & & &
\end{array}$$

из которой получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{lll}
H^1(k, PGL_n) & & \\
 & \stackrel{\varphi}{\searrow} & \\
\varphi_1\downarrow & & \\
H^2(k, \mu_n) & \stackrel{i}{\longrightarrow} & H^2(k, G_m),
\end{array}$$

где все стрелки являются инъективными отображениями, для доказательства инъективности φ_1 требуются некоторые дополнительные рассуждения. Таким образом, φ является вложением множества $H^1(k, PGL_n)$ в ${}_n(Br\, k) \subset Br\, k$. Напомним, что всякий элемент $[A] \in Br\, k$ имеет индекс: $ind[A] = indA = \sqrt{\dim D}$, где D – тело над k, однозначно определяемое из изоморфизма $A \cong M(r, D)$. Образ $\varphi(H^1(k, PGL_n)$ состоит из тех элементов в группе $Br\, k$, индекс которых делит n. Для некоторых полей k в группе Брауэра выполняется соотношение $ind[A] = exp[A]$. В этом случае $H^1(k, PGL_n) =_n (Br\, k)$ и множество $H^1(k, PGL_n)$ является коммутативной группой.

Пример 13. Группа

$$Br\, \mathbf{R} = H^2(\mathbf{C}/\mathbf{R}, \mathbf{C}^*) = H^2(\mathbf{C}/\mathbf{R}, \mu_2) = H^0(\mathbf{C}/\mathbf{R}, \mu_2) = \mu_2 = H^1(\mathbf{C}/\mathbf{R}, PGL(2, \mathbf{C})).$$

Нетривиальный элемент группы $Br\, \mathbf{R}$ есть алгебра кватернионов.

Пример 14. Пусть f – невырожденная квадратичная форма от $n \geq 3$ переменных над полем k характеристики не равной двум, $SO(f)$ – соответствующая унимодулярная ортогональная группа, $Spin(f)$ – ее универсальная накрывающая. Имеем точную последовательность

$$1 \to \mu_2 \to Spin(f) \to SO(f) \to 1,$$

из которой получаем точную когомологическую последовательность

$$Spin(f, k) \to SO(f, k) \stackrel{\delta}{\to} k^*/(k^*)^2 \to H^1(k, Spin(f)) \to\to H^1(k, SO(f)) \stackrel{\Delta}{\to}_2 (Br\, k).$$

Гомоморфизм δ называется спинорной нормой, которая определяется исходя из алгебры Клиффорда $Cl(f)$, задающей группу $Spin(f)$. Пример 4 показывает, что множество $H^1(k, SO(f))$ классифицирует квадратичные формы от n переменных над

полем k, имеющих тот же дискриминант, что и форма f. Если h одна из таких форм, то $\Delta(h)$ есть инвариант Хассе-Витта формы h, Серр [1]. В частности, для того, чтобы $H^1(k, Spin(f)) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

1) отображение спинорной нормы δ сюръективно,

2) каждая квадратичная форма, имеющая тот же дискриминант и инвариант Хассе-Витта, что и f, ей эквивалентна.

В случае арифметических полей можно получить значительно более точные сведения. Обстоятельное исследование провел Ж-П.Серр [1].

3.8. Группы Шевалле. Вернемся к теме, обозначенной в п.3.3. Напомним основные факты из теории полупростых алгебраических групп, определенных над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Пусть G – связная полупростая комплексная группа, $\mathbf{g}$ – ее алгебра Ли. На время группу комплексных точек $G(\mathbf{C})$ снова обозначим символом G. Имеем присоединенное представление $Ad : G \to Aut(\mathbf{g})$, ядром которого является конечный центр $Z(G)$ группы G. Пусть h – форма Киллинга на алгебре $\mathbf{g} : h(X, Y) = tr(adX \cdot adY)$. Форма h инвариантна относительно всех автоморфизмов алгебры $\mathbf{g}$ и невырождена. Пусть T – максимальный тор в G, он совпадает со своим централизатором , все максимальные торы в G сопряжены, число $l = \dim T$ называется рангом группы G. Обозначим через $\mathbf{h}$ подалгебру в $\mathbf{g}$, соответствующую тору T, $\mathbf{h}$ называется подалгеброй Картана алгебры $\mathbf{g}$, она является максимальной коммутативной подалгеброй в $\mathbf{g}$. Пусть χ – характер тора T, $\chi : T \to \mathbf{C}^*$; тогда дифференциал этого отображения, вычисленный в единице группы есть линейное отображение $d\chi : \mathbf{h} \to \mathbf{C}$, причем отображение $\chi \to d\chi$ определяет мономорфизм группы $X(T)$ в группу $\mathbf{h}^* = Hom(\mathbf{h}, \mathbf{C})$, который позволяет отождествить группу характеров $X(T)$ с некоторой подгруппой $\hat{T}$ в пространстве $\mathbf{h}^*$, которая порождает пространство $\mathbf{h}^*$ и ранг группы $\hat{T}$ совпадает с размерностью пространства $\mathbf{h}^*$. Такого сорта подгруппы будем называть в дальнейшем *решетками.* Хотя группы $X(T)$ и $\hat{T}$ изоморфны, мы не будем их отождествлять. Пусть

$$\hat{T}^0 = \{H \in \mathbf{h} \mid d\chi(H) \in \mathbf{Z} \quad \forall \chi \in X(T)\} \cong Hom(\hat{T}, \mathbf{Z}).$$

Имеем эпиморфизм $\exp : \mathbf{h} \to T$, нетрудно заметить, что $\hat{T}^0 = Ker(e)$, где $e(H) = \exp(2\pi i H)$, $\hat{T}^0$ – решетка в $\mathbf{h}$. Для всякого характера χ тора T определим подпространство

$$\mathbf{g}^\chi = \{X \in \mathbf{g} \mid Ad(t)X = \chi(t)X \quad \forall t \in T\}.$$

Это инвариантное подпространство присоединенного действия тора T в $\mathbf{g}$. Его можно определить также соотношениями

$$\mathbf{g}^\alpha = \{X \in \mathbf{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X \quad \forall H \in \mathbf{h}\}, \qquad \alpha = d\chi.$$

Элемент $\alpha \in \hat{T}$ называется корнем алгебры $\mathbf{g}$,если $\alpha \neq 0$ и $\mathbf{g}^\alpha \neq 0$. Множество R всех корней конечно, пусть $Q(R)$ – подгруппа в $\hat{T}$, порожденная всеми корнями, $Q(R)$ является решеткой в $\hat{T}$, поэтому $Q(R)$ имеет конечный индекс в $\hat{T}$. Наличие инвариантной невырожденной формы Киллинга h позволяет получить дополнительную информацию. Оказывается,

1) пространства $\mathbf{g}^\alpha$ – одномерны;

2) если $\alpha + \beta \neq 0$, то $\mathbf{g}^\alpha$ и $\mathbf{g}^\beta$ ортогональны;

3) если $\alpha \in R$ то $-\alpha \in R$;

4) пространство $\mathbf{h}^\alpha = [\mathbf{g}^\alpha, \mathbf{g}^{-\alpha}]$ – одномерно, существует единственный элемент $H_\alpha \in \mathbf{h}^\alpha$ такой, что $\alpha(H_\alpha) = 2$;

5) для каждого $X_\alpha \in \mathbf{g}^\alpha, \quad X_\alpha \neq 0$, существует единственный элемент $Y_\alpha \in \mathbf{g}^{-\alpha}$, такой, что $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$, причем, $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha, \quad [H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha$.

Пример 15. Рассмотрим алгебру $sl(2, \mathbf{C})$ квадратных матриц второго порядка со следом нуль. Это алгебра Ли группы $SL\,(2, \mathbf{C})$. Каноническим базисом в $sl(2, \mathbf{C})$ является базис X, Y, H, где

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y.$$

Пусть α – корень произвольной полупростой алгебры $\mathbf{g}$ и φ_α – мономорфизм, отображающий алгебру $sl(2, \mathbf{C})$ в $\mathbf{g}$ и переводящий тройку (X, Y, H) в $(X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha)$. Гомоморфизм φ_α однозначно определяет гомоморфизм групп $\mu_\alpha : SL\,(2, \mathbf{C}) \to G$ такой,что $\varphi_\alpha = d\mu_\alpha$. Соотношение $\mu_\alpha(\exp H) = \exp(d\mu_\alpha(H))$ вместе с равенством $\exp(2\pi i H) = E$ показывает, что $H_\alpha \in Ker\,(e) = \hat{T}^0$. Отсюда важное свойство

6) $\lambda(H_\alpha) \in \mathbf{Z}, \quad \lambda \in \hat{T}$.

Пусть

$$P(R) = \{\lambda \in \mathbf{h}^* | \lambda(H_\alpha) \in \mathbf{Z} \quad \forall \alpha \in R\}$$

решетка весов системы R. Имеем включения

$$Q(R) \subset \hat{T} \subset P(R).$$

Теорема 1. Пусть G – связная комплексная полупростая алгебраическая группа, $\pi_1(G)$ – ее фундаментальная группа. Тогда

$$Z(G) \cong \hat{T}/Q(R), \quad \pi_1(G) \cong P(R)/\hat{T}. \quad \triangle$$

Теорема 2. Для всякой подгруппы $M \subset \mathbf{h}^*$ такой, что $Q(R) \subset M \subset P(R)$, существует связная полупростая комплексная группа G и максимальный тор T в G, такие, что алгебра Ли группы G совпадает с $\mathbf{g}$, а $\hat{T}$ с M. Группа G определяется решеткой M однозначно с точностью до изоморфизма. $\triangle$

Если $\hat{T} = P(R)$, то группа G называется *односвязной*, если $\hat{T} = Q(R)$, группа G называется *присоединенной.*

Символом $R^\vee$ обозначим систему $\{H_\alpha, \quad \alpha \in R\}$. Группу, порожденную системой $R^\vee$ в $\mathbf{h}$, обозначим $Q(R^\vee)$, видно, что $Q(R^\vee)$ дуальна $P(R)$. Аналогично, $P(R^\vee) = Q(R)^0 \subset \mathbf{h}$. Имеем

$$Q(R^\vee) \subset \hat{T}^0 \subset P(R^\vee).$$

Пусть теперь N – нормализатор тора T в G, фактор-группа $W = N/T$ точно действует внутренними автоморфизмами $Int_G(m)$ на торе T, $m \in N$; а, поскольку группа $Aut\,T \cong GL\,(n, \mathbf{Z})$, то W, как нульмерная алгебраическая группа, конечна. Группа W называется *группой Вейля* группы G относительно тора T. Поскольку все максимальные торы в G сопряжены между собой, то их группы Вейля изоморфны. По принципу переноса структур определяется действие группы Вейля и на других объектах: группе $X(T)$, $\hat{T}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{h}^*$. Перенести действие группы W на всю группу G или алгебру $\mathbf{g}$ нельзя, поскольку действие оператора $Int(m)$ вне T или $\mathbf{h}$ уже начинает зависеть от выбора элемента m. Однако, некоторую информацию получить все же можно, так как тор T действует операторами $Ad(t)$ на каждом из подпространств

$\mathbf{g}^\alpha$, $\alpha \in R$. Поэтому подпространство $Ad(m)\mathbf{g}^\alpha$ не зависит от выбора $m \in w \in W$, оно будет обозначаться $w\mathbf{g}^\alpha$. Оказывается, $w\mathbf{g}^\alpha = \mathbf{g}^{w\alpha}$, поэтому $w\alpha \in R$. Таким образом, группа Вейля переставляет корни. Группа Вейля группы $SL\,(2, \mathbf{C})$ имеет порядок два и порождена элементом

$$m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $m_\alpha = \mu_\alpha(m)$, тогда $m_\alpha \in N$ и m_α определяет элемент $w_\alpha \in W$, при этом

$$w_\alpha^2 = 1, \quad w_\alpha(\alpha) = -\alpha, \quad w_\alpha(X_\alpha) = Y_\alpha, \quad w_\alpha(H_\alpha) = -H_\alpha,$$

$$w_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha, \quad \lambda \in \mathbf{h}^*.$$

Теорема 3. Система R является приведенной, т.е. 2α не является корнем . Группа Вейля порождена инволюциями w_α. $\triangle$

Ограничение формы Киллинга h на $\mathbf{h}$ невырождено, следовательно, h определяет изоморфизм f между пространствами $\mathbf{h}^*$ и $\mathbf{h}$. Определим скалярное произведение в пространстве $\mathbf{h}^*$ по правилу

$$(\lambda, \mu) = h(f(\lambda), f(\mu)),$$

оно инвариантно относительно группы W. Действие группы W на $\mathbf{h}^*$ может быть представлено в явном виде

$$w_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2(\alpha, \lambda)}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \quad \alpha \in R, \quad \lambda \in \mathbf{h}^*.$$

Пусть $A(R)$ – группа всех линейных преобразований пространства $\mathbf{h}^*$, переводящих систему R в себя, группа Вейля $W(R)$ отождествляется с нормальным делителем в $A(R)$. Форма (λ, μ) инвариантна также и относительно группы $A(R)$.

Пусть B – подгруппа Бореля в G, содержащая тор T. Напомним, что B – максимальная разрешимая подгруппа в G, содержащая T, она связна, совпадает со своим нормализатором, многообразие G/B – проективно, все борелевские подгруппы сопряжены в группе G. Пусть $m \in N$, тогда mBm^{-1} снова содержит тор T и mBm^{-1} не зависит от выбора элемента m в $w \in W$. Обозначим группу mBm^{-1} через ${}^wB$. Таким образом, группа Вейля переставляет борелевские подгруппы, содержащие данный тор T. Для всякого $\alpha \in R$ имеем в $\mathbf{h}$ гиперплоскость $P_\alpha = \{H \in \mathbf{h} \mid \alpha(H) = 0\}$. Гиперплоскости P_α разбивают $\mathbf{h}$ на конечное число многогранных выпуклых конусов.Множество $\mathbf{h} \setminus \bigcup_{\alpha \in R} P_\alpha$ распадается на связные компоненты, которые называются *камерами Вейля*. Группа Вейля переставляет камеры, причем это действие однотранзитивно. Количество камер Вейля, таким образом, равно порядку группы Вейля. Пусть C – камера Вейля, тогда $-C$ снова камера Вейля. Обозначим через $R(C)$ множество всех корней, положительных на C и не представимых в виде суммы корней, также положительных на C. Оказывается, система $R(C)$ состоит в точности из l корней, $l = \dim T$, при этом любой корень β представим в виде $\beta = b_1\alpha_1 + \cdots + b_l\alpha_l$, $\alpha_i \in R(C)$, где b_i – либо все неотрицательные, либо все неположительные целые числа. Система корней $\{\gamma_1, .., \gamma_l\}$, удовлетворяющая таким условиям, называется системой простых корней или базисом системы R. Задание системы простых корней позволяет разбить множество R на две части: положительных R^+ и отрицательных R^- корней, $R = R^+ \bigcup R^-$; $\alpha > 0$ означает, что $\alpha \in R^+$. Множество всех борелевских подгрупп группы G, содержащих тор T, находится в

биективном соответствии с множеством различных камер Вейля в $\mathbf{h}$. Группа $A(R)$ также переставляет камеры Вейля , но это действие можно описать более точно. Зафиксируем какой-нибудь базис $a = (a_1, .., a_l)$, для любого $g \in A(R)$ множество $ga = (ga_1, .., ga_l)$ снова базис,поэтому существует единственный элемент $w_g \in W$ такой, что $w_g(a) = g(a)$, т.е. оператор $u_g = w_g^{-1} g$ есть перестановка элементов базиса a. Отображение $g \to u_g$ определяет гомоморфизм группы $A(R)$ в группу перестановок базисных элементов с ядром $W(R)$. Далее, операторы u_g образуют подгруппу симметрий $Sym(R)$ системы корней и группа $A(R)$ есть полупрямое произведение нормальной подгруппы $W(R)$ и группы $Sym(R)$. Набору простых корней сопоставляется некоторый граф, называемый диаграммой Дынкина. Вершинами этого графа являются простые корни, две вершины α_i и α_j соединяются $m_{ij} =< \alpha_i, \alpha_j >< \alpha_j, \alpha_i >$ связями, где $< \alpha, \beta >= \frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$, причем стрелка направлена к более короткому из двух корней, если они имеют неравную длину. Числа $< \alpha_i, \alpha_j >$ называются числами Картана . Кратность ребра схемы Дынкина равна 1,2 или 3. Схема Дынкина R определяет эту систему однозначно, с точностью до изоморфизма. Полупростая алгебра проста тогда и только тогда, когда ее диаграмма Дынкина связна, в общем случае связные компоненты схемы Дынкина взаимно-однозначно соответствуют простым идеалам $\mathbf{g_i}$ алгебры $\mathbf{g}$, $\mathbf{g} = \oplus \ \mathbf{g_i}$.

В определении элементов X_α в пространствах $\mathbf{g}^\alpha$ имеется небольшой произвол. Шевалее показал, что можно выбрать базис $\{X_\alpha, H_\beta\}$ алгебры $\mathbf{g}$ таким образом, чтобы структурные константы стали целыми числами. Пусть $\mathbf{g_Z}$ – аддитивная подгруппа в $\mathbf{g}$, порожденная базисом Шевалле. Поскольку структурные константы целые, то $\mathbf{g_Z}$ есть алгебра Ли над кольцом $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{g} = \mathbf{C} \otimes \mathbf{g_Z}$ ($\mathbf{g_Z}$ есть целая форма алгебры $\mathbf{g}$). Алгебра $\mathbf{g_Z}$ представима в виде прямой суммы

$$\mathbf{g_Z} = Q(R^\vee) \oplus_{\alpha \in R} \mathbf{Z} X_\alpha .$$

Пусть теперь V – пространство точного представления группы G. В пространстве V всегда можно выбрать подгруппу L со свойствами:

1) ранг L равен размерности V и $\mathbf{C}L = V$,

2) решетка L инвариантна относительно всех эндоморфизмов

$$v \ \to \ (X_\alpha^n / n!) v.$$

Группа L называется допустимой решеткой $\mathbf{g}$- модуля V. Пусть

$$\mathbf{g}(L) = \{X \in \mathbf{g} \mid XL \subset L\} = \mathbf{h} \cap \mathbf{g}(L) \oplus_{\alpha \in R} \mathbf{Z} X_\alpha .$$

Оказывается, что $\mathbf{h} \cap \mathbf{g}(L) = \hat{T}^0$, таким образом, $\mathbf{g}(L) \supset \mathbf{g_Z}$. Всякую алгебру Ли $\tilde{\mathbf{g}}$ над кольцом $\mathbf{Z}$, такую, что $\tilde{\mathbf{g}} \supset \mathbf{g_Z}$, $\mathbf{C} \otimes \tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}$, назовем $\mathbf{Z}$-формой алгебры $\mathbf{g}$.

Теорема 4. Все $\mathbf{Z}$-формы алгебры $\mathbf{g}$, содержащие $\mathbf{g_Z}$, исчерпываются формами вида

$$M^0 \oplus_\alpha \mathbf{Z} X_\alpha ,$$

где M^0 пробегает все решетки между $Q(R^\vee)$ и $P(R^\vee)$. $\triangle$

Выбирая базис решетки L, получим точное представление группы G в группу $GL\,(n, \mathbf{C})$, $n = \dim V$. Выберем координатные функции g_{ij} на группе $GL\,(n, \mathbf{C})$ и рассмотрим $\mathbf{Z}$-форму $G_\mathbf{Z}$ группы G, определяемую кольцом $A = \mathbf{Z}[g_{11}, .., g_{nn}]/\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ – идеал функций, аннулирующих образ группы G в $GL\,(n, \mathbf{C})$, $G_\mathbf{Z} = Spec\, A$. А.Борель показывает, что групповая схема $G_\mathbf{Z}$ является гладкой и редукция $G_\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ неприводима для любого простого p. Групповые схемы $G_\mathbf{Z}$ называются *группами Шевалле*,

они возникли при исследовании комплексных полупростых групп, тем замечательнее звучит следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть k – произвольное алгебраически замкнутое поле, H – связная полупростая алгебраическая группа над k. Тогда существует групповая схема Шевалле $G_{\mathbf{Z}}$ такая, что $H = G_{\mathbf{Z}} \otimes k$. $\triangle$

Пусть теперь поле k не обязательно замкнуто. Полупростые группы G вида $G_{\mathbf{Z}} \otimes k$ также называются группами Шевалле над k, они характеризуются тем, что обладают максимальными k-торами, диагонализируемыми над полем k. Любая связная полупростая алгебраическая группа, определенная над полем k, является k-формой некоторой группы Шевалле.

3.9. Полупростые группы. Пусть G – связная полупростая алгебраическая группа над полем k, $\mathcal{G} = Gal\,(k_s/k)$, $\bar{G} = G \otimes_k k_s$ – группа Шевалле над k_s. Выберем в G максимальный тор T, определенный над k, тор $\bar{T} = T \otimes_k k_s$ остается максимальным и в $\bar{G}$. Пусть $\mathbf{g}$ – k-алгебра Ли группы G, $\mathbf{h}$ – ее подалгебра Картана, определяемая тором T. Пара $(\bar{G}, \bar{T})$ определяет группу Вейля W, систему корней R и т.д. Имеем разложение

$$k_s \otimes_k \mathbf{g} = \mathbf{g}^0 \oplus_\alpha \mathbf{g}^\alpha, \quad \mathbf{g}^0 = k_s \otimes_k \mathbf{h}.$$

Группа Галуа $\mathcal{G}$ переставляет компоненты $\mathbf{g}^\alpha$, $\sigma(\mathbf{g}^\alpha) = \mathbf{g}^{\sigma\alpha}$, $\sigma \in \mathcal{G}$, причем, если $\mathbf{g}^\alpha \neq 0$, то и $\sigma(\mathbf{g}^\alpha) \neq 0$. Следовательно, если $\alpha \in R$, то и $\sigma(\alpha) \in R$. Операторы σ линейно действуют на $Q(R)$, поэтому действие группы $\mathcal{G}$ на R определяет гомоморфизм $\varphi : \mathcal{G} \to A(R)$. Поскольку решетка корней $Q(R)$ имеет конечный индекс в группе характеров $\hat{T}$, то действие группы $\mathcal{G}$ на корнях позволяет восстановить действие группы $\mathcal{G}$ на $\hat{T}$, а это, в свою очередь, полностью определяет строение самого тора T. Заметим, что *группа разложения* $\varphi(\mathcal{G})$ изоморфна группе Галуа минимального расширения поля k, над которым тор T полностью распадается.

Пусть B – борелевская подгруппа в $\bar{G}$, содержащая тор $\bar{T}$. Она определяет систему простых корней $\Delta = (\alpha_1, .., \alpha_l)$, $l = \dim T$. Система $\sigma\Delta = (\sigma\alpha_1, .., \sigma\alpha_l)$ – снова базис, поэтому существует единственный элемент $w_\sigma \in W$ такой, что $w_\sigma(\sigma\Delta) = \Delta$. Для $\alpha_i \in \Delta$ положим $\sigma^*(\alpha_i) = (w_\sigma \cdot \sigma)(\alpha_i) = \alpha_j$. Нетрудно показать, что $(\sigma\tau)^* = \sigma^* \cdot \tau^*$ и $w_{\sigma\tau} = w_\sigma \cdot (\sigma w_\tau)$ – коцикл.

Если теперь забыть действие группы Галуа $\mathcal{G}$ на $\bar{G}$ и на всех объектах, определяемых схемой $\bar{G}$, то получим, как и в п.3.8, групповую схему Шевалле G_Z и изоморфизм $f : G_Z \otimes k_s \to G \otimes_k k_s$. Коцикл $a_\sigma = f^{-1}(\sigma f)$ имеет значения в группе $Aut_{k_s}(G_Z)$. Вопрос о классификации полупростых групп над незамкнутым полем k сводится к описанию множества $H^1(k, Aut_{k_s}(G_{\mathbf{Z}})$. Структура группы $Aut_{k_s}(G_{\mathbf{Z}})$ явно описывается. Вложение $Q(R) \subset \hat{T} \subset P(R)$ определяет цепочку накрытий $\tilde{G}_{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\pi} G_{\mathbf{Z}} \to G^0_{\mathbf{Z}}$ схем Шевалле, группа $\tilde{G}_{\mathbf{Z}}$ называется односвязной, $G^0_{\mathbf{Z}}$ – присоединенной, $Ker\,(\pi) = \pi_1(G_{\mathbf{Z}})$ – фундаментальная группа. Группа $Aut_{k_s}(\tilde{G}_{\mathbf{Z}})$ совпадает с группой автоморфизмов k_s-алгебры $k_s \otimes \mathbf{g}$, она является полупрямым произведением группы внутренних автоморфизмов $Int_{k_s}(\mathbf{g}) \cong G^0_Z(k_s)$ и группы симметрий $SymR$ диаграммы Дынкина. Группа автоморфизмов $Aut_{k_s}(G_{\mathbf{Z}})$ может быть представлена в виде подгруппы в группе $Aut_{k_s}(\tilde{G}_{\mathbf{Z}})$, состоящей из элементов, оставляющих инвариантной фундаментальную группу $\pi_1(G_{\mathbf{Z}})(k_s)$. Группа G есть схемный фактор $(G_Z \otimes k_s)/u(\mathcal{G})$, где $u(\sigma) = a_\sigma(1 \otimes \sigma)$. Поскольку $u(\mathcal{G})$ можно рассматривать как подгруппу в группе $Aut_k(\tilde{G}_{\mathbf{Z}} \otimes k_s)$, то это позволяет построить k-группу $\tilde{G} = (\tilde{G}_{\mathbf{Z}} \otimes k_s)/u(\mathcal{G})$ и естественный гомоморфизм $\varphi : \tilde{G} \to G$. Аналогично строится присоединенная группа G^0. Полупростую группу G над полем k будем называть односвязной, если $G = \tilde{G}$, и присоединенной, если $G = G^0$.

3.10. Внутренние и внешние формы. Поскольку группа $Aut_{k_s}(G_{\mathbf{Z}})$ есть полупрямое произведение групп $G^0_{\mathbf{Z}}(k_s) \times U$, где $G^0_{\mathbf{Z}}$ - присоединенная, а U лежит в группе $SymR$, то получаем диаграмму с точной строкой

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & H^1(k,U) & & \\ & & & & & & \gamma\downarrow & & \\ 1 & \to & H^1(k,G^0_{\mathbf{Z}}) & \stackrel{\alpha}{\to} & H^1(k,Aut_{k_s}(G_{\mathbf{Z}}) & \stackrel{\beta}{\to} & H^1(k,U), & & \end{array}$$

причем $\beta\gamma = Id$, поэтому отображение β сюръективно. Группа $\mathcal{G}$ действует тривиально на U, поэтому $H^1(k,U)$ есть множество неэквивалентных представлений группы $\mathcal{G}$ в U. Те k-формы G схемы $G_{\mathbf{Z}} \otimes k$, которые сответствуют элементам из $Im(\alpha) = Ker(\beta)$, называются *внутренними формами* группы Шевалле $G_{\mathbf{Z}} \otimes k$. Если $H^1(k,U) \neq 1$, то элементы $h \in H^1(k, Aut_{k_s}(G_Z))$, для которых $\beta(h) \neq 1$, определяют k-формы, которые называются *внешними формами* группы $G_{\mathbf{Z}} \otimes k$. В частности, пусть $h \in H^1(k,U)$, $h \neq 1$, тогда элемент $\gamma(h)$ определяет некоторую внешнюю форму G_h группы $G_{\mathbf{Z}} \otimes k$. Чтобы выяснить строение группы G_h, напомним, что автоморфизм $h(\sigma)$ действует перестановкой на системе простых корней Δ и однозначно продолжается до автоморфизма $\gamma(h)(\sigma)$ группы $G_{\mathbf{Z}} \otimes k$. Автоморфизм $\gamma(h)(\sigma)$ сохраняет группу Бореля B', соответствующую системе Δ, и максимальный тор $T' = G^l_{m,k}$, лежащий в группе B'. Группа G_h определяется как фактор $(G_{\mathbf{Z}} \otimes k_s)/u(\mathcal{G})$, где $u(\sigma) = \gamma(h)(\sigma)(1 \otimes \sigma)$, но, поскольку операторы $u(\sigma)$ действуют на T' и B', то $T = (G^l_m \otimes k_s)/u(\mathcal{G})$ и $B = (B' \otimes k_s)/u(\mathcal{G})$ – суть максимальный тор и группа Бореля в G_h, соответственно. Итак, все k-формы, определяемые элементами из $H^1(k,U)$, имеют борелевскую подгруппу, определенную над основным полем k. Такие группы называются *квазиразложимыми*. Диаграмма, приведенная выше, показывает, что в каждом слое $\beta^{-1}(h)$ имеется единственная квазиразложимая группа G_h, остальные группы этого слоя являются внутренними формами группы G_h, т.е. k-формами, полученными скручиванием посредством внутренних автоморфизмов группы $G_h \otimes_k k_s$. Принадлежность группы G к слою $\beta^{-1}(h)$ определяется оператором σ^*, который был рассмотрен в п.3.9, требуется совпадение $h(\sigma) = \sigma^*$.

Теорема. Пусть G – связная полупростая группа над полем k, T – максимальный k-тор в G, Δ – система простых корней пары $\bar{G}, \bar{T}$, $\mathcal{G} = Gal\,(k_s/k)$. Представление $\sigma \to \sigma^*$ однозначно определяет квазиразложимую k-группу G_0, внутренней формой которой является группа G. $\triangle$

Если $\sigma^* = Id$, то G есть внутренняя форма разложимой группы $G_{\mathbf{Z}} \otimes k$, $G \in \beta^{-1}(1)$. Кроме $G_{\mathbf{Z}} \otimes k$ других квазиразложимых групп в слое $\beta^{-1}(1)$ нет.

3.11. Почти простые полупростые группы. Назовем полупростую k-группу G почти простой, если группа $G \otimes_k \bar{k}$ не имеет собственных связных нормальных делителей. Поскольку группа G имеет универсальную накрывающую $\tilde{G}$, $G = \tilde{G}/\pi_1(G)$,то естественно начать с классификации односвязных почти простых групп. Классификация простых разложимых полупростых алгебр Ли хорошо известна, она определяется связными диаграммами Дынкина: это четыре классические серии A_n, B_n, C_n, D_n и пять исключительных схем: E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. Группы G, являющиеся k-формами классического типа, достаточно хорошо описаны в литературе, некоторые формы исключительных групп описываются при помощи Иордановых алгебр или алгебр Кэли, Вейль [2], Платонов-Рапинчук [1], Спрингер [1].

3.12. Функтор Вейля ограничения основного поля.Полезная операция овеществления комплексного линейного пространства приводит к более общей конструкции в теории схем. Пусть F – конечное сепарабельное расширение поля k степени n, $F = k(\alpha)$, α – корень минимального многочлена $f(x)$ с коэффициентами

из поля k степени n. В расширении k_s многочлен $f(x)$ имеет n различных корней $\alpha_1, .., \alpha_n$ и сопоставление $\alpha \to \alpha_i$ определяет вложение $f_i : F \to F_i \subset k_s, \quad F_i = k(\alpha_i)$. Группа Галуа $\mathcal{G} = Gal\,(k_s/k)$ переставляет поля F_i местами: $\sigma(\alpha_i) = \alpha_j, \ \sigma : F_i \to F_j$. Алгебра $k_s \otimes_k F$ есть прямая сумма полей

$$k_s \otimes_k F \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_n. \tag{1}$$

Этот изоморфизм следует из представления

$$k_s \otimes_k F = k_s[x]/(f) \cong \oplus_{i=1}^n k_s[x]/(x - \alpha_i), \quad L_i = k_s[x]/(x - \alpha_i) \cong k_s.$$

Разложение (1) эквивалентно разложению единицы

$$1 = e_1 + \cdots + e_n, \quad e_i \in L_i, \quad e_i^2 = e_i, \quad e_i e_j = 0.$$

Группа $\mathcal{G}$ транзитивно действует на множестве $\{e_1, .., e_n\}$. Это позволяет удобно описать действие группы $\mathcal{G}$ на $k_s \otimes_k F$:

$$a = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, \quad \sigma(a) = \sigma(a_1)\sigma(e_1) + \cdots + \sigma(a_n)\sigma(e_n). \tag{2}$$

Пусть $\mathcal{G}_1$ – подгруппа в $\mathcal{G}$, оставляющая неподвижной точку α_1. Соотношение (2) показывает, что $\mathcal{G}$-модуль $k_s \otimes_k F$ изоморфен индуцированному модулю $k_s \otimes_{\mathcal{G}_1} k[\mathcal{G}]$.

Пусть теперь X – алгебраическое многообразие над полем F, тогда k-схема $X \otimes_k k_s$ несвязна:

$$X \otimes_k k_s = X \otimes_F (F \otimes_k k_s) = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_n,$$

объединение определяется разложением (1), X_i – схемы над k_s. Группа $\mathcal{G}$ действует на объединении по правилу (2), это же действие переносится и на произведение $Y = X_1 \times \cdots \times X_n$. Имеем представление $h : \mathcal{G} \to Aut_k(Y)$. Фактор $Y/h(\mathcal{G})$, если он существует, обозначается $R_{F/k}(X)$, это многообразие над полем k, говорят, что оно получено из X ограничением основного поля. Операция $R_{F/k}$ была введена А.Вейлем в работе [1]. Заметим, что $R_{F/k}(X) \otimes_k k_s = X_1 \times \cdots \times X_n$. Рассмотрим этот изоморфизм более тщательно. Многообразие X_i определено над F_i, т.е. $X_i = Y_i \otimes_{F_i} k_s$, где Y_i есть F_i-схема. Пусть L – композит полей F_i в поле k_s, L – конечное расширение Галуа поля k. Тогда

$$R_{F/k}(X) \otimes_k L \cong (Y_1 \otimes_{F_1} L) \times \cdots \times (Y_n \otimes_{F_n} L),$$

L – минимальное поле разложения многообразия $R_{F/k}(X)$. Многообразие $R_{F/k}(X)$ всегда существует, если F-схема X – квазипроективна. В дальнейшем рассматриваются только те F-схемы X, для которых существует схема $R_{F/k}(X)$. Пусть A – коммутативная k-алгебра, тогда

$$R_{F/k}(X)(A) \ = \ [R_{F/k}(X)(k_s \otimes_k A)]^{\mathcal{G}} \ = \ [Y(k_s \otimes_k A)]^{\mathcal{G}} \ =$$

$$= [X_1(k_s \otimes A)]^{\mathcal{G}_1} \ = \ Y_1(F_1 \otimes_k A) \ = \ X(F \otimes_k A).$$

Таким образом, схема $R_{F/k}(X)$ представляет ковариантный функтор $A \longrightarrow X(F \otimes_k A)$ на категории коммутативных k-алгебр, или контравариантный функтор $Z \to X(Z \otimes_k F)$ на категории k-схем. Перечислим основные свойства функтора Вейля $R_{F/k}$.

1) Имеем биекцию, функториальную по Y

$$Hom_k(Y, R_{F/k}(X)) \cong Hom_F(Y \otimes_k F, X). \tag{3}$$

2) Для любых квазипроективных F- многообразий X_1 и X_2 имеем

$$R_{F/k}(X_1 \times_F X_2) = R_{F/k}(X_1) \times_k R_{F/k}(X_2).$$

3) Если $u : X \to Y$ морфизм F-схем, то имеем естественный k-морфизм

$$R_{F/k}(u) : R_{F/k}(X) \to R_{F/k}(Y).$$

4) Если $k \subset E \subset F$, то $R_{F/k}(X) = R_{E/k}(R_{F/E}(X))$.

5) Полагая в (3) $Y = R_{F/k}(X)$, получаем F-морфизм

$$p : R_{F/k}(X) \otimes F \to X,$$

однозначно определяемый по формуле (3) тождественным отображением схемы $R_{F/k}(X)$ в себя , p называется канонической проекцией.

6) Пусть X будет k-многообразием, тогда имеем биекцию

$$Hom_k(X, R_{F/k}(X \otimes_k F)) \cong Hom_F(X \otimes_k F, X \otimes_k F).$$

Беря в правой части тождественное отображение, получаем каноническое вложение

$$i : X \to R_{F/k}(X \otimes_k F).$$

7) Пусть A – произвольное расширение поля k, тогда $A \otimes_k F = \oplus_{i=1}^s M_i$ – прямая сумма полей, $(F : k) = \sum_{i=1}^s (M_i : A)$. Имеется канонический изоморфизм A-многообразий

$$R_{F/k}(X) \otimes_k A \cong \prod_{i=1}^s R_{M_i/A}(X \otimes_F M_i).$$

8) $\dim R_{F/k}(X) = (F : k) \dim X$.

9) Если X – аффинное многообразие, то $R_{F/k}(X)$ также аффинно, если X – гладкое, то и $R_{F/k}(X)$ – гладкое.

10) Если U – открытое многообразие в X, то $R_{F/k}(U)$ открыто в $R_{F/k}(X)$.

11) Если G является F-группой, то $R_{F/k}(G)$ k- группа; G связна тогда и только тогда, когда $R_{F/k}(G)$ связна; если G коммутативна, то и $R_{F/k}(G)$ коммутативна.

12) Если

$$1 \to G' \to G \to G'' \to 1$$

– точная последовательность алгебраических групп над полем F, то соответствующая последовательность k-групп

$$1 \to R_{F/k}(G') \to R_{F/k}(G) \to R_{F/k}(G'') \to 1$$

также точна.

13) Пусть G – алгебраическая группа над полем F, тогда

$$H^1(k, R_{F/k}(G)) = H^1(F, G).$$

Если же группа G коммутативна, то

$$H^q(k, R_{F/k}(G)) = H^q(F, G)$$

для всех $q \geq 0$.

Пример 16. Рассмотрим k-многообразие $R_{F/k}(\mathbf{A}^m_F) = Y$. Имеем $Y(k) = \mathbf{A}^m(F)$ – пространство размерности m над F, рассматриваемое как пространство над полем k. Нетрудно показать, что $R_{F/k}(\mathbf{A}^m_F) \cong \mathbf{A}^{mn}_k$, $n = (F : k)$.

Пример 17. Пусть G – связная односвязная полупростая k-группа, не имеющая собственных нормальных делителей, определенных над полем k. Тогда имеем разложение

$$G \otimes_k k_s = \prod_{i=1}^{n} H^i,$$

где H^i – абсолютно почти простые группы, переставляемые группой $\mathcal{G} = Gal\,(k_s/k)$. Пусть $\mathcal{G}_1$ – подгруппа в $\mathcal{G}$, оставляющая группу H^1 на месте, тогда индекс подгруппы $\mathcal{G}_1$, в $\mathcal{G}$, равен n и, если F_1 – поле инвариантов группы $\mathcal{G}_1$, то $(F_1 : k) = n$ и F_1 – поле определения группы H^1. Тогда $G = R_{F/k}(H)$, где $F \cong F_1$, H – группа над F, такая, что $H \otimes_F k_s \cong H^1$.

Пример 18. Пусть T – алгебраический тор, определенный над полем F, $(F : k) = n$, тогда $R_{F/k}(T)$ снова алгебраический тор, но уже над полем k. Поскольку тор T однозначно определяется своим модулем рациональных характеров $\hat{T}$, попытаемся найти модуль характеров тора $R_{F/k}(T)$. Имеем $R_{F/k}(T) \otimes_k k_s \cong T_1 \times \cdots \times T_n$. Действие группы Галуа $\mathcal{G}$ является индуцированным с подгруппы $\mathcal{G}_1$, сохраняющей T_1, поэтому $\mathcal{G}$-модуль $\widehat{R_{F/k}(T)}$ имеет вид $\hat{T} \otimes_{\mathcal{G}_1} \mathbf{Z}[\mathcal{G}]$.

Пример 19. Особое значение в дальнейшем будут играть торы вида $T = R_{F/k}(G_m)$ с модулями рациональных характеров $\mathbf{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{G}_1] = \mathbf{Z} \otimes_{\mathcal{G}_1} \mathbf{Z}[\mathcal{G}]$. Имеем изоморфизм групп $T(k) = F^*$, нетрудно увидеть, что тор T может быть построен в виде матричной группы, исходя из регулярного представления группы F^* в каком-либо базисе расширения F/k, $T \subset GL_k(n)$, $n = (F : k)$. Торы, представимые в виде прямого произведения групп вида $R_{F/k}(G_m)$, называются *квазиразложимыми*. Они характеризуются тем, что модуль их рациональных характеров обладает $\mathbf{Z}$-базисом, на котором группа $\mathcal{G}$ действует перестановками; это так называемые *пермутационные* модули.

Пример 20. Овеществление комплексных многообразий. Пусть X – квазипроективное алгебраическое многообразие над полем $\mathbf{C}$. Тогда мы имеем алгебраическое многообразие $Y = R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(X)$, определенное над полем вещественнывх чисел $\mathbf{R}$. В классической теории интересуются большей частью вещественным многообразием $Y(\mathbf{R})$, точки которого находятся во взаимнооднозначном соответствии с точками комплексного многообразия $X(\mathbf{C})$, но, ясно, что схема $R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(X)$ несет в себе значительно большую информацию. Группа $\Pi = Gal\,(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ имеет порядок 2, образующий элемент $\sigma : i \to -i$. В этом примере видна полезность дальнейшей комплексификации $\mathbf{R}$-схемы Y:

$$Y \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(X) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = X \times X^\sigma.$$

Это дает представление аналитического многообразия $Y(\mathbf{C})$ в виде произведения $X(\mathbf{C}) \times X^\sigma(\mathbf{C})$ и позволяет записать в явном виде действие вещественного оператора σ на $Y(\mathbf{C})$, а именно, если $y = (u, v)$, $u \in X(\mathbf{C})$, $v \in X^\sigma(\mathbf{C})$, то $\sigma(u, v) = (\sigma v, \sigma u)$. Поскольку $Y(\mathbf{R})$ есть подмножество в $Y(\mathbf{C})$, состоящее из неподвижных точек оператора σ,то

$$Y(\mathbf{R}) = \{(u, \sigma u) \mid u \in X(\mathbf{C}).$$

Пусть X есть абелево многообразие над полем $\mathbf{C}$, т.е. X – комплексная алгебраическая группа, многообразие которой проективно, тогда $Y = R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(X)$ снова

абелево многообразие, но определенное над полем $\mathbf{R}$ и удвоенной размерности. Возникает естественный вопрос о классификации комплексных абелевых многообразий X, у которых $\mathbf{R}$-группы $R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(X)$ изоморфны. Для эллиптических кривых E Бошняк получил следующие результаты. Пусть $\rho(E)$ – количество неизоморфных эллиптических кривых E' таких, что $R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(E) \cong R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(E')$.

Тогда, если E, E' – эллиптические кривые с комплексным умножением, то $R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(E) \cong R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(E')$ тогда и только тогда, когда $End\, E \cong End\, E'$. Отсюда $\rho(E) = h(End\, E)$, где $h(End\, E)$ – число классов идеалов кольца $End\, E$.

Более сложный ответ для кривых E без комплексного умножения. Приходится рассматривать два случая.

1) Среди кривых, изогенных E, нет E^σ. В этом случае $\rho(E) = 2$, т.е. это сами кривые E и E^σ.

2) Кривые E и E^σ изогенны, пусть $\alpha : E \to E^\sigma$ – изогения , наименьшей возможной степени m_E. Тогда, а) если $m_E = 1$, то $\rho(E) = 1$; б) если $m_E = c^2$, c – целое большее единицы, то $\rho(E) = 2$; в) если m_E не является квадратом, то $\rho(E) = 2$ или 4. В частности, для эллиптических кривых E, определенных над полем $\mathbf{Q}$, $\rho(E) = 1$. Доказательство основывается на поднятии изоморфизма $f : R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(E) \to R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(E')$ до изоморфизма $f \otimes 1 : E \times_{\mathbf{C}} E^\sigma \to E' \times_{\mathbf{C}} (E')^\sigma$ и разложении $f \otimes 1$ на компоненты.

Пример 21. Всякий тор унирационален над своим полем определения. Действительно, пусть $\hat{T}$ есть П-модуль рациональных характеров тора T, П – конечная группа Галуа поля разложения тора T. Дуальный П-модуль $\hat{T}^0$ является фактором некоторого свободного П-модуля $\hat{S}^0$ конечного ранга. Имеем вложение $\hat{T} \to \hat{S}$, откуда эпиморфизм $S \to T$ торов. Осталось заметить, что S является квазиразложимым, а поэтому и k-рациональным тором.

Глава II БИРАЦИОНАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ

В данной главе рассматриваются не только алгебраические торы, но исследования по бирациональной геометрии алгебраических торов явились образцом и дали толчок для выработки гипотез и их последующих доказательств в общем случае линейных алгебраических групп. К настоящему времени бирациональная геометрия алгебраических групп приобрела свое лицо и имеет на своем счету ряд первоклассных результатов.

§4. БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

4.1. Многообразие максимальных торов редуктивной группы. Пусть G – связная алгебраическая редуктивная группа, определенная над полем k. В группе G всегда имеется максимальный тор T, определенный над k, пусть $N = N_G(T)$ – нормализатор тора T в G, $W = N/T$ – группа Вейля, это конечная групповая k-схема. Рассмотрим фактор-многообразие $X = G/N$. Группа Галуа $\mathcal{G} = Gal\,(k_s/k)$ действует на $X(k_s)$, причем орбита каждой точки конечна. Если F – расширение поля k, $F \in k_s$ и $\mathcal{H} = Gal\,(k_s/F)$, то $X(F) = X(k_s)^{\mathcal{H}}$. На множестве $X(k_s)$ сверх того действует группа $G(k_s)$ левыми сдвигами L_g, $g \in G(k_s)$; имеем $\sigma L_g = L_{\sigma g}$. Рассмотрим теперь действие максимального тора T_1 группы $G \otimes_k k_s$ на $X \otimes_k k_s$.

Оказывается, группа $T_1(k_s)$ имеет единственную неподвижную точку в $X(k_s)$. Это следует из сопряженности максимальных торов в группе $G(k_s)$. Ставя в соответствие тору T_1 его единственную неподвижную точку x_1, получаем биекцию между множеством максимальных торов группы $G \otimes_k k_s$ и множеством точек $X(k_s)$ схемы X. Эта биекция коммутирует с действием группы Галуа, поэтому для каждого поля F, $F \supset k$, имеем функтор

$$X(F) = \{\textit{множество максимальных торов группы } G \otimes_k F\}.$$

Заметим также, что многообразие X с точностью до изоморфизма не зависит от выбора максимального тора T. Оно называется многообразием максимальных торов группы G. Пусть теперь характеристика поля k равна нулю. Тогда мы имеем взаимно-однозначное соответствие между максимальными торами T группы G и подалгебрами Картана $\mathbf{h}$ алгебры Ли $\mathbf{g}$ группы G, функториальное при расширении основного поля. Поэтому $X(F)$ можно описать также как множество подалгебр Картана в алгебре Ли $F \otimes_k \mathbf{g}$. Выберем в $\mathbf{g}$ алгебру Картана $\mathbf{h}$, соответствующую тору T; существует подпространство $\mathbf{m}$ в $\mathbf{g}$ такое , что $\mathbf{g} = \mathbf{h} \oplus \mathbf{m}$ и $[\mathbf{h}, \mathbf{m}] \subset \mathbf{m}$. Элемент $u \in \mathbf{g}$ называется регулярным, если его централизатор является подалгеброй Картана. Регулярные элементы заполняют открытое по Зарисскому подмножество в $\mathbf{g}$. Зафиксируем регулярный элемент h в подалгебре $\mathbf{h}$ и пусть $\mathbf{m}^0$ – открытое подмножество регулярных элементов в $\mathbf{m}$. Тогда для каждого $u \in \mathbf{m}^0$ централизатор элемента $h+u$ в $\mathbf{g}$ снова является алгеброй Картана $\mathbf{h}_u$ в $\mathbf{g}$ и, если $u, v \in \mathbf{m}^0$, $u \neq v$, то $\mathbf{h}_u \neq \mathbf{h}_v$. Итак, можно считать, что $\mathbf{m}^0$ есть открытое подмножество в $X(k)$, аналогично, $\mathbf{m}^0_F$ открыто в $X(F)$ для любого $F \supset k$. Поскольку $\mathbf{m}$ и X имеют одинаковые размерности, то X бирационально эквивалентно $\mathbf{A}^n_k$, $n = \dim X$. Рациональность многообразия торов впервые доказал К.Шевалле [1], приведенное изящное рассуждение принадлежит Демазюру и Гротендику, им же принадлежит следующий более общий результат

Теорема 1. Пусть G – связная алгебраическая группа над произвольным полем k, тогда многообразие подгрупп Картана группы G является рациональным над полем k. $\triangle$

Построим теперь "тавтологическое" расслоение H над X, т.е. H должно быть k-многообразием с сюръективным морфизмом $\pi : H \to X$, причем слой $\pi^{-1}(x) = H_x$ должен быть максимальным тором в $G \otimes_k k(x)$ для любой точки $x \in X$ и действие группы $G(k_s)$ на $H(k_s)$ и $X(k_s)$ должно быть согласовано. Для построения H выберем максимальный k-тор T в G и рассмотрим морфизм $\alpha : G \times_k T \to X \times_k G$, который на точках выглядит следующим образом

$$\alpha(g,t) = (gN, gtg^{-1}), \quad g \in G(k_s), \quad t \in T(k_s).$$

Образ отображения α замкнут, пусть $H = Im\alpha$. Отображение π есть первая проекция, если $y \in X(k_s)$, то

$$\pi^{-1}(y) = \pi^{-1}(gN) = (gN, gTg^{-1}) \cong gTg^{-1}, \quad g \in G(k_s).$$

Рациональное отображение $\varphi : G \times_k T \to G$, $\varphi(g,t) = gtg^{-1}$ может быть пропущено через H; таким образом, получаем рациональное k-отображение $\varphi : H \to G$, которое биективно на регулярных элементах и поэтому бирационально. Итак, поле $k(G)$ изоморфно полю $k(H)$. Пусть x – общая точка многообразия X, $k(x) = k(X) = M$. Слой $\pi^{-1}(x) = H_x$ называется *общим тором* группы G. Тор H_x есть максимальный тор группы $G \otimes_k M$, он определен над M и поле $M(H_x)$ изоморфно над k полю $k(G)$.

Поскольку всякий тор унирационален над полем определения, то, учитывая рациональность многообразия X, видим, что многообразие редуктивной k-группы G унирационально над полем k. Любая связная алгебраическая k-группа G представима в виде полупрямого произведения унипотентной подгруппы и редуктивной (разложение Леви). Многообразие унипотентной группы бирегулярно аффинному пространству, если поле определения совершенно. Отсюда результат Шевалле-Розенлихта.

Теорема 2. Многообразие связной линейной алгебраической группы, определенной над совершенным полем, унирационально. $\triangle$

Если общий тор H_x рационален над M, то и группа G рациональна над k, обратное, конечно, неверно.

4.2. Строение общего тора в полупростой группе. Пусть сначала G – связная полупростая группа, определенная над алгебраически замкнутым полем k, T – максимальный тор в G, X – многообразие максимальных торов, $\pi : H \to X$ – расслоение, H_x – общий тор над $M = k(X)$. Поскольку k – алгебраически замкнуто, то тор T разложим: $T \cong G_{m,k}^{l}$ и элементы группы Вейля W определены над k. Пусть $Y = G/T$, включение $T \subset N$ определяет накрытие Галуа $\gamma : Y \to X$ с группой W. Группа W действует на Y справа по правилу

$$(gT)^w = gnT, \quad w = nT, \quad n \in N(k)$$

и многообразие X есть фактор Y/W. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} Y & \times_k & T & \xrightarrow{\alpha} & H \\ & \xi\downarrow & & & \pi\downarrow \\ & Y & & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array},$$

где $\alpha(gT, t) = (gN, gtg^{-1})$, а ξ – первая проекция. Многообразие $Y \times_k T$ изоморфно над полем k расслоенному произведению $Y \times_X H$, причем группа W действует на $Y \times_k T$ по правилу

$$(gT, t)^w = (gnT, n^{-1}tn), \quad n \in w.$$

Многообразие H есть фактор $(Y \times_k T)/W = (Y \times_X H)/W$. Пусть x – общая точка схемы X, $M = k(x) = k(X)$, $y = \gamma^{-1}(x)$ – общая точка схемы Y, $k(y) = k(Y) = L$, L/M – расширение Галуа с группой W. Пусть $U_y = \xi^{-1}(y)$ – слой над точкой y. Тогда $U_y = Y_y \times_k T = T \otimes_k L = H_x \otimes_M L$ и H_x есть фактор $(T \times_k L)/W$, причем W действует на поле L как группа Галуа, а на торе T как группа Вейля. Поскольку оба эти действия точные, то L есть минимальное поле разложения тора H_x над M, группой разложения общего тора в случае замкнутого поля k служит группа Вейля W. Удобно воспользоваться введенным в п.3.4. понятием группы разложения $\varphi(\Pi)$ тора H, где Π – группа Галуа какого-нибудь нормального поля разложения тора H, а φ – представлекние группы Π матрицами, определяемое модулем рациональных характеров тора H.Пусть R – система корней группы G относительно тора T, $Q(R)$ – решетка корней, $P(R)$ – решетка весов, известно, что $Q(R) \subset \hat{T} \subset P(R)$ и ранги всех групп одинаковые. Нами доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть G – связная полупростая алгебраическая группа, определенная над алгебраически замкнутым полем k, X – многообразие максимальных торов, $M = k(X)$, H_x – общий тор группы G. Далее, пусть Π – группа Галуа расширения M_s/M, $\varphi : \Pi \to A(R)$ – естественное представление, R – система корней группы $G(M_s)$ относительно тора $H(M_s)$. Тогда $\varphi(\Pi) = W(R)$ – группа Вейля. По-другому, группа разложения общего тора H_x над M совпадает с группой Вейля $W(R)$. $\triangle$

Пусть теперь поле k не обязательно алгебраически замкнуто, G – связная полупростая группа над k, H_x – общий тор над $M = k(X)$. При расширении поля констант k до k_s группа разложения тора H_x может только уменьшится, но, по теореме 1, над полем $k_s(M)$ тор $H_x \otimes_M k_s(M)$ имеет минимальным полем разложения поле $k_s(Y)$ с группой Вейля в качестве группы Галуа. Поэтому группа разложения $\varphi(\Pi)$ заключена в промежутке

$$W(R) \subset \varphi(\Pi) \subset A(R).$$

Рассмотрим эту ситуацию более подробно. Выберем в G максимальный k-тор T и рассмотрим башню полей $k(X) \subset k_s(X) \subset k_s(Y)$. Расширение $k_s(Y)/k_s(X)$ нормально с конечной группой Галуа $W(k_s)$, группа $\mathcal{G} = Gal\,(k_s/k)$ также естественно действует на $W(k_s)$, группа $\Pi = Gal\,(k_s(Y)/k(X))$ есть полупрямое произведение нормальной подгруппы $W(k_s)$ и группы $\mathcal{G}$. Из соотношения $(\sigma w)(f) = \sigma[w(\sigma^{-1}f)]$, $f \in k_s(Y)$, следует, что $\sigma \cdot w \cdot \sigma^{-1} = \sigma w$ в группе Π, σw – образ элемента $w \in W(k_s)$ при естественном действии группы $\mathcal{G}$ на $W(k_s)$. Общий тор H_x есть фактор схемы $T \otimes_k k_s(Y)$ относительно действия группы Π. Заметим, что действие группы $\mathcal{G}$ на характерах $\hat{T}$ тора T теперь уже не обязательно тривиальное. Выберем какой-нибудь базис Δ системы корней R относительно H_x. В п.3.10. определено представление $\sigma \to \sigma^*$ группы $\mathcal{G}$ в группу подстановок множества Δ. Пусть A_0 есть образ представления $\sigma \to \sigma^*$. Тогда $\varphi(\Pi)$ есть полупрямое произведение группы Вейля $W(R)$ и A_0 в $A(R)$. Известно, что A_0-модуль $\hat{H}_x$ не зависит от выбора k-тора T в группе G. Если $A_0 \neq E$, то G называется внешней k-формой своей группы Шевалле, если $A_0 = E$, то G – внутренняя форма.

Теорема 2. Пусть k – поле характеристики нуль, G – связная полупростая группа, определенная над k, X, M, H_x – как и в теореме 1 , $\mathcal{G} = Gal\,(\bar{k}/k)$, $\Pi = Gal\,(\bar{k}(Y)/k(X))$, $Y = G/T$. Группа разложения $\varphi(\Pi)$ общего тора H_x над M есть полупрямое произведение группы $W(R)$ и A_0 в $A(R)$.$\triangle$

Конечно, теорема 1 является следствием теоремы 2, но удобно иметь ее самостоятельно. Поскольку решетка корней $Q(R)$ имеет конечный индекс в группе характеров $\hat{H}_x$, то действие группы Π на корнях однозначно продолжается на $\hat{H}_x$, а это, в свою очередь, полностью определяет строение самого тора H_x. Поскольку решетки корней и весов хорошо описаны в литературе, то строение общего тора в полупростой односвязной или присоединенной группе можно считать, согласно теоремам 1 и 2 , известным.

При изучении группы разложения общего тора H_x лучше всего выбирать тор T в наиболее простом виде. Можно сначала взять максимальный k-разложимый тор S в G, а затем, в качестве T взять максимальный k-тор в G, содержащий S. Тогда имеется дополнительная информация о действии группы Π на корнях.

Поскольку всякий максимальный k-тор T группы G является специализацией общего тора H_x над полем k, то естественно ввести следующее определение. Будем говорить, что максимальный k-тор T группы G *не имеет аффекта*, если группа разложения тора T изоморфна группе разложения общего тора H_x. Наличие торов без аффекта в группе G существенно зависит от природы поля определения k. Для алгебраически замкнутого поля k торов без аффекта в группе G нет. Напротив, если k – числовое поле, то максимальных k-торов без аффекта в G достаточно много. Это следует из теоремы Гильберта о неприводимости и из рациональности многообразия максимальных торов X над полем k. Более точно, пусть $M = k(X) = k(x_1, .., x_r)$, где $x_1, .., x_r$ – базис трансцендентности, L – минимальное расширение поля M, над которым распадается общий тор H_x, $\Pi = Gal\,(L/M)$. По теореме Гильберта существует

специализация $(x_1,..,x_r) \to (a_1,..,a_r)$, такая, что соответствующее специализированное поле L_a является расширением Галуа поля k с группой Галуа, изоморфной П. Множество таких специализаций всюду плотно в $\mathbf{A}^r(k)$ в топологии Зарисского. Обратим внимание еще раз на то, что строение торов без аффекта, согласно вышесказанному, нам известно. Результаты о строении общего тора взяты из работы автора [8].

4.3. Группа Пикара и группа Брауэра линейной алгебраической группы. В данном пункте, если не будет оговорено, поле k имеет характеристику нуль. Пусть X – алгебраическое многообразие над полем k, $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$, $\mathcal{G} = Gal\,(\bar{k}/k)$. Имеется спектральная последовательность Хохшильда-Серра

$$H^p(\mathcal{G}, H^q(\bar{X}, G_m) \Rightarrow H^n(X, G_m)$$

в этальных когомологиях. Она определяет точную восьмичленную последовательность

$$0 \to E_2^{1,0} \to E^1 \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to Ker\,(E^2 \to E_2^{0,2}) \to E_2^{1,1} \to E_2^{3,0},$$

которая в явном виде выглядит так:

$$0 \to H^1(k, \bar{k}[X]^*) \to Pic\,X \to (Pic\,\bar{X})^{\mathcal{G}} \to H^2(k, \bar{k}[X]^*) \to$$

$$\to Ker\,(Br\,X \to Br\,\bar{X}) \to H^1(k, Pic\,\bar{X}) \to H^3(k, \bar{k}[X]^*). \qquad (1)$$

Если множество рациональных точек $X(k)$ непусто, то ретракция

$$Spec\,k \to X \to Spec\,k$$

показывает, что последовательность

$$0 \to H^q(k, \bar{k}^*) \to H^q(k, \bar{k}[X]^*) \to H^q(k, U(\bar{X}))) \to 0$$

является точной и расщепляющейся, сверх того, естественный гомоморфизм $H^q(k, G_m) \to H^q(X, G_m)$ допускает ретракцию. Поэтому

$$H^q(k, \bar{k}[X]^*) = H^q(k, \bar{k}^*) \oplus H^q(k, U(\bar{X})),$$

здесь $U(\bar{X}) = \bar{k}[X]^*/\bar{k}^*$. Далее, в этом случае образ гомоморфизма $H^1(k, Pic\,\bar{X}) \to H^3(k, \bar{k}[X]^*)$ лежит в $H^3(k, U(\bar{X}))$. Все это применимо к случаю, когда X есть многообразие связной линейной алгебраической группы G. В этом случае $\bar{k}[G]^* = \bar{k}^* \times \hat{G}$ и последовательность (1) принимает вид

$$0 \to H^1(k, \hat{G}) \to Pic\,G \to (Pic\,\bar{G})^{\mathcal{G}} \to H^2(k, \hat{G}) \to$$

$$\to Br\,G/Br\,k \to H^1(k, Pic\,\bar{G}) \to H^3(k, \hat{G}).$$

В частности, если $G = T$ есть алгебраический тор, то $Pic\,\bar{T} = 0$ и мы имеем

$$Pic\,T = H^1(k, \hat{T}), \quad Br\,T = Br\,k \oplus H^2(k, \hat{T}).$$

Если G – связная полупростая группа, то $\hat{G} = 0$ и данная последовательность распадается на две:

$$Pic\,G = (Pic\,\bar{G})^{\mathcal{G}}, \quad Br\,G/Br\,k = H^1(k, Pic\,\bar{G}. \qquad (2)$$

Чтобы вычислить $Pic\,\bar{G}$, будем считать, что поле k алгебраически замкнуто. Тогда группа G содержит борелевскую подгруппу B, которая является полупрямым произведением унипотентной группы N и тора T. Существует элемент $g \in G(k)$ такой, что отображение $(n, b) \to ngb, \quad n \in N(k), \quad b \in B(k)$, определяет инъективный морфизм прямого произведения $N \times_k B$ на открытую часть U многообразия G. Шевалле показал, что замкнутое подмножество $V = G \setminus U$ есть объединение $\bigcup_{i=1}^{l} F_i$, где F_i – замкнутые неприводимые подмножества многообразия G коразмерности один (простые дивизоры многообразия G), а l есть ранг группы G, т.е. размерность тора T. Отображение ограничения $Pic\,G \to Pic\,U$ сюръективно, ядром его служит фактор решетки $\mathbf{Z}^l$, порожденной дивизорами F_i, по подгруппе главных дивизоров, образованных регулярными обратимыми функциями на U. Поскольку $U \cong N \times T \times N$, то $Pic\,U = 0$; кроме того $k[U]^* = k^* \times \hat{T}$. Имеем точную последовательность

$$0 \quad \to \hat{T} \to \mathbf{Z}^l \to Pic\,G \to \quad 0, \tag{3}$$

из которой следует, что группа $Pic\,G$ конечна для любой полупростой группы, определенной над замкнутым полем, а по (2) это верно над произвольным полем. Заметим еще, что разложимую группу G можно взять определенной над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$ и из (3) видно, что $Pic\,G = Pic\,(G \otimes_Q L)$ для любого расширения L поля $\mathbf{Q}$. Возьмем в качестве поля L поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ и рассмотрим точную последовательность Куммера

$$1 \quad \to \mu_n \to \mathbf{G}_m \xrightarrow{n} \mathbf{G}_m \to \quad 1,$$

где $n = [Pic\,G]$. Имеем точную последовательность в этальных когомологиях

$$H^1(G_{\mathbf{C}}, \mu_n) \to Pic\,G \xrightarrow{n} Pic\,G.$$

Так как для периодических пучков этальные когомологии совпадают с комплексными,то $H^1(G_{\mathbf{C}}, \mu_n) = 1$, если группа G односвязна. Таким образом, $Pic\,G = 0$ для односвязных групп, определенных над произвольным полем $k \supset \mathbf{Q}$, для них же из (2) следует, что $Br\,G = Br\,k$.

Пусть теперь G – произвольная связная полупростая группа, определенная над некоторым полем k характеристики нуль, $\tilde{G}$ ее универсальная накрывающая, $\pi : \tilde{G} \to G$ – накрывающий гомоморфизм, $W = Ker\,(\pi) = \pi_1(G)$ – фундаментальная группа, поле k – алгебраически замкнуто. Так как накрытие π неразветвлено, то группу дивизоров $Div(G)$ многообразия G можно отождествить с подгруппой группы дивизоров $Div(\tilde{G})$ многообразия $\tilde{G}$, состоящей из элементов, инвариантных относительно группы $W(k)$. Так как каждый дивизор многообразия $\tilde{G}$ является главным, то условие $w(d) = d$ для всех $w \in W(k), \quad d = (f) \in Div(\tilde{G}), \quad f \in k(\tilde{G})^*$, равносильно соотношениям $wf = fe_w$, где функция e_w имеет дивизор, равный нулю, поэтому $e_w \in k^*$. Далее, $e_{w_1 w_2} = e_{w_1} e_{w_2}$,т.е. отображение $w \to e_w$ есть гомоморфизм группы $W(k)$ в группу k^*. Очевидно, если дивизоры d и d' группы $Div(G)$ линейно эквивалентны, то соответствующие им коциклы e_w и e'_w совпадают. Имеем мономорфизм $\alpha : Pic\,G \to Hom\,(W(k), k^*)$, а, поскольку коцикл e_w расщепляется в группе $k(\tilde{G})^*$, т.е. существует функция $f \in k(\tilde{G})$, такая, что $wf = fe_w$ для всех $w \in W(k)$, то α изоморфизм. Пусть теперь поле k не замкнуто. Из (2) следует тогда, что

$$Pic\,G = (Pic\,\bar{G})^{\mathcal{G}} = W(\bar{k})^{\mathcal{G}},$$

ибо изоморфизм $\alpha : Pic\,\bar{G} \to Hom\,(W(\bar{k}), \bar{k}^*) = \widehat{W(\bar{k})}$ является $\mathcal{G}$-изоморфизмом. Итак, над полем характеристики нуль имеем следующий результат.

Теорема. 1) Для любой связной линейной группы G, определенной над полем k, группа $Pic\,G$ является конечной.

2) Если T – алгебраический тор, то

$$Pic\,T = H^1(k, \hat{T}), \quad Br\,T = Br\,k \oplus H^2(k, \hat{T}).$$

3) Если $\tilde{G}$ – связная односвязная полупростая группа, то $Pic\,\tilde{G} = 0$, $Br\,\tilde{G} = Br\,k$.

4) Если G – связная полупростая группа с фундаментальной группой W,то

$$Pic\,\bar{G} = Hom\,(W(\bar{k}), \bar{k}^*) = \widehat{W(\bar{k})},$$

$$Pic\,G = \widehat{W(\bar{k})}^{\,\mathcal{G}}, \quad Br\,G = Br\,k \oplus H^1(k, Pic\,\bar{G}). \ \triangle$$

Вычислению группы $Pic\,G$, были посвящены работы автора [1] и Попова [1].

4.4. Признаки бирациональной эквивалентности алгебраических многообразий. Теперь мы имеем в распоряжении необходимые сведения из общей теории и можем приступить к реализации основного замысла данной работы. Вопрос о классификации алгебраических многообразий с точностью до бирациональной эквивалентности является чрезвычайно трудным. Некоторые бирациональные характеристики удается получить, рассматривая в классе многообразий, бирационально эквивалентных между собой, неособые проективные представители (модели). К сожалению, существование таких моделей в общем случае еще не доказано. Теорема Хиронаки [1] утверждает, что в каждом классе бирационально эквивалентных алгебраических многообразий содержится неособая проективная модель, если поле определения этих многообразий имеет характеристику нуль. Рассмотрим этот случай более подробно. Пусть Y и Z – два неособых неприводимых проективных многообразия над полем k характеристики нуль и $\varphi : Z \to Y$ бирациональный морфизм. Спектральная последовательность Лере морфизма φ

$$H^p(Y, R^q\varphi_* O_Z^*) \Longrightarrow H^{p+q}(Z, O_Z^*)$$

определяет точную последовательность

$$0 \quad \to Pic\,Y \xrightarrow{\varphi^*} Pic\,Z \to S \to \quad 0,$$

где $S = H^0(Y, R\varphi_* O_Z^*)$. Отображение φ^* есть отображение "обратный образ". Но в указанной ситуации определен также гомоморфизм "прямой образ" дивизора и класса дивизора: $\varphi_* : Pic\,Z \to PicY$, причем $\varphi_*\varphi^* = Id$. Поэтому группа $Pic\,Z$ изоморфна прямой сумме $Pic\,Y \oplus S$. Гомоморфизм φ_* строится следующим образом. Пусть W – замкнутое подмножество в Y, состоящее из точек, в которых рациональное отображение φ^{-1} не определено, и пусть $F = \varphi^{-1}(W) \subset Z$. Тогда морфизм φ осуществляет изоморфизм между открытыми множествами $Z \setminus F$ и $Y \setminus W$. Далее, так как коразмерность W не менее двух, то отображение ограничения $Pic\,Y \to Pic\,(Y \setminus W)$ есть изоморфизм. Гомоморфизм φ_* определяется теперь как композит цепочки гомоморфизмов

$$Pic\,Z \to Pic\,(Z \setminus F) \quad \cong \quad Pic\,(Y \setminus W) = Pic\,Y.$$

Группа S есть ядро эпиморфизма $Pic\,Z \to Pic\,(Z \setminus F)$, следовательно S порождена дивизорами, носители которых лежат в F. Пусть S' – свободная абелева группа, порожденная всеми простыми дивизорами, носители которых лежат в F. Она имеет конечный ранг. По только что сказанному, естественное отображение $S' \to S$ есть

эпиморфизм, а из того, что коразмерность W не меньше двух , следует, что $S' = S$. Пусть $\mathcal{G} = Gal(\bar{k}/k)$. Морфизм φ определяет бирациональный $\bar{k}$- морфизм $\varphi \otimes 1 : \bar{Z} \to \bar{Y}$ и мы получаем $\mathcal{G}$-изоморфизм $Pic\,\bar{Z} \cong Pic\,\bar{Y} \oplus S$. Модуль S является пермутационным $\mathcal{G}$-модулем с базой, состоящей из простых компонент многообразия $\bar{F}$. Имеем серьезный повод для введения следующего определения.

Определение. Пусть Π - некоторая группа, A и B – произвольные Π-модули. Модули A и B назовем подобными, если существуют пермутационные Π-модули S_1 и S_2 такие, что прямые суммы $A \oplus S_1$ и $B \oplus S_2$ изоморфны. Класс подобия Π-модуля A будем обозначать символом $[A]$.

Теорема. Необходимый признак бирациональной эквивалентности алгебраических k-многообразий. Пусть X и Y – неособые проективные алгебраические многообразия над полем k характеристики нуль, L/k- нормальное расширение с группой Галуа Π. Если X и Y бирационально эквивалентны над полем k, то Π-модули $Pic\,(X \otimes_k L)$ и $Pic\,(Y \otimes_k L)$ подобны.

Доказательство. В условиях теоремы существует неособое проективное многообразие Z над полем k и бирациональные морфизмы $Z \to X$ и $Z \to Y$. Но, тогда $Pic\,Z_L \cong Pic\,X_L \oplus S_1 \cong Pic\,Y_L \oplus S_2$. $\triangle$

Если X и Y бирационально эквивалентны над полем k, то они остаются бирационально эквивалентными и при любом расширении поля k. Учитывая, что для любой подгруппы π группы Π имеем равенство $H^1(\pi, S) = 0$, если S есть пермутационный Π-модуль, тогда для любого промежуточного поля F, $k \subset F \subset L$, справедливо соотношение

$$H^1(L/F, Pic\,X_L) = H^1(L/F, Pic\,Y_L),$$

т.е. группы $H^1(L/F, Pic\,X_L)$ являются бирациональными инвариантами многообразия X. Дальше мы увидим, что класс подобия $[Pic\,X_L]$ является более тонким бирациональным инвариантом многообразия X, чем когомологические инварианты $H^1(L/F, Pic\,X_L)$. Если L/k – конечное нормальное расширение, то бирациональными инвариантами будут и группы $H^{-1}(L/F, Pic\,X_L)$.

Пусть теперь многообразие X рационально над $\bar{k}$, т.е. $X \otimes_k \bar{k}$ бирационально эквивалентно проективному пространству $\mathbf{P}^n \otimes_k \bar{k}$. Поскольку $Pic\,\mathbf{P}^n = \mathbf{Z}$, то $Pic\,\bar{X}_L \oplus S \cong \mathbf{Z} \oplus S_1$.

Предложение. Пусть X – гладкое проективное многообразие, определенное над полем k характеристики нуль. Если $\bar{X}$ рационально над $\bar{k}$, то $\mathcal{G}$-модуль $Pic\,\bar{X}$ имеет конечный $\mathbf{Z}$-ранг и не имеет кручения. Если многообразие X рационально над k, то $[Pic\,X_L] = [0]$ и $H^{\pm}(L/F, Pic\,X_L) = 0$ для любого нормального расширения L/k, $k \subset F \subset L \subset \bar{k}$. $\triangle$

Впервые бирациональный инвариант $[Pic\,\bar{X}]$ появился в исследованиях Манина и Шафаревича по теории поверхностей, (Манин [1,2]).

4.5. Проективные модели линейных алгебраических групп. Пусть теперь G – связная алгебраическая линейная группа, определенная над полем k характеристики нуль. Рассмотрим какое-нибудь неособое проективное многообразие X над полем k, содержащее G в качестве открытого подмножества. Многообразие X назовем проективной моделью группы G. Многообразие $\bar{G}$, а, значит и $\bar{X}$, являются рациональными над полем $\bar{k}$. Это следует из тривиальности максимального тора группы $\bar{G}$ и разложения Брюа. Таким образом, $\mathcal{G}$-модуль $Pic\,\bar{X}$ имеет конечный $\mathbf{Z}$-ранг без кручения. Хотя модель X определяется неоднозначно, если $\dim G \geq 1$, но класс подобия $\mathcal{G}$-модуля $Pic\,\bar{X}$ определен однозначно, будем обозначать его символом $p_k(G)$ или просто $p(G)$ и называть классом Пикара группы G. Пусть $C(\mathcal{G})$ – категория непрерывных $\mathcal{G}$-модулей конечного $\mathbf{Z}$-ранга без кручения, классы подобия модулей из $C(\mathcal{G})$

образуют коммутативную полугруппу $M(\mathcal{G})$ относительно операции прямой суммы модулей. Нулевым элементом в этой полугруппе служит класс пермутационных $\mathcal{G}$-модулей. Имеем функтор $G \to p(G)$ из категории связных линейных алгебраических групп, определенных над полем k характеристики нуль, в полугруппу $M(\mathcal{G})$, который допускает точное описание в категории алгебраических торов. Небольшое, но нетривиальное обобщение. Пусть F – расширение поля k, $F \subset \bar{k}$, $\mathcal{G}_0$ – подгруппа в $\mathcal{G}$, соответствующая подполю F. Обозначим через $p_F(G)$ класс $\mathcal{G}_0$-модуля Пикара группы $G \otimes_k F$, $p_F(G) \in M(\mathcal{G}_0)$.

Пусть L/k – нормальное расширение с группой Галуа $\Pi = \mathcal{G}/\mathcal{G}_0$, тогда $Pic\, X_L = (Pic\, \bar{X})^{\mathcal{G}_0}$; для пермутационного $\mathcal{G}$-модуля $\bar{S}$ Π-модуль $S_L = (\bar{S})^{\mathcal{G}_0}$ снова пермутационный, класс $p_{L/k}(G) = [Pic\, X_L]$ также бирациональный инвариант многообразия X. Выберем в группе G максимальный k-тор T и пусть L – конечное расширение Галуа поля k, над которым тор T распадается. Тогда группа $G \otimes_k L$ рациональна над L, инвариант $p_L(G)$ равен нулю, Π-модуль $Pic\, X_L$ можно рассматривать как $\mathcal{G}$-модуль и классы $p(G)$ и $p_{L/k}(G)$ совпадают. Можно было бы назвать поле L полем разложения класса $p(G)$.

Нам потребуется следующий факт. Пусть Y и Z – гладкие геометрически неприводимые алгебраические многообразия над полем k. Мы видели в п. 3.4., что $U(Y \times_k Z) = U(Y) \oplus U(Z)$; далее, хорошо известно, что $Pic\,(Y \times_k A^m) \cong Pic\, Y$. Из этого следует, учитывая последовательность Хохшильда-Серра п.1.10.,что канонический морфизм

$$Pic\, Y \oplus Pic\, Z \to Pic\,(Y \times_k Z)$$

является изоморфизмом в случае, когда Z является k-рациональным многообразием. Пусть k-группа G есть произведение $G_1 \times_k G_2$ двух связных k-групп, X_1 и X_2 – проективные модели групп G_1 и G_2. Тогда $X_1 \times_k X_2$ есть проективная модель группы G и, по только что сказанному, имеем изоморфизм $\mathcal{G}$-модулей

$$Pic\,(\bar{X}_1 \times_k \bar{X}_2) \cong Pic\, \bar{X}_1 \oplus Pic\, \bar{X}_2.$$

Если Y – другая проективная модель группы G, то модули $Pic\, \bar{Y}$ и $Pic\, \bar{X}_1 \oplus Pic\, \bar{X}_2$ подобны. На языке классов Пикара это можно записать в виде равенства

$$p(G_1 \times_k G_2) = p(G_1) + p(G_2).$$

Из вложения $G \to X$ следует точная последовательность модулей

$$0 \quad \to \hat{G} \to \bar{S} \to Pic\, \bar{X} \to Pic\, \bar{G} \to \quad 0, \tag{1}$$

где $\bar{S}$ есть $\mathcal{G}$-модуль, порожденный компонентами замкнутого подмножества $\bar{F} = \bar{X} \setminus \bar{G}$; в силу нормальности G, F является несмешанным подмногообразием коразмерности один. Рассмотрим два крайних случая:

а) $G = T$ – алгебраический k-тор, тогда $Pic\, \bar{T} = 0$ и мы имеем точную последовательность модулей без кручения

$$0 \quad \to \hat{T} \to \bar{S} \to Pic\, \bar{X} \to \quad 0, \tag{2}$$

б) G – полупростая, тогда $\hat{G} = 0$, имеем точную последовательность

$$0 \quad \to \bar{S} \to Pic\, \bar{X} \to Pic\, \bar{G} \to \quad 0.$$

Если G – односвязна, то $Pic\, \bar{G} = 0$, в этом случае $Pic\, \bar{X}$ является пермутационным $\mathcal{G}$-модулем.

4.6. Вялые резольвенты модуля. Рассмотрим ситуацию а) более подробно на конечном уровне. Пусть L/k – конечное расширение Галуа с группой П, обозначим через $C(L/k)$ категорию торов, определенных над k и разложимых над L, через $C(\Pi)$ – двойственную категорию П-модулей конечного ранга без кручения. Имеется вложение категории $C(L/k)$ в категорию $C(k)$ всех k-торов и $C(k)$ есть объединение всех подкатегорий $C(L/k)$; категория $C(k)$ дуальна категории $\mathcal{G}$-модулей $C(\mathcal{G})$. Пусть $T \in C(L/k)$ и X – проективная модель тора T над k. Вложение T_L в X_L определяет точную последовательность, аналогичную последовательности (2) на конечном уровне, т.е. последовательность П-модулей

$$0 \quad \to \hat{T} \to \hat{S} \to Pic\, X_L \to \quad 0. \tag{3}$$

Как мы видели, группы $H^1(\pi, Pic\, X_L)$ и $H^{-1}(\pi, Pic\, X_L)$ являются бирациональными инвариантами многообразия T. Следующий неожиданный факт оказался одним из важнейших в бирациональной классификации алгебраических k-торов.

Теорема. Для любого L/k-тора T имеем равенство $H^{-1}(L/F, p_{L/k}(T) = 0$, где $k \subset F \subset L$.

Доказательство. Пусть T_0 – максимальный подтор в T, разложимый над k. Имеем точную последовательность k-торов

$$1 \quad \to T_0 \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} T_1 \to \quad 1,$$

где $T_0 \cong G_{m,k}^{\,r}$, а T_1 – анизотропен, т.е. не имеет характеров, определенных k. Поскольку $H^1(L/k, T_0(L(T_1))) = 0$, то морфизм β имеет k-рациональное сечение, откуда следует, что многообразие T бирационально эквивалентно произведению $T_0 \times_k T_1$. Поэтому $p(T) = p(T_1)$, откуда $H^{-1}(L/k, p(T)) = H^{-1}(L/k, p(T_1))$. Пусть теперь в последовательности (3) модуль $\hat{T}$ не имеет П-инвариантных элементов, кроме нуля. Тогда из точной последовательности

$$0 \quad \to H^{-1}(L/k, Pic\, X_L) \to \hat{H}^0(L/k, \hat{T})$$

следует, что $H^{-1}(L/k, Pic\, X_L) = 0$. Итак, для любого тора $T \in C(L/k)$ бирациональный инвариант $H^{-1}(L/k, p_{L/k}(T)$ равен нулю. Но тогда это же верно и для любого промежуточного поля F, $k \subset F \subset L$,

$$H^{-1}(L/F, p_k(T)) = H^{-1}(L/F, p_F(T \otimes_k F)) = 0. \quad \triangle$$

Пусть $\hat{N}$ – любой П- модуль из класса $[Pic\, X_L]$. Он имеет конечный ранг и прямые суммы $\hat{N} \oplus \hat{S}_1$ и $Pic\, X_L \oplus \hat{S}_2$ – изоморфны. Если N – k-тор, дуальный модулю $\hat{N}$, то ясно, что группа $H^1(L/F, N(L))$ также является бирациональным инвариантом многообразия T. Геометрическую интерпретацию этого инварианта указали Колье-Телен и Сансюк [1], изучавшие проблему R-эквивалентности на алгебраических группах. К этому вопросу мы вернемся в одной из следующих глав. Они же заметили, что гомоморфизм ограничения $H^1(X, N) \to H^1(U, N)$ является сюръективным для открытого подмножества U гладкого k-многообразия X. Иначе говоря, всякий торсор над U со структурной группой N продолжается до торсора на всем X. Торсоры с таким свойством называются *вялыми*. Поэтому естественно назвать тор $N \in C(L/k)$ и его модуль рациональных характеров $\hat{N} \in C(\Pi)$ *вялыми*, если $H^{-1}(\pi, \hat{N}) = 0$ для всех подгрупп π группы П.

Определение. Точная последовательность П-модулей конечного ранга

$$0 \quad \to \hat{T} \to \hat{S} \to \hat{N} \to \quad 0, \tag{4}$$

в которой $\hat{S}$ – пермутационный, а $\hat{N}$ – вялый, называется *вялой резольвентой* модуля $\hat{T}$.

Хотя мы пришли к этому понятию исходя из геометрических соображений, легко построить резольвенту (4) чисто алгебраическим путем. В самом деле, пусть $\hat{T}^0 = Hom(\hat{T}, \mathbf{Z})$ – дуальный модуль. Всегда существует пермутационный П-модуль $\hat{S}$, фактором которого является модуль $\hat{T}^0$. Модуль $\hat{S}$ есть прямая сумма П-модулей вида $\mathbf{Z}[\Pi/\pi]$, $\pi \subset \Pi$. Имеем точную последовательность П-модулей из категории $C(\Pi)$

$$0 \quad \to \hat{R} \to \hat{S} \to \hat{T}^0 \to \quad 0, \tag{5}$$

откуда точная последовательность когомологий

$$\hat{S}^\pi \to (\hat{T}^0)^\pi \to H^1(\pi, \hat{R}) \to \quad 0.$$

Выбирая $\hat{S}$ достаточно большим так, чтобы отображение $\hat{S}^\pi \to (\hat{T}^0)^\pi$ стало сюръективным для всех подгрупп π группы П, получаем соотношение $H^1(\pi, \hat{R}) = 0$ для всех подгрупп π из П. Переходя в (5) к дуальным модулям и учитывая , что $\hat{S}^0 \cong \hat{S}$, получаем вялую резольвенту П-модуля $\hat{T}$

$$0 \quad \to \hat{T} \to \hat{S} \to \hat{N} \to \quad 0,$$

где $\hat{N} = \hat{R}^0$. Покажем теперь, что класс подобия $[\hat{N}]$ зависит только от модуля $\hat{T}$, но не от выбора резольвенты (4).

Пусть

$$0 \quad \to \hat{T} \to \hat{S}_1 \to \hat{N}_1 \to \quad 0,$$
$$0 \quad \to \hat{T} \to \hat{S}_2 \to \hat{N}_2 \to \quad 0$$

– две вялые резольвенты П-модуля $\hat{T}$. Перейдем к дуальным модулям

$$0 \quad \to \hat{N}_1^0 \to \hat{S}_1 \xrightarrow{\beta_1} \hat{T}^0 \to \quad 0,$$

$$0 \quad \to \hat{N}_2^0 \to \hat{S}_2 \xrightarrow{\beta_2} \hat{T}^0 \to \quad 0,$$

и рассмотрим факторизацию

$$0 \quad \to \hat{N}^0 \to \hat{S}_1 \oplus \hat{S}_2 \xrightarrow{\beta} \hat{T}^0 \to \quad 0,$$

где $\beta(s_1 + s_2) = \beta(s_1) + \beta(s_2)$. Нетрудно заметить, что

$$\hat{N}^0 \quad \cong \quad \hat{N}_1^0 \oplus \hat{S}_2 \quad \cong \quad \hat{N}_2^0 \oplus \hat{S}_1,$$

откуда $\hat{N}_1 \oplus \hat{S}_2 \quad \cong \quad \hat{N}_2 \oplus \hat{S}_1$ или $[\hat{N}_1] = [\hat{N}_2]$. Таким образом, класс Пикара $p(T)$ может быть задан чисто алгебраически:

$$p(T) = p(\hat{T}) = [\hat{N}],$$

где $\hat{N}$ – вялый П-модуль, определяемый какой-либо вялой резольвентой (4). Поскольку алгебраическое определение класса $p(T)$ совершенно не зависит от характеристики поля определения, то хотелось бы распространить эти понятия и на случай характеристики $p > 0$. Это делается следующим образом. Пусть X – гладкое многообразие над полем k произвольной характеристики и L – расширение Галуа поля k с группой П. Предположим, что $Pic\, X_L$ имеет конечный тип. Тогда существует открытое подмножество U в X такое, что $Pic\,(U_L) = 0$. Модуль $L[U]^*/L^*$ имеет

конечный тип и не имеет кручения, пусть $p(L[U]^*/L^*)$ – его класс Пикара в $C(\Pi)$. Этот класс не зависит от выбора специальной окрестности U в X и он является бирациональным инвариантом k-многообразия X. Обозначим его $pt_{L/k}(X)$ или просто $pt(X)$. Пусть теперь X – гладкое проективное многообразие над полем k характеристики нуль. Тогда имеем два бирациональных инварианта $p(X) = [Pic\,\bar{X}]$ и $pt(X)$ и их L/k – аналоги. Если $Pic\,\bar{X} \in C(\mathcal{G})$ и, сверх того, модуль $Pic\,\bar{X}$ является вялым, то $p(X)$ совпадает с $pt(X)$. Для алгебраических торов T имеем

$$p(T) = p(\hat{T}) = pt(T).$$

4.7. Полугруппа стабильной эквивалентности. Назовем два k-многообразия X_1 и X_2 *стабильно эквивалентными*, если существует бирациональный изоморфизм

$$X_1 \times_k \mathbf{A}^m \cong X_2 \times_k \mathbf{A}^n$$

для некоторых m и n.

На языке полей функций это определение эквивалентно существованию k-изоморфизма

$$k(X_1)(x_1, .., x_m) \cong k(X_2)(y_1, .., y_n),$$

где x_i – алгебраически независимы над $k(X_1)$, аналогично, y_i над $k(X_2)$. В случае, если $X \times_k \mathbf{A}^m \cong \mathbf{A}^n$, назовем многообразие X *стабильно рациональным*. Ясно, что для стабильно эквивалентных многообразий X_1 и X_2, $p(X_1) = p(X_2)$, $pt(X_1) = pt(X_2)$. Для стабильно рационального многообразия X инварианты $p(X)$ и $pt(X)$ равны нулю.

Пусть $\{T\}$ – класс стабильной эквивалентности тора T в категории $C(L/k)$. На множестве $\{T\}$ определим структуру коммутативной полугруппы, полагая

$$\{T_1\} \cdot \{T_2\} = \{T_1 \times_k T_2\}.$$

Класс торов, стабильно рациональных над полем k, играет роль единичного элемента. Обозначим эту полугруппу символом $Z(L/k)$. Если рассматривать категорию $C(k)$, то получим полугруппу $Z(k)$.

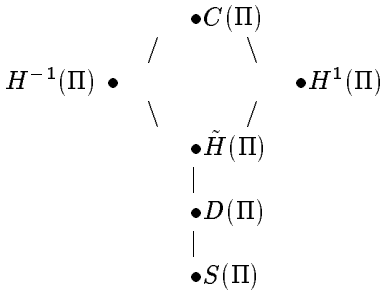
Введем ряд обозначений. Пусть $S(\Pi)$ – класс всех пермутационных Π-модулей конечного типа,

$$H^q(\Pi) = \{M \in C(\Pi) \mid H^q(\pi, M) = 0 \quad \forall \pi \subset \Pi\},$$

H^q – когомологии Тейта. Ясно, что $S(\Pi) \subset H^{-1} \cap H^1 = \tilde{H}$. Пусть, далее,

$$D(\Pi) = \{M \in C(\Pi) \mid M \oplus M' \in S(\Pi)\}.$$

Имеем граф включений



На множестве классов подобия $C(\Pi)/S(\Pi)$ операция прямой суммы модулей определяет строение коммутативной полугруппы, нулевым элементом которой служит класс $S(\Pi)$. Классы $D(\Pi)/S(\Pi)$ образуют максимальную подгруппу в полугруппе $C(\Pi)/S(\Pi)$. Из результатов Якобинского [1] по теории решеток следует, что эта группа имеет конечное число образующих. Предположение о том, что $\tilde{H}(\Pi) = D(\Pi)$ оказалось неверным, пример будет приведен ниже.

Изучим отображение $p_{L/k} : Z(L/k) \to H^{-1}(\Pi)/S(\Pi)$. Пусть $\hat{N} \in H^{-1}(\Pi)$, модуль $\hat{N}$ может быть представлен в виде фактора $\hat{N} = \hat{S}/\hat{T}$, где $\hat{S}$ – свободный П-модуль конечного ранга. Из п.4.6. следует тогда, что $[\hat{N}] = p_{L/k}(\hat{T})$, итак, отображение $p_{L/k}$ является сюръективным. Пусть теперь $p_{L/k}(T_1) = p_{L/k}(T_2)$; $T_1,\ T_2 \in C(L/k)$. Имеем две вялые резольвенты

$$0 \to \hat{T}_1 \to \hat{S}_1 \stackrel{\beta_1}{\to} \hat{N}_1 \to 0,$$

$$0 \to \hat{T}_2 \to \hat{S}_2 \stackrel{\beta_2}{\to} \hat{N}_2 \to 0.$$

Поскольку $[\hat{N}_1] = [\hat{N}_2]$, то, прибавляя, если необходимо, пермутационные модули к $\hat{S}_i$ и $\hat{N}_i$, можно считать, что $\hat{N}_1 = \hat{N}_2 = \hat{N}$. Как и в п.4.6. рассмотрим точную последовательность П-модулей

$$0 \to \hat{M} \to \hat{S}_1 \oplus \hat{S}_2 \stackrel{\beta}{\to} \hat{N} \to 0,$$

где $\beta(s_1 + s_2) = \beta(s_1) + \beta(s_2)$, $\hat{M} = Ker\,\beta$. Поскольку β_1 и β_1 – эпиморфизмы, то $pr_1\hat{M} = \hat{S}_1$, $pr_2\hat{M} = \hat{S}_2$, $Ker\,pr_1 = \hat{T}_2$, $Ker\,pr_2 = \hat{T}_1$. Таким образом, точны следующие последовательности П-модулей

$$0 \to \hat{T}_1 \to \hat{M} \to \hat{S}_2 \to 0,$$

$$0 \to \hat{T}_2 \to \hat{M} \to \hat{S}_1 \to 0,$$

откуда соответствующая последовательность k-торов

$$1 \to S_2 \to M \stackrel{\varphi_1}{\to} T_1 \to 1,$$

$$1 \to S_1 \to M \stackrel{\varphi_2}{\to} T_2 \to 1.$$

Поскольку торы S_1 и S_2 являются квазиразложимыми, то φ_1 и φ_2 обладают рациональными сечениями над полем k, отсюда бирациональная эквивалентность прямых произведений

$$T_1 \times_k S_2 \cong T_2 \times_k S_1.$$

Нами доказана следующая теорема, линеаризирующая сложную нелинейную задачу.

Теорема 1. Отображение $p_{L/k} : Z(L/k) \to H^{-1}(\Pi)/S(\Pi)$ является изоморфизмом полугрупп. $\triangle$

Особый интерес представляют торы, попадающие в ядро отображения p.

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны :

а) тор T стабильно рационален над полем k,

б) класс Пикара $p(T)$ равен нулю,

в) модуль рациональных характеров $\hat{T}$ тора T вкладывается в точную последовательность вида

$$0 \to \hat{T} \to \hat{S} \to \hat{S}_1 \to 0,$$

где $\hat{S}, \hat{S}_1 \in S(\Pi)$. $\triangle$

Вопрос о том, не является ли стабильно рациональный тор в действительности k-рациональным, к сожалению, до сих пор остается открытым. Мы вернемся к этой задаче в следующих параграфах.

4.8. Модули Шевалле. Приведем теперь несколько важных примеров, показывающих эффективность критериев, приведенных в предыдущих пунктах. Пусть Π – конечная группа, π – ее подгруппа, $\mathbf{Z}[\Pi]$ – групповое кольцо, $\mathbf{Z}[\Pi/\pi]$ – модуль, натянутый на смежные классы $e_1, ..., e_n$, на которых группа Π действует перестановкой. Рассмотрим отображение $\varepsilon : \mathbf{Z}[\Pi/\pi] \to \mathbf{Z}$, определяемое равенством

$$\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Ясно, что ε является Π-эпиморфизмом, его называют еще пополняющим гомоморфизмом. Пусть $I_{\Pi/\pi} = Ker\,\varepsilon$. Имеем факторизацию

$$0 \to I_{\Pi/\pi} \to \mathbf{Z}[\Pi/\pi] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to \ 0, \tag{1}$$

группа Π действует тривиально на $\mathbf{Z}$. Переходя к дуальным модулям, получаем двойственную последовательность

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\varepsilon^0} \mathbf{Z}[\Pi/\pi] \to J_{\Pi/\pi} \to \ 0, \tag{2}$$

где $J_{\Pi/\pi} = I^0_{\Pi/\pi}$, $\varepsilon^0(1) = e_1 + ... + e_n$.

Пусть L/k – расширение Галуа с группой Π, F – промежуточное поле, такое, что $Gal\,(L/F) = \pi$. Последовательности (1) и (2) определяют точные последовательности k-торов.

$$1 \to \mathbf{G}_{m,k} \to R_{F/k}(\mathbf{G}_m) \to T_1 \to \ 1,$$

$$1 \to T_2 \to R_{F/k}(\mathbf{G}_m) \to \mathbf{G}_m \to \ 1.$$

Поскольку $R_{F/k}(\mathbf{G}_m)$ можно отождествить с открытым подмножеством в $R_{F/k}(\mathbf{A}^1) = \mathbf{A}^n_k$ то тор T_1 допускает открытое погружение в проективное пространство $\mathbf{P}^{n-1}_k$, следовательно, T_1 -рационален над k, $p(T_1) = 0$. Тор T_2 с этой точки зрения значительно интереснее. Морфизм N на k-точках $R_{F/k}(\mathbf{G}_m)(k) = F^*$ есть обычное норменное отображение, многообразие T_2 представимо в виде норменной гиперповерхности $N(x_1, ..., x_n) = 1$ в пространстве $\mathbf{A}^n_k$, $x_1, ..., x_n$ – координаты элемента поля F в каком-нибудь базисе. Тор T_2 имеет стандартное обозначение $R^{(1)}_{F/k}(\mathbf{G}_m)$, модуль рациональных характеров которого $J_{\Pi/\pi} = I^0_{\Pi/\pi}$ называется *модулемШевалле*. Шевалле [1] первый обнаружил нерациональность торов вида $R^{(1)}_{F/k}(\mathbf{G}_m)$ для некоторых расширений F/k.

Рассмотрим частный случай, когда $\pi = (1)$. Последовательность (1) принимает вид

$$0 \quad \to I_\Pi \to \mathbf{Z}[\Pi] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to \quad 0. \tag{3}$$

Всякий модуль есть фактор свободного модуля, поэтому имеется также точная последовательность

$$0 \quad \to \hat{N}^0 \to \hat{P}^0 \to I_\Pi \to \quad 0, \tag{4}$$

где $\hat{P}$ – свободный Π-модуль. Из этих двух последовательностей сразу следует, что

$$H^1(\pi, \hat{N}^0) = \hat{H}^0(\pi, I_\Pi) = H^{-1}(\pi, \mathbf{Z})$$

для всех подгрупп π группы Π. Таким образом, Π-модуль $\hat{N} = Hom(\hat{N}^0, \mathbf{Z}) \in H^{-1}(\Pi)$. Переходя в (4) к сопряженным модулям, получаем вялую резольвенту

$$0 \to J_\Pi \to \hat{P} \to \hat{N} \to 0.$$

Из (3) и (4) следует, что $H^1(\pi, \hat{N}) = H^3(\pi, \mathbf{Z})$. Заметим также, что в качестве $\hat{N}$ можно взять Π-модуль $J_\Pi \otimes_{\mathbf{Z}} J_\Pi$.

Теорема 1. Пусть $T = R^{(1)}_{L/k}(G_m)$, L/k – расширение Галуа. Тогда для любого промежуточного поля F, $k \subset F \subset L$, справедливо равенство

$$H^1(L/F, p(T)) = H^3(L/F, \mathbf{Z}). \ \triangle$$

Эта теорема позволяет находить нерациональные торы. Например, если группа Π содержит подгруппу π вида $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, где p – простое число, то тор T не является рациональным над полем L^π и, тем более, над полем k, ибо

$$H^3(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \neq 0.$$

Пример 1. Пусть $L = \mathbf{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ – биквадратичное расширение рационального поля. Рассмотрим торы $T(a,b) = R^{(1)}_{L/\mathbf{Q}}(G_m)$. По теореме 1 $H^1(L/\mathbf{Q}, p(T(a,b))) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ для любого поля L данного вида. Поэтому торы $T(a,b)$ не являются рациональными над полем $\mathbf{Q}$. Пусть $L_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{b_1})$ и $L_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{a_2}, \sqrt{b_2})$ два биквадратичных расширения, $L_1 \neq L_2$. Покажем, что торы $T(a_1, b_1)$ и $T(a_2, b_2)$ бирационально неэквивалентны над полем $\mathbf{Q}$. Пусть M – поле, порожденное полями L_1 и L_2 в $\bar{\mathbf{Q}}$, $L_0 = L_1 \cap L_2$. Пусть $\Pi = Gal(M/\mathbf{Q})$, $\pi_1 = Gal(M/L_1)$, $\pi_2 = Gal(M/L_2)$. Выберем в классе $p(T(a_1, b_1))$ π_1-тривиальный Π-модуль $\hat{N}_1$, в классе $p(T(a_2, b_2))$ – π_2-тривиальный Π-модуль $\hat{N}_2$. Так как $L_1 \neq L_2$, то степень $(L_0 : \mathbf{Q})$ равна 1 или 2. В первом случае $\Pi = \pi_1 \times \pi_2$. Имеем $H^1(\pi_1, \hat{N}_1) = 0$, поэтому $H^1(\Pi, \hat{N}_1) = H^1(\Pi/\pi_1, \hat{N}_1) = H^1(\pi_2, \hat{N}_1) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, ибо $\pi_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Но $H^1(\pi_2, \hat{N}_2) = 0$, следовательно, $p(T(a_1, b_1)) \neq p(T(a_2, b_2))$. Торы $(T(a_1, b_1))$ и $(T(a_2, b_2))$ даже не являются стабильно эквивалентными над полем $\mathbf{Q}$. Во втором случае Π есть прямое произведение групп π_1, π_2 и некоторой третьей группы π_3, все эти подгруппы имеют порядок 2. Как и в первом случае $H^1(\pi_1 \times \pi_2, \hat{N}_1) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $H^1(\pi_2 \times \pi_3, \hat{N}_2) = H^1(\pi_3, \hat{N}_2) = H^{-1}(\pi_3, \hat{N}_2) = 0$. Получаем тот же результат, что и в первом случае.

Для циклической группы Π модули I_Π и J_Π изоморфны, поэтому класс $p(J_\Pi)$ равен нулю. Как показали исследования, проведенные, в основном, С.Эндо и Т.Миятой [1-6], требование обратимости элемента $p(J_\Pi)$ в полугруппе $H^{-1}(\Pi)/S(\Pi)$ налагает весьма серьезные ограничения на строение группы Π. Изложим полученные результаты в порядке усиления требований. Следующее утверждение позволяет проводить индуктивные доказательства.

Предложение. Пусть Π – конечная группа. Для модуля $M \in C(\Pi)$ следующие условия эквивалентны:

1) $M \in D(\Pi)$,
2) $M \in D(\Pi_p)$ для всякой силовской подгруппы Π_p группы Π,
3) $Ext^1_\Pi(M, P) = 0$ для всякого модуля $P \in H^1(\Pi)$,
4) $Ext^1_\Pi(N, M) = 0$ для всякого модуля $N \in H^{-1}(\Pi)$.

Доказательство. Если S – пермутационный Π-модуль, то S является пермутационным π-модулем для всякой подгруппы $\pi \subset \Pi$. Поэтому из 1) следует 2). Далее, $Ext^1_\Pi(M, P) = H^1(\Pi, Hom(M, P))$. Если $M \in D(\Pi_p)$, $P \in H^1(\Pi)$, то $H^1(\Pi_p, Hom(M, P)) = 0$. Поэтому из 2) следует 3).

Равенство $Ext^1_{\Pi}(N,M) = Ext^1_{\Pi}(M,N^0)$ для модулей из $C(\Pi)$ показывает, что условия 3) и 4) равносильны. Рассмотрим вялую резольвенту модуля M

$$0 \quad \to M \to S \to N \to \quad 0.$$

Из 4) следует, что она расщепляется: $S = M \oplus N$, поэтому $M \in D(\Pi)$. $\triangle$

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны:

1) каждая силовская подгруппа группы Π либо циклическая, либо является обобщенной группой кватернионов,

2) все абелевы подгруппы группы Π являются циклическими,

3) $H^3(\pi, \mathbf{Z}) = 0$ для всех подгрупп $\pi \subset \Pi$,

4) $p(J_{\Pi}) \in H^1(\Pi)/S(\Pi)$.

Доказательство. Теорема 1 показывает равносильность условий 3) и 4). В книге Картана и Эйленберга [1] показано, что справедливы следующие импликации: 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 3). Поскольку $H^3(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, то из 3) следует 2). $\triangle$

Определение. Конечная группа называется *метациклической*, если все ее силовские подгруппы цикличны.

Метациклическая группа представима в виде полупрямого произведения $H \bullet \Gamma$ нормальной циклической подгруппы H порядка m и циклической подгруппы Γ порядка n, $(m,n) = 1$.

Теорема 3. Пусть Π – конечная группа. Следующие условия эквивалентны:

1) класс $p(J_{\Pi})$ обратим,

2) группа Π является метациклической,

3) $H^1(\Pi) = H^{-1}(\Pi) = D(\Pi)$.

Доказательство. Класс $p(J_{\Pi})$ равен $[\hat{N}]$, где $[\hat{N}^0]$ определен последовательностями (3) и (4). Если $\hat{N} \in D(\Pi)$, то и $\hat{N}^0 \in D(\Pi)$, существует модуль $\hat{M}$ такой, что $\hat{N}^0 \oplus \hat{M} = \hat{S} \in S(\Pi)$. Имеем равенство $H^2(\Pi, \hat{S}) = H^2(\Pi, \hat{N}^0) \oplus H^2(\Pi, \hat{M})$. Так как группа $H^2(\Pi, \hat{N}^0)$ циклическая, порядка $|\Pi|$, то прямая сумма $H^2(\Pi, \hat{S}) = \sum H^2(\pi, \mathbf{Z})$ содержит элемент порядка $|\Pi|$, а это может быть только в случае, когда все силовские подгруппы группы Π являются циклическими. Итак, из 1) $\Rightarrow$ 2). Ясно, что из 3) $\Rightarrow$ 1). Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) будет доказана в §5.

Пример 2. Пусть Π – кватернионная группа порядка 8. Тогда, по теореме 2, $p(J_{\Pi}) \in H^1(\Pi)/S(\Pi)$, но $p(J_{\Pi})$ не является обратимым по теореме 3. Следовательно, $H^{-1}(\Pi) \cap H^1(\Pi) \neq D(\Pi)$, что опровергает одно поспешное утверждение автора.

Следующая деликатная теорема полностью описывает стабильно рациональные торы вида $R^1_{L/k}(G_m)$ в случае когда L/k – расширение Галуа, Эндо - Мията [3].

Теорема 4. Пусть Π – конечная группа. Следующие условия эквивалентны:

1) $\Pi =< s,t >$, $t^m = s^{2^n} = 1$, $sts^{-1} = t^r$, m – нечетно, $r^2 \equiv 1 (mod m)$;

2) $p(J_{\Pi}) = 0$;

3) $p(J_{\Pi})$ имеет конечный порядок;

4) группа Π метациклична и $H^4(\Pi, \mathbf{Z}) = \hat{H}^0(\Pi, \mathbf{Z})$. $\triangle$

В работе Кольо-Телена и Сансюка [1] рассмотрен случай 1) теоремы 4 при $m = p^a$, $p > 2$, простое. Пусть $\Gamma =< s >$. Они показали, что условия 1) - 4) эквивалентны следующим:

5) $p(J_{\Pi/\Gamma}) = 0$,

6) $p(J_{\Pi/\Gamma})$ имеет конечный порядок. $\triangle$

Пример 3. Пусть Π – группа порядка 20, порожденная элементами t, s с условиями $t^5 = s^4 = 1$, $sts^{-1} = t^2$. Тогда класс $p(J_{\Pi/\Gamma})$ обратим, но имеет бесконечный порядок в группе $D(\Pi)/S(\Pi)$.

Ранг группы $D(\Pi)/S(\Pi)$ вычислял А.Дресс [1], кручение в ряде случаев исследовали Эндо и Мията. Вот один из случаев.

Пример 4. Пусть Π – конечная p-группа. Вычислим группу $D(\Pi)/S(\Pi)$. Выберем Π-модуль N из $D(\Pi)$, тогда существует $N' \in D(\Pi)$, такой, что $N \oplus N' \in S(\Pi)$. Так как Π есть p-группа, то $\mathbf{Z}_p[\Pi/\pi]$ есть неразложимый $\mathbf{Z}_p[\Pi]$-модуль, где $\mathbf{Z}_p$ – кольцо целых p-адических чисел. Поскольку для модулей над кольцом $\mathbf{Z}_p[\Pi]$ справедлива теорема Крулля-Шмидта, то существует $S \in S(\Pi)$, такой, что $S_p = N_p$, где $A_p = \mathbf{Z}_p \otimes A$ для Π-модуля A. Таким образом,Π-модули S и N принадлежат одному роду. Но тогда существует проективный идеал $P \subset \mathbf{Z}[\Pi]$, такой, что $N \oplus \mathbf{Z}[\Pi] = S \oplus P$. Таким образом, в каждом классе подобия Π-модуля N, $N \in D(\Pi)$, имеется проективный Π-модуль. Поэтому группа $D(\Pi)/S(\Pi)$ конечна, она является фактором проективной группы классов кольца $\mathbf{Z}[\Pi]$.

Между теоремами 2 и 4 имеется небольшой зазор. Пусть $\tilde{H}(\Pi) = H^{-1}(\Pi) \cap H^1(\Pi)$, $\tilde{H}(\Pi) \supset D(\Pi)$. Эндо и Мията [6] дали полный ответ на вопрос, для каких конечных групп Π имеется совпадение $\tilde{H}(\Pi) = D(\Pi)$. Они использовали следующие соображения. Более тщательное исследование модуля Шевалле J_Π показывает, что последовательность (4) можно взять в виде

$$0 \to I_\Pi \otimes I_\Pi \to (\mathbf{Z}[\Pi])^{n-1} \to I_\Pi \to 0,$$

$n = |\Pi|$. Тогда $p(J_\Pi) = [L_\Pi]$, $L_\Pi = (I_\Pi \otimes I_\Pi)^0$. Оказывается, $p(J_\Pi)$ лежит в $\tilde{H}(\Pi)/S(\Pi)$. Далее, можно считать Π p-группой, поскольку имеется полный аналог с доказанным выше предложением: $\tilde{H}(\Pi) = D(\Pi)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{H}(\Pi_p) = D(\Pi_p)$ для всех силовских p-подгрупп группы Π. Группа $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ для $p > 2$ сразу исключается, осталось разобрать 2-группы. Напомним, что диэдральной группой называется группа, порожденная двумя образующими σ, τ, с условиями

$$\sigma^n = \tau^2 = 1, \quad \tau\sigma\tau = \sigma^{-1}.$$

При $n = 2$ получаем четверную группу Клейна $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Выберем в классе $p(J_\Pi)$ какой-нибудь представитель, например, Π-модуль $J_\Pi \otimes_Z J_\Pi$.

Теорема 5. Следующие условия эквивалентны:

1) $p(J_\Pi \otimes_Z J_\Pi) = p(p(J_\Pi)) \in D(\Pi)$;

2) $\tilde{H}(\Pi) = D(\Pi)$;

3) каждая силовская подгруппа Π_p группы Π является циклической для нечетного p, группа Π_2 – циклическая или группа диэдра D_n, $n = 2^m$. $\triangle$

Пример 5. Пусть F/k – сепарабельное расширение простой степени p. Оказывается, хотя тор $T = R^1_{F/k}(G_m)$ не всегда рационален, но существует k-тор T' такой, что $T \times_k T'$ является k-рациональным многообразием, по-другому, класс $p(T)$ является обратимым. В случае, когда F/k – нормально, модули I_Π и J_Π изоморфны в силу цикличности расширения F/k, поэтому тор T рационален над k. Итак, пусть расширение F/k не нормально, L – нормальная оболочка поля F в k_s, $\Pi = Gal\,(L/k)$, $(F : k) = p$, $(L : F) = m$, $(m, p) = 1$. Группа Π есть подгруппа симметрической группы степени p, она действует на корнях неприводимого многочлена степени p. Выберем Π-модуль $\hat{N} \in p(T)$. Силовская подгруппа Π_p группы Π циклична порядка p, поэтому Π_p-модуль $\hat{N}$ лежит в $D(\Pi_p)$; Π-модуль $\hat{T}$ есть $J_{\Pi/\pi} = \mathbf{Z}[\Pi/\pi]/\mathbf{Z}$, подгруппа π имеет неподвижную точку при действии перестановками на Π/π, поэтому π- модуль $\mathbf{Z}[\Pi/\pi]$ изоморфен прямой сумме π-модулей $\hat{T} \oplus \mathbf{Z}$. Отсюда следует, что π-модуль $\hat{N}$ лежит в $D(\pi)$. Любая силовская подгруппа Π_q, $q \neq p$, сопряжена с подгруппой из π, поэтому Π_q-модуль $\hat{N}$ принадлежит $D(\Pi_q)$.

Но тогда и $\hat{N} \in D(\Pi)$. Данный результат имеет важные применения в арифметике алгебраических групп и в арифметике числовых полей. Впервые его получили Кольо-Телен и Кунявский независимо друг от друга. Класс $[\hat{N}]$ не всегда равен нулю. Пусть $k = \mathbf{Q}$, F – поле, порожденное корнем неприводимого над $\mathbf{Q}$ многочлена $x^5 - a$, $a \in \mathbf{Q}$, $(F : \mathbf{Q}) = 5$. Группа Галуа Π этого многочлена описана в примере 3, она является полупрямым произведением $\Gamma \cdot \pi$ инвариантной подгруппы $\Gamma =< t >$ порядка 5 и циклической подгруппы $\pi =< s >$ порядка 4. Имеем $H^q(\Pi, \mathbf{Z}) = H^q(\pi, \mathbf{Z}) \oplus H^q(\Gamma, \mathbf{Z})^\pi$ для $q \geq 0$ по формуле Линдона. Модуль $\hat{N}$ из класса $p(J_{\Pi/\pi})$ можно вычислить из точной последовательности

$$0 \ \to \hat{N}^0 \to \mathbf{Z}[\Pi] \xrightarrow{\varphi} \mathbf{Z}[\Pi/\pi] \to \mathbf{Z} \to \ 0,$$

где $\varphi(1) = 1 - t$, $Im(\varphi) = I_{\Pi/\pi}$. Нетрудно увидеть, что $\hat{N}^0 \in H^1(\Pi)$, поэтому имеем вялую резольвенту Π-модуля

$$0 \ \to J_{\Pi/\pi} \to \mathbf{Z}[\Pi] \to \hat{N} \to \ 0.$$

Если $[\hat{N}] = [0]$, то существуют пермутационные Π-модули $\hat{S}_1$ и $\hat{S}_2$ такие, что $\hat{N} \oplus \hat{S}_1 = \hat{S}_2$. Поскольку $\hat{S}_i^0 \cong \hat{S}_i$, то $\hat{N} \oplus \hat{S}_1 \cong \hat{N}^0 \oplus \hat{S}_1$, откуда

$$H^q(\Pi, \hat{N}) \cong H^q(\Pi, \hat{N}^0), \quad q \in \mathbf{Z}.$$

Двумерные когомологии легко вычисляются:

$$H^2(\Pi, \hat{N}^0) = H^1(\Pi, I_{\Pi/\pi}) = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z},$$

$$H^2(\Pi, \hat{N}) = H^3(\Pi, J_{\Pi/\pi}) = H^4(\Gamma, \mathbf{Z})^\pi.$$

Равенство $H^4(\Gamma, \mathbf{Z})^\pi = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ означает, что π действует тривиально на $H^4(\Gamma, \mathbf{Z})$, а это не так. Поэтому $p(J_{\Pi/\pi} \neq 0$.

4.9. Торы малой размерности. Наряду с бирациональной классификацией алгебраических торов, исходя из строения их полей разложения, совершенно естественно изучать торы по возрастанию их размерности. Пусть T – алгебраический тор размерности n, определенный над полем k, $\mathcal{G} = Gal\,(k_s/k)$. Тор T однозначно определяется $\mathcal{G}$-модулем рациональных характеров $\hat{T}$ или, по-другому, целочисленным представлением

$$h : \mathcal{G} \to GL\,(n, \mathbf{Z}) = Aut\,(G_m^n),$$

которое рассматривается с точностью до эквивалентности. Группа $h(\mathcal{G})$ есть конечная подгруппа в $GL\,(n, \mathbf{Z})$, мы ее назвали группой разложения тора T. Чтобы описать все k-торы данной размерности n, следует сначала найти все неизоморфные $h(\mathcal{G})$-модули ранга n. Задача сводится, в первую очередь, к нахождению в группе $GL\,(n, \mathbf{Z})$ всех конечных подгрупп с точностью до сопряженности. По теореме Жордана для каждого n таких подгрупп только конечное число. Как мы видели в п.4.7., класс стабильной эквивалентности тора T зависит только от группы разложения $h(\mathcal{G}) \subset GL\,(n, \mathbf{Z})$, но не от его поля разложения L/k.

Пример 6. Торы размерности 1. Группа $GL\,(1, \mathbf{Z}) = \{1, -1\}$. Единичной подгруппе соответствует тривиальный модуль $\mathbf{Z}$ и тривиальный тор G_m. Группе $GL\,(1, \mathbf{Z})$ соответствует одномерный Π-модуль I_Π, $\Pi = Gal\,(L/k)$, $(L : k) = 2$, $I_\Pi = J_\Pi$. Соответствующий тор имеет вид

$$R^{(1)}_{L/k}(G_m) \ \cong \ R_{L/k}(G_m)/G_m.$$

Пример 7. Торы размерности 2. В группе $GL(2,\mathbf{Z})$ с точностью до сопряженности имеются две максимальные конечные подгруппы W_1, W_2 порядков 8 и 12 соответственно. Группа W_1 порядка 8 является группой всех самосовмещений квадрата, она бирегулярно действует на $G_m \times G_m$ и при вложении $G_m \times G_m \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ ее действие продолжается до бирегулярного действия на $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Пусть T – двумерный k-тор и группа разложения $h(\mathcal{G})$ лежит в W_1. Тогда T есть фактор $(G_m^2 \otimes k_s)/\mathcal{G}$, где $\mathcal{G}$ действует на первом множителе посредством представления h, а на k_s как группа Галуа. Из эквивариантности вложения $G_m^2 \to (\mathbf{P}^1)^2$ следует, что T есть открытая часть k-многообразия $((\mathbf{P}^1)^2 \otimes_k k_s)/\mathcal{G}$, которое является k-формой многообразия $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Но все такие k-формы рациональны, если имеют рациональную k-точку.

Пусть теперь $h(\mathcal{G})$ лежит в W_2. Группа W_2 есть группа всех самосовмещений правильного шестиугольника. Группа W_2 регулярно действует на G_m^2 и бирационально на $\mathbf{A}^2$ или $\mathbf{P}^2$. В однородных координатах $(x:y:z)$ плоскости $\mathbf{P}^2$ действие группы $W_2 =< \sigma, \tau, \omega >$ может быть задано следующим образом: σ циклически переставляет координаты $(x:y:z)$, $\tau(a,b) = (a^{-1}, b^{-1})$, где $a = xz^{-1}$, $b = yz^{-1}$; ω является транспозицией $(x:y:z) \to (x:z:y)$. Выберем следующие рациональные функции на $\mathbf{P}^2$

$$u = \frac{y-z}{x-y}, \quad v = au = \frac{x(y-z)}{z(x-y)}.$$

Поля $k(u,v)$ и $k(a,b)$ изоморфны, и прямой подсчет показывает, что в базисе (u,v) группа W_2 действует по правилу

$$\begin{aligned} \sigma(u,v) &= \left(-\tfrac{u+1}{u}, -\tfrac{v+1}{v}\right), \\ \tau(u,v) &= (v,u), \\ \omega(u,v) &= \left(-\tfrac{u}{u+1}, -\tfrac{v}{v+1}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, группа W_2 сопряжена в группе бирациональных k-преобразований плоскости подгруппе группы $Aut_k(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$. Поэтому, как и в предыдущем случае, соответствующий тор бирационально эквивалентен над полем k форме многообразия $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ и, следовательно, рационален над k. Итак, все торы размерности 2 рациональны над полем определения.

4.10. Торы с биквадратичным полем разложения. В п.4.8. мы видели, что в случае, когда все силовские подгруппы группы $\Pi = Gal(L/k)$ являются циклическими, полугруппа классов $Z(L/k)$ есть группа. Простейшим примером, когда это не так, служит группа $\Pi = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, т.е. это торы с биквадратичным полем разложения. Этот случай исследовал Б.Кунявский [1], им получены весьма точные результаты. Оказалось, что полугруппа $Z(L/k)$ имеет одну образующую и изоморфна полугруппе $\mathbf{Z}_+$ целых неотрицательных чисел по сложению. Образующим элементом служит класс трехмерного тора $R^1_{L/k}(G_m)$. Сверх того, Кунявский получает полную классификацию торов категории $C(L/k)$ с точностью до бирациональной эквивалентности. Оказывается, всякий тор $T \in C(L/k)$, бирационально эквивалентен прямому произведению

$$T \cong R^1_{L/k}(G_m)^n \times_k G^d_{m,k}.$$

Торы $R^1_{L/k}(G_m)^n \times_k G^d_{m,k}$ и $R^1_{L/k}(G_m)^m \times_k G^r_{m,k}$ бирационально эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = m$, $d = r$. Далее, всякий стабильно рациональный тор $T \in C(L/k)$ является рациональным и для всякого тора $T \in C(L/k)$ существует пермутационная резольвента

$$0 \to \hat{T} \to S \to S_1 \to S_2 \to 0,$$

где $S, S_1, S_2 \in S(\Pi)$.

Доказательство всех этих фактов опирается на одно счастливое обстоятельство. Хотя все неразложимые целочисленные представления четверной группы Π и описаны Л.Назаровой [1], но их бесконечное множество и отыскать путеводитель удалось, выбирая, во-первых, в классе стабильной эквивалентности анизотропный тор T, а затем, рассматривая Π-модуль как Λ-модуль, где $\Lambda = \mathbf{Z}[\Pi]/(s), s = \sum g, g \in \Pi$. Кольцо Λ является так называемым кубическим $\mathbf{Z}$-кольцом, оно имеет только конечное число неразложимых представлений, их оказалось 8, два из них имеют степень 3, остальные меньшую степень. Среди трехмерных естественно I_Π и J_Π, $p(J_\Pi) \neq 0$, $p(I_\Pi) = 0$. Это показывает цикличность полугруппы $Z(L/k)$. Остальные факты следуют из однозначности разложения Λ-модулей в сумму неразложимых. Отметим, что приведенные результаты не распространяются на случай групп $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $p > 2$.

4.11. Полугруппа $Z(L/k)$ в общем случае. Вопрос о числе образующих полугруппы $Z(L/k) \cong H^{-1}(\Pi)/S(\Pi)$ с качественной точки зрения решил А.Л.Чистов [2]. Им доказаны следующие теоремы, позволяющие проводить эффективные вычисления.

Теорема 1. Следующие условия эквивалентны:

1) полугруппа $Z(L/k)$ имеет конечное число образующих,

2) полугруппа $H^q(\Pi)$ имеет конечное число образующих для фиксированного q,

3) существует лишь конечное число классов неразложимых Π-модулей, принадлежащих $H^q(\Pi)$. $\triangle$

Теорема 2. Полугруппа $H^q(\Pi)$ имеет конечное число образующих в том и только том случае, если для любой силовской подгруппы Π_p полугруппа $H^q(\Pi_p)$ имеет конечное число образующих. $\triangle$

Далее, показывается, если Π_1, Π_2, – две подгруппы в Π и Π_2 – нормальный делитель группы Π_1, то, если $H^q(\Pi_1/\Pi_2)$ не имеет конечного числа образующих, то и $H^q(\Pi)$ не имеет конечного числа образующих. Для группы $\Pi = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $p > 2$, Чистов строит бесконечное семейство попарно неизоморфных неразложимых модулей, лежащих в $\hat{H}^0(\Pi)$, что приводит к следующему результату.

Теорема 3. Пусть Π есть p-группа, $p > 2$, $\Pi = Gal\,(L/k)$. Тогда $Z(L/k)$ имеет конечное число образующих только в случае, когда Π – циклическая группа. $\triangle$

Для 2-групп Π показывается, что $Z(L/k)$ не является конечнопорожденной, если минимальное число образующих группы Π больше двух. Для $\Pi = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ также $Z(L/k)$ не имеет конечного числа образующих. Далее, если порядок группы Π равен 2^n, $n \geq 4$ и Π не изоморфна циклической группе, группе диэдра D_n порядка 2^n, обобщенной группе кватернионов H_n порядка 2^n, или группе Q_n с образующими σ, τ, связанными соотношениями $\sigma^{2^{n-1}} = \tau^2 = 1$, $\tau\sigma = \sigma^m\tau$, $m = 2^{n-2} - 1$, то полугруппа $Z(L/k)$ не является конечнопорожденной.

Для 2-групп не разобранными остались случаи, когда Π есть одна из групп D_n, H_n, Q_n, $n \geq 4$. Для $n = 3$, $Q_3 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, этот случай рассмотрен выше. Если $\Pi = D_3$, то $Z(L/k) = \mathbf{Z}_+^{11}$, если $\Pi = H_3$, то $Z(L/k) = \mathbf{Z}_+^6$.

Эндо и Мията дали полный ответ на вопрос, в каких случаях полугруппа $Z(L/k)$ является группой.

Теорема 4. Следующие условия эквивалентны:

1) $Z(L/k)$ – конечная группа,

2) Π есть либо а) циклическая группа, б) диэдральная группа порядка $2m$, m – нечетно, в) прямое произведение циклической группы порядка q^f, где q – нечетное простое, $f \geq 1$ и группы диэдра порядка $2m$, m – нечетно, где всякий простой делитель числа m есть примитивный $q^{f-1}(q-1)$-й корень из единицы по модулю

q^f, г) обобщенная группа кватернионов порядка $4m$, m - нечетно и всякий простой делитель числа m сравним с 3 по модулю 4. $\triangle$

§5. ТОРЫ С ЦИКЛИЧЕСКИМ ПОЛЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ

5.1. Развинчивание тора $R_{L/k}(G_m)$. Пусть Π – циклическая группа порядка n с образующим элементом σ, $\Pi = Gal\,(L/k)$. Групповое кольцо $\Lambda = Z[\Pi] = Z[\sigma]$ изоморфно фактор-кольцу $Z[x]/(x^n-1)$. Пусть f и g два нормированных многочлена из кольца $Z[x]$, удовлетворяющих условию $f(x)g(x) = x^n-1$. Если Λ любой Π-модуль, то, исходя из данного разложения, можно построить два Π-модуля

$$A_f = A/f(\sigma)A, \quad A^f = \{a \in A \mid f(\sigma)a = 0\}.$$

В частности, Π-модуль $\Lambda_f = Z[\Pi] = Z[\sigma]/(f(\sigma))$ является кольцом и A_f и A^f можно рассматривать как Λ_f-модули, причем

$$A_f \;\cong\; \Lambda_f \otimes_\Pi A, \quad A^f \;\cong\; Hom_\Pi(\Lambda_f, A).$$

Ясно, что $g(\sigma)A \subset A^f$ и существует Λ_f-гомоморфизм $\alpha : A_f \to A^f$, определяемый равенством $\alpha(\bar{a}) = g(\sigma)a, `a \in \bar{a}$. Если A – проективный Π-модуль конечного ранга, то гомоморфизм α является изоморфизмом, это следует из изоморфизма $\alpha : \Lambda_f \to \Lambda^f$.

Для каждого нормированного многочлена $f \in \mathbf{Z}[x]$, делящего $x^n - 1$, пусть $R(f)$ обозначает тор из $C(L/k)$ с Π-модулем рациональных характеров $\mathbf{Z}[\sigma]/(f(\sigma))$. Ясно, что $R(x^n - 1) = R_{L/k}(G_m)$. Пусть Φ_d – круговой полином, $d|n$, имеем разложение

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x). \tag{1}$$

Кольцо $\mathbf{Z}[\sigma]/(\Phi_d(\sigma))$ изоморфно кольцу целых элементов $\mathbf{Z}[\zeta_d]$ кругового поля $\mathbf{Q}(\zeta_d)$, ζ_d – примитивный корень степени d из единицы, $\widehat{R(\Phi_d)} = \mathbf{Z}[\zeta_d]$. Соотношение (1) определяет важное разложение.

Теорема. Существует бирациональный изоморфизм многообразий

$$R_{L/k}(G_m) \;\cong\; \prod_{d|n} R(\Phi_d).$$

Конструкция данного изоморфизма представляет самостоятельный интерес, она будет использована в дальнейшем, поэтому постараемся объяснить схему построения. Положим $h_d(x) = x^d - 1$, $d|n$, тогда Π-модуль $\widehat{R}(h_d) = \mathbf{Z}[\sigma]/(\sigma^d - 1) = \mathbf{Z}[\Pi/\Pi'] \in S(\Pi)$, $\Pi' \subset \Pi$, $[\Pi : \Pi'] = d$. Пусть $f \in \mathbf{Z}[x]$ такой, что $fh_d|h_n$. Тогда имеем точную последовательность Π-модулей

$$0 \;\to \mathbf{Z}[\sigma]/(f(\sigma)) \xrightarrow{\hat{\beta}} \mathbf{Z}[\sigma]/(f(\sigma)h_d(\sigma)) \xrightarrow{\hat{\alpha}} \mathbf{Z}[\sigma]/(h_d(\sigma)) \to \;\; 0,$$

где $\hat{\beta}(1) = h_d(\sigma)(mod\ fh_d)$, $\hat{\alpha}(1) = 1$, откуда точная последовательность k-торов

$$1 \;\to R(h_d) \xrightarrow{\alpha} R(fh_d) \xrightarrow{\beta} R(f) \to \;\; 1.$$

Поскольку $\widehat{R}(h_d) \in S(\Pi)$, то морфизм β имеет рациональное сечение над полем k, таким образом, имеем бирациональный изоморфизм

$$R(fh_d) \;\cong\; R(f) \times_k R(h_d) \;\cong\; R(f) \times_k G_m^d. \tag{2}$$

Бирациональный изоморфизм (2) позволяет провести индуктивное рассуждение. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$. Можно предположить, что теорема верна для степеней $(L : k) < n$. Возьмем $g(x) = \Phi_n(x)(x^{n/p_1} - 1)$. Ясно, что $g(x) | (x^n - 1)$. Из (2) имеем

$$R(g) \;\cong\; R(\Phi_n) \times_k R(x^{n/p_1} - 1). \tag{3}$$

Если $s = 1$, то $g(x) = x^n - 1$ и мы получаем бирациональный изоморфизм

$$R(x^n - 1) = R_{L/k}(G_m) \;\cong\; R(\Phi_n) \times_k \prod_{d|n, d\neq n} R(\Phi_d) = \prod_{d|n} R(\Phi_d).$$

Если $s \geq 2$, то $g(x) = u(x)(x^{n/p_1p_2} - 1)$, откуда

$$R(g) \;\cong\; R(u) \times_k \prod_{d|n_{12}} R(\Phi_d), \quad n_{12} = n/p_1p_2. \tag{4}$$

Из конструкции следует, что $v(x) = u(x)(x^{n/p_2} - 1) | (x^n - 1)$, откуда

$$R(v) \;\cong\; R(u) \times_k R(x^{n/p_2} - 1). \tag{5}$$

Если $s = 2$, то $v(x) = x^n - 1$ и мы имеем из (4,5)

$$R(v) = R_{L/k}(G_m) \;\cong\; R(g) \times_k \prod_{d|n_2, d\neq n_{12}} R(\Phi_d).$$

Из (3) тогда следует, что

$$R_{L/k}(G_m) \;\cong\; \prod_{d|n} R(\Phi_d).$$

Если $s \geq 3$, то $v(x) = v_1(x)(x^{\frac{n}{p_2p_3}} - 1)$ и т.д. $\quad\triangle$

Следствие. Тор $R(\Phi_n)$ стабильно рационален над k для любого n.

В самом деле, возьмем класс Пикара от обеих частей утверждения теоремы. Поскольку тор $R_{L/k}(G_m)$ рационален над k, то имеем равенство

$$\sum_{d|n} p(R(\Phi_d)) = 0.$$

По индуктивному предположению можно считать, что $p(R(\Phi_d)) = 0$ для всех $d < n$, тогда $p(\Phi_n) = 0$. $\quad\triangle$

Таким образом, над полем алгебраических чисел k имеется бесконечное множество стабильно рациональных торов достаточно простой конструкции. Вопрос о рациональности этих торов, как мы увидим дальше, является весьма принципиальным, но к сожалению, ответ получен пока в очень частных случаях. Можно задачу немного упростить. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ – каноническое разложение числа n, $n_0 = p_1 \cdots p_s$ – свободная от квадратов часть числа n, Π_0 – подгруппа порядка n_0 группы Π, L_0 – подполе Π_0- инвариантов поля L. Формула $\Phi_n(x) = \Phi_{n_0}(y)$, $y = x^{n/n_0}$, показывает, что $R(\Phi_n) = R_{L_0/k}(R(\Phi_{n_0}))$. Отсюда следует, что рациональность торов вида $R(\Phi_n)$ будет доказана, если это будет сделано для чисел n, свободных от квадратов. К настоящему времени ответ известен только для $n = p^\alpha$, $n = p^\alpha q^\beta$.

5.2. Обратимость класса Пикара. В §4 неоднократно использовался факт обратимости класса $p(\hat{T})$ для модулей $\hat{T} \in C(\Pi)$, где Π – циклическая группа. Это

действительно фундаментальный факт, следствием которого, как будет показано дальше, являются превосходные алгебраико-арифметические свойства циклических расширений. Обратимость класса $p(\hat{T})$ вытекает из следующих соображений. Пусть сначала Π является циклической p-группой и $N \in H^1(\Pi)$. Рассмотрим точную последовательность Π-модулей

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0, \tag{1}$$

где $n = [\Pi] = p^\alpha$, $N' = N^{\Phi_n}$, $N'' = \Phi_n(\sigma)N$ и N'' можно рассматривать как Π/Π_1-модуль, где Π_1 – подгруппа порядка p в группе Π. Поскольку $N' \in \hat{H}^0(\Pi) = H^2(\Pi)$, то $N'' \in H^1(\Pi/\Pi_1)$. По индукции можно считать, что $N'' \in D(\Pi/\Pi_1) \subset D(\Pi)$. Тогда последовательность k-торов, двойственная последовательности (1), обладает рациональным k-сечением, откуда следует равенство $p(N) = p(N') + p(N'')$. Далее, N' есть $\mathbf{Z}[\zeta_n]$-модуль без кручения, следовательно N' – проективный $\mathbf{Z}[\zeta_n]$-модуль. Поэтому существует $\mathbf{Z}[\zeta_n]$-модуль M такой, что $N' \oplus M$ является свободным $\mathbf{Z}[\zeta_n]$-модулем. Тогда $p(N') + p(M) = 0$, откуда $p(N) \in D(\Pi)/S(\Pi)$. Имеем вялую резольвенту

$$0 \to N \to S \to D \to 0,$$

где $S \in S(\Pi)$, $[D] = p(N)$, которая расщепляется, ибо

$$Ext_{\Pi}(D, N) = H^1(\Pi, Hom(D, N)) = 0.$$

Таким образом, $H^1(\Pi) = D(\Pi)$ для циклических p-групп.

Если Π – произвольная циклическая группа и Π-модуль N лежит в $H^1(\Pi)$, рассмотрим вялую резольвенту

$$0 \to N \to S \to M \to 0.$$

Поскольку $M \in H^{-1}(\Pi) = H^1(\Pi)$, то для всякой силовской подгруппы Π_p модуль M, рассматриваемый как Π_p-модуль, лежит в $D(\Pi_p)$. Тогда группа $Ext_{\Pi}(M, N) = H^1(\Pi, Hom(M, N))$ обращается в нуль, поскольку это верно для всех силовских подгрупп Π_p группы Π. Следовательно, $M \oplus N \cong S$ и $H^1(\Pi) = D(\Pi)$. Впервые этот факт установили Эндо и Мията [3].

5.3. Умножение Чистова. Группа Π – циклическая с образующим элементом σ, $\Pi = Gal(L/k)$. Поскольку группа Π коммутативна, то всякий левый Π-модуль A можно считать и правым, полагая по определению $\sigma a = a\sigma$, $a \in A$. Тогда определено тензорное произведение $A \otimes_{\Pi} B$ для любых Π-модулей A и B. Снабдим произведение $A \otimes_{\Pi} B$ строением Π-модуля по правилу

$$\sigma(a \otimes b) = \sigma a \otimes b = a\sigma \otimes b = a \otimes \sigma b.$$

Чистов [1] определяет на категории $C(\Pi)$ новое умножение следующим образом.

а) Если один из модулей $\hat{T}_1$ или $\hat{T}_2$ лежит в $D(\Pi)$, то полагаем

$$\hat{T}_1 \cdot \hat{T}_2 = (\hat{T}_1 \otimes_{\Pi} \hat{T}_2)/t(\hat{T}_1 \otimes_{\Pi} \hat{T}_2),$$

где $t(A)$ – подмодуль кручения модуля A.

б) Пусть $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$ – произвольные модули из $C(\Pi)$ и

$$0 \to \hat{T}_1 \to \hat{S}_1 \xrightarrow{p_1} \hat{N}_1 \to 0,$$

$$0 \to \hat{T}_2 \to \hat{S}_2 \xrightarrow{p_2} \hat{N}_2 \to 0$$

их вялые резольвенты, $N_i \in D(\Pi)$. Имеем эпиморфизм

$$\tilde{p}_2(\hat{T}_1) : \hat{T}_1 \cdot \hat{S}_2 \to \hat{T}_1 \cdot \hat{N}_2,$$

индуцированный проекцией p_2. Положим $\hat{T}_1 \cdot \hat{T}_2 = Ker\,(\tilde{p}_2(\hat{T}_1))$. Диаграмным поиском проверяется, что произведение $\hat{T}_1 \cdot \hat{T}_2$ не зависит от выбора вялых резольвент, а в случае, когда $\hat{T}_1 \in D(\Pi)$, определение пункта б) совпадает с данным в а). Имеются канонические изоморфизмы: $\hat{T}_1 \cdot \hat{T}_2 = \hat{T}_2 \cdot \hat{T}_1$, $\hat{T}_1 \cdot (\hat{T}_2 \cdot \hat{T}_3) = (\hat{T}_1 \cdot \hat{T}_2) \cdot \hat{T}_3$. Заметим также, что $\hat{T} \cdot \mathbf{Z}[\Pi] = \hat{T}$. Пусть T_1 и T_2 – алгебраические торы категории $C(L/k)$, дуальные модулям $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$. Определим $T_1 \cdot T_2 \in C(L/k)$ как тор, двойственный П-модулю $\hat{T}_1 \cdot \hat{T}_2$. Для произвольного тора $T \in C(L/k)$ и нормированного многочлена $f \in \mathbf{Z}[x]$, $f(x)|x^n - 1$ положим $T(f) = T \cdot R(f)$. Заметим, что П-модуль $\widehat{T(\Phi_d)}$ можно рассматривать и как $\mathbf{Z}[\zeta_d]$-модуль и, поскольку он не имеет кручения, то $\widehat{T(\Phi_d)}$ является проективным $\mathbf{Z}[\zeta_d]$-модулем, $d|n$. Следующая важная лемма является обобщением соотношения (2) из п.5.1.

Лемма. Пусть f – нормированный многочлен из $\mathbf{Z}[x]$ такой, что $fh_d \mid h_n$. Тогда для любого тора $T \in C(L/k)$ имеем бирациональный изоморфизм многообразий

$$T(fh_d) \cong T(f) \times_k T(h_d). \quad \triangle$$

Теперь теми же рассуждениями, как и в п.5.1, можно развинтить любой тор $T \in C(L/k)$. Заметим, что $T(x^n - 1) = T$. Следующая замечательная теорема принадлежит Чистову [1].

Теорема 1. Пусть L/k – циклическое расширение степени n. Всякий тор $T \in C(L/k)$ бирационально эквивалентен над полем k произведению торов

$$T \;\cong\; \prod_{d|n} T(\Phi_d).$$

Для каждого $d|n$ модуль характеров $\widehat{T(\Phi_d)}$ является проективным $\mathbf{Z}[\zeta_d]$-модулем. Тор T стабильно рационален над k тогда и только тогда, когда для любого $d|n$ модуль $\widehat{T(\Phi_d)}$ является $\mathbf{Z}[\zeta_d]$-свободным. $\triangle$

В качестве следствия мы получаем рациональность всякого стабильно рационального тора в случае, когда П – циклическая p-группа. В этом случае теорема сводит проверку к торам $T(\Phi_d)$, для которых $\widehat{T(\Phi_d)} = \mathbf{Z}[\zeta_d]$, дальнейшая редукция сводит задачу к модулю $\mathbf{Z}[\zeta_p]$, для которого тор $R(\Phi_p)$ рационален. Еще два следствия.

Теорема 2. Пусть L/k – циклическое расширение. Тогда группа $Z(L/k)$ является конечной группой, изоморфной прямому произведению по всем $d|n$ групп классов идеалов колец $\mathbf{Z}[\zeta_d]$. $\triangle$

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 1 П-модуль $\hat{T}$ проективен. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $p(\hat{T}) = 0$,

2) $\widehat{T(\Phi_d)}$ – свободный $\mathbf{Z}[\zeta_d]$-модуль для всякого $d|n$,

3) тор T рационален над полем k.

Почему из проективности $\hat{T}$ и стабильной рациональности тора T следует k-рациональность? Ответ таков. Всякий проективный П-модуль есть прямая сумма свободного П-модуля $\hat{T}_1$ и проективного идеала $\hat{T}_2 \subset \mathbf{Z}[\Pi]$. Тор T_1 является k-рациональным, а $\mathbf{Z}$-ранг модуля T_2 равен n. Поэтому

$$T_2 \;\cong\; \prod_{d|n} T_2(\Phi_d) \;\cong\; \prod_{d|n} R(\Phi_d) \;\cong\; R_{L/k}(G_m). \quad \triangle$$

В заключение укажем еще два случая, в которых мы умеем сосчитать все до конца.

Теорема 4. Пусть T – k-тор, разложимый над циклическим расширением L степени p поля k, причем поле деления круга на p частей одноклассно. Тогда T рационален над k.

Доказательство. Пусть $\Pi = Gal\,(L/k)$ – циклическая группа порядка p. В условиях теоремы существует только три неразложимых Π-модуля $\hat{T}$:

$$\mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z}[\Pi] \quad u \quad I = Ker\,[\mathbf{Z}[\Pi] \to \mathbf{Z}].$$

Соответствующие торы T k-рациональны. $\triangle$

Теорема 5. Все торы, расщепляющиеся над циклическим расширением степени 4, являются рациональными над полем определения.

Доказательство. Пусть Π – циклическая группа порядка 4. Известны (Ройтер [1]) все неразложимые целочисленные представляния группы Π, их девять. Вот их полный список (указаны образы образующего элемента группы Π):

$$(1),\ (-1),\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как торы размерности 1 и 2 k-рациональны, то достаточно проверить рациональность для торов размерности 3 и 4, определяемых данными целочисленными представлениями.

Пусть M_4 – Π-модуль, соответствующий одному из представлений 4-й степени. Тогда ясно, что существует точная последовательность Π-модулей

$$0 \ \to M \to M_4 \to \mathbf{Z} \to \ 0,$$

где M есть подмодуль $\mathbf{Z}$-ранга 3. Эта последовательность определяет точную последовательность торов над полем определения k

$$1 \ \to G_{\,m,k} \to T_4 \xrightarrow{\alpha} T \to \ 1.$$

Так как α обладает рациональным k-сечением, то

$$T_4 \ \cong \ G_{\,m} \times_k T.$$

Задача сводится к доказательству рациональности торов размерности 3. Пусть M_3 – модуль представления

$$\sigma \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi = (\sigma), \quad \sigma^4 = 1.$$

В этом случае снова существует точная последовательность П-модулей

$$0 \to M_2 \to M_3 \to \mathbf{Z} \to 0.$$

Тор T_3, соответствующий П-модулю M_3, бирационально эквивалентен над k прямому произведению торов размерности 1 и 2 и, следовательно, k-рационален. Наконец, если N_3 – модуль представления

$$\sigma \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то $N_3 \cong I$ есть ядро аугментации. Соответствующий тор k-рационален. $\triangle$

§6. СТАБИЛЬНАЯ РАЦИОНАЛЬНОСТЬ МНОГООБРАЗИЙ

6.1. Стабильно рациональные торы как многообразия орбит. Пусть T тор категории $C(L/k)$, $\Pi = Gal\,(L/k)$, $(L:k) < \infty$. Имеем вялую резольвенту

$$0 \to \hat{T} \to \hat{S} \to \hat{N} \to 0$$

П-модуля $\hat{T}$ и дуальную ей точную последовательность L/k-торов

$$1 \to N \xrightarrow{\alpha} S \xrightarrow{\beta} T \to 1. \tag{1}$$

Рассмотрим группу $\hat{S}$ в мультипликативной записи, тогда алгебра $L[S]$ регулярных функций на торе S_L изоморфна групповому кольцу $L[\hat{S}]$ и это есть П-изоморфизм. Поскольку модуль $\hat{S}$ является пермутационным, то выберем в $\hat{S}$ базис $x_1, .., x_n$, состоящий из характеров, на которых группа П действует перестановками. Имеем эквивариантное вложение

$$L[x_1, .., x_n] \to L[x_1, .., x_n, x_1^{-1}, .., x_n^{-1}] = L[S],$$

которое при переходе к П-инвариантам определяет открытое k-вложение тора S в $\mathbf{A}_k^n$ с естественным действием тора S на $\mathbf{A}_k^n$. Здесь используется тот факт, что кольцо инвариантов $L[x_1, .., x_n]^{\Pi}$ есть снова кольцо многочленов $k[\mathbf{A}^n]$, (пример 9 гл.I.) Опишем этот спуск более тщательно. Пусть группа П действует транзитивно на базисе $x_1, .., x_n$, π-стабилизатор элемента x_1. Тогда П-модуль $\hat{S}$ изоморфен П-модулю $\mathbf{Z}[\Pi/\pi] = \mathbf{Z}[\Pi] \otimes_{\pi} \mathbf{Z}$, натянутому на смежные классы группы П относительно π. Примеры 18 и 19 главы I показывают, что $S = R_{F/k}(G_m)$, $F = L^{\pi}$, и действие группы S на $\mathbf{A}_k^n$, $n = (F:k)$, есть обычное действие группы $R_{F/k}(G_m)$ на $R_{F/k}(\mathbf{A}^1)$, определенное вложением $G_m \subset \mathbf{A}^1$. Группа k-точек $S(k)$ имеет вид $S(k) = R_{F/k}(G_m)(k) = F^*$, и это позволяет описать действие тора S более простым и естественным образом, используя теорию линейных операторов. Пусть $e_1, .., e_n$ – базис расширения F/k. Мы имеем точное регулярное представление элементов поля F квадратными матрицами порядка n с коэффициентами из поля k :

$$(ae_1, .., ae_n) = (e_1, .., e_n)T_a,\ a \to T_a,\ T_a \in GL\,(n,k),\ a \neq 0.$$

Матрицы T_a, $a \in F^*$, порождают максимальный k-тор в $GL\,(n,k)$, по которому однозначно восстанавливается группа $R_{F/k}(G_m)$. Если $\hat{S}$ – произвольный пермутационный П-модуль из $S(\Pi)$, то $\hat{S}$ есть прямая сумма П-модулей $\hat{S}_i$, где $\hat{S}_i$ – неразложимые пермутационные модули

$$\hat{S} = \hat{S}_1 \oplus \cdots \oplus \hat{S}_t.$$

Это показывает, что тор S представим в виде прямого произведения

$$S = R_{F_1/k}(G_m) \times \cdots \times R_{F_t/k}(G_m).$$

Мы назвали ранее такие торы квазиразложимыми. Тор S есть максимальный тор в общей линейной группе $GL_k(n)$, $n = \dim S$, и $S(k) = F_1^* \times \cdots \times F_t^*$. Пусть $M = F_1 \oplus \cdots \oplus F_t$ – прямая сумма полей, $(M : k) = n$, $M(n,k)$ – алгебра квадратных матриц порядка n над полем k. Регулярное представление алгебры M матрицами определяет изоморфизм между M и максимальной коммутативной полупростой подалгеброй в $M(n,k)$. Имеем следующий результат.

Предложение 1. Пусть S – квазиразложимый тор над полем k, $\dim S = n$. Тогда существует максимальная полупростая коммутативная подалгебра M в $M(n,k)$ такая, что $S(k) = M^*$. Алгебра M однозначно определяет k-тор S, для любой коммутативной k-алгебры B, $S(B) = (M \otimes_k B)^*$. Если $M = F_1 \oplus \cdots \oplus F_t$ – прямая сумма полей, то

$$S = R_{F_1/k}(G_m) \times \cdots \times R_{F_t/k}(G_m). \quad \triangle$$

Пусть V – линейное пространство над полем k размерности n, выбирая базис в V, можно считать, что $M(n,k)$ есть кольцо линейных операторов $End(V)$. Группа $S(\bar{k})$ точно действует в пространстве $V \otimes_k \bar{k}$ как группа линейных операторов, и существует точка $v \in V$, $S(\bar{k})$-орбита которой открыта в $V \otimes_k \bar{k}$ в топологии Зарисского. Для простоты будем считать, что поле k имеет характеристику нуль. Тогда действие группы S на V в смысле алгебраической геометрии однозначно определяется линейным представлением группы $S(k)$ на V. Вложение α из последовательности (1) определяет представление тора N линейными операторами из $End(V)$, а, следовательно, мы имеем точное представление группы $N(k)$ автоморфизмами кольца полиномов $k[V]$ и автоморфизмами поля рациональных функций $k(V)$. Таким образом, поле рациональных функций $k(T)$ является полем инвариантов $k(V)^N$. Это обстоятельство можно использовать в различных направлениях. Например, оно показывает, что некоторые поля инвариантов линейных групп можно реализовать как поля функций на алгебраических торах, что позволяет использовать богатую торическую технику. Это будет продемонстрировано в следующих параграфах. С другой стороны, представление $k(T) = k(V)^N$ позволяет иногда сразу же доказать рациональность тора T. Например, если N содержится в другом максимальном k-торе S_1 группы $GL(V)$. Тогда факторы S/N и S_1/N бирационально эквивалентны над полем k и рациональность тора S/N следует из рациональности S_1/N. Возьмем случай, когда в последовательности (1) тор N изоморфен $G^p_{m,k}$, т.е. N разложим над k. Тогда N содержится в максимальном диагонализируемом k-торе $D \subset GL(V)$ и фактор D/N снова разложим, а, значит, и рационален.

Пример 1. Пусть Π – кватернионная группа порядка 8, N – сумма всех элементов из Π, $N \in \mathbf{Z}[\Pi]$. Пусть $\hat{T}$ – идеал в $\mathbf{Z}[\Pi]$, порожденный элементами 3 и N. Суон [1] показал, что $\hat{T}$ – проективен, но не свободен, однако, $\hat{T} \oplus \mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}[\Pi] \oplus \mathbf{Z}$. Рассуждение, приведенное выше, показывает, что тор T бирационально эквивалентен фактору $G^9_{m,k}/G_{m,k}$, который рационален над полем определения.

Определение. Пусть N является k-тором, линейно и точно действующим на пространстве $\mathbf{A}^n_k$. *Многообразием орбит* группы N будем называть фактор U/N, где U – открытая непустая часть $\mathbf{A}^n_k$ такая, что U стабильна относительно N и фактор U/N существует.

Поле $k(U/N) = k(U)^N = k(\mathbf{A}^n)^N$. Таким образом, к вопросу о рациональности стабильно рациональных торов можно подойти с другого конца. Пусть тор T

стабильно рационален над полем k, тогда в последовательности (1) тор N можно считать квазиразложимым и мы получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть N квазиразложимый тор, линейно действующий на пространстве $\mathbf{A}_k^n$. Тогда любое многообразие орбит группы N стабильно рационально над полем k. Обратно, всякий стабильно рациональный тор является многообразием орбит для линейного действия квазиразложимого тора на некотором $\mathbf{A}_k^n$. $\triangle$

Пусть S – квазиразложимый тор над k, мы видели, что $S(k) = F_1^* \times \cdots \times F_s^*$ или $S(k) = A^*$, A есть прямая сумма $\oplus_i F_i$ полей F_i. Действие группы A^* на линейном пространстве A определяет линейное представление группы S в $GL(A)$, которое называется *регулярным.*

Определение. Представление квазиразложимого тора S в $GL(V)$ назовем *квазирегулярным*, если существует инвариантное подпространство V_0 в V, на котором группа $S(k)$ действует регулярно. Ясно, что квазирегулярное представление является точным и многообразие орбит квазирегулярного действия является рациональным над полем k.

Теорема 2. Пусть $S \to GL_k(V)$ – точное линейное представление квазиразложимого тора. Следующие условия эквивалентны :

1) поле инвариантов $k(V)^S$ – рационально над k,

2) существует базис $f_1, .., f_n$ в поле $k(V)$ такой, что группа S действует на k-пространстве $< f_1, .., f_n >$ квазирегулярно. $\triangle$

Пример 2. Если $N = R_{L/k}(G_m)$, где L/k – циклическое расширение и $N \to GL_k(n)$ – точное представление, то поле $k(V)^N$ чисто трансцендентно над k. Действительно, Π-модуль $\hat{N} = \mathbf{Z}[\Pi]$, $\Pi = Gal(L/k)$; тор N содержится в максимальном L/k-торе S группы $GL_k(n)$, пусть $T = S/N$. Тогда $k(T) = k(V)^N$. Имеем вялую резольвенту

$$0 \to \hat{T} \to \hat{S} \to \mathbf{Z}[\Pi] \to 0,$$

которая расщепляется: $\hat{S} = \hat{T} \oplus \mathbf{Z}[\Pi]$. Для любого $d \mid n$, $\widehat{S(\Phi_d)} = \widehat{T(\Phi_d)} \oplus \mathbf{Z}[\zeta_d]$. Все $\mathbf{Z}[\zeta_d]$-модули в этом равенстве являются $\mathbf{Z}[\zeta_d]$ – свободными. Поскольку модуль $\mathbf{Z}[\Pi]$ входит в $\hat{S}$, то $\hat{S} = \hat{S}_1 \oplus \mathbf{Z}[\Pi]$, где $\hat{S}_1 \in S(\Pi)$ и $\hat{S}_1$, вообще говоря, отличен от $\hat{T}$. Сравнивая левые и правые части равенства

$$\widehat{T(\Phi_d)} \oplus \mathbf{Z}[\zeta_d] = \widehat{S_1(\Phi_d)} \oplus \mathbf{Z}[\zeta_d],$$

мы видим, что $\widehat{T(\Phi_d)} = \widehat{S_1(\Phi_d)}$ для всех $d \mid n$. По теореме Чистова торы T и S_1 бирационально эквивалентны над k, поэтому тор T является k-рациональным. Кроме того, представление $N \to GL_k(V)$ бирационально эквивалентно квазирегулярному. В качестве N можно было бы взять произведение $R_{L/k}(G_m)^p$.

Попытка индуктивного доказательства рациональности стабильно рациональных торов приводит к двум проблемам.

1) Пусть тор $S = R_{L/k}(G_m)$ точно действует на линейном пространстве V. Всегда ли поле инвариантов $k(V)^S$ – рационально ?

2) Пусть группа $S = S_1 \times \cdots \times S_t$ точно действует на линейном пространстве V, $S_i = R_{L_i/k}(G_m)$, $R_1 = k(V)^{S_1}$ и R_1 рационально над полем k. Всегда ли действие группы $S_2 \times \cdots \times S_t$ на R_1 линеаризуемо?

6.2. Коварианты линейных представлений. Пусть k – поле характеристики нуль,G – связная линейная алгебраическая группа над полем k, H – ее связная подгруппа, $X = G/H$ – фактор-многообразие. Запишем эту ситуацию в виде точной последовательности

$$1 \to H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} X \to e. \qquad (1)$$

Поле рациональных функций $k(X)$ изоморфно $k(G)^H$. Предположим, что существует k-рациональное отображение $\ell : G \to H$ со свойством $\ell(i(h)g) = h(\ell(g)),\ h \in H(\bar{k}),\ g \in G(\bar{k})$. Отображение ℓ назовем *ковариантом* действия группы H. Тогда имеем рациональное отображение

$$u = (\ell, j) : G \to H \times_k G,$$

являющееся бирациональным. В самом деле, пусть $u(g_1) = u(g_2)$. Тогда $j(g_1) = j(g_2)$, откуда $g_2 = i(h)g_1$. Поэтому $\ell(g_2) = \ell(i(h)g_1) = h(\ell(g_1)) = \ell(g_1)$. Из обратимости элемента $\ell(g_1)$ следует, что $h = e$, т.е. $g_1 = g_2$. Поскольку $\dim G = \dim H + \dim X$, все многообразия неприводимы и отображение u инъективно в открытой области, то u бирационально. Пусть $a \in H(k),\ W = \ell^{-1}(a)$ – слой над точкой a. Из вышесказанного следует, что ограничение отображения j на W определяет бирациональное отображение $W \to X$. Обратное отображение $s : X \to W$ является рациональным k-сечением отображения $j,\ j \cdot s = Id$. Понятно, если в точной последовательности (1) отображение j имеет рациональное k-сечение, то мы имеем и ковариант $G \to H$, и бирациональное разложение $G \cong H \times_k X,\ k(X) = k(W)$. Эти соображения применим при исследовании рациональности алгебраических k-торов. Мы уже видели, что критерием стабильной рациональности k-тора T является существование точной последовательности k-торов

$$1 \to S_1 \xrightarrow{i} S_2 \xrightarrow{j} T \to 1,$$

где S_1 и S_2 – квазиразложимы. Поскольку имеется рациональное k-сечение s морфизма j, то отображение

$$g \to i^{-1}(g/sj(g)),\ g \in S_2(\bar{k}),$$

определяет k-рациональный ковариант $\ell : S_2 \to S_1$ действия группы S_1 на S_2 и поле $k(T)$ изоморфно полю $k(W)$, где W – слой отображения ℓ над подходящей точкой $a \in S_1(k)$. Вопрос о рациональности стабильно рационального тора сводится к проверке рациональности слоя W. Группы S_1 и S_2 можно реализовать в качестве максимальных торов в полных линейных группах $GL(V_1)$ и $GL(V_2)$, $\dim V_i = \dim S_i$. Действие группы S_i на V_i точное, каждая группа S_i имеет открытую орбиту в V_i, вложение $i : S_1 \to S_2$ определяет линейное действие группы S_1 на V_2. Отображение $\ell : S_2 \to S_1$ естественно продолжается до рационального отображения $\ell : V_2 \to V_1$, являющегося ковариантом группы S_1, линейно действующей на V_1 и V_2. Сформулируем проблему рациональности стабильно рациональных торов на языке линейных представлений.

Пусть S – квазиразложимый k-тор, U – линейное k-пространство регулярного представления тора S, $\dim S = \dim U$. Пусть, далее, V – линейное пространство над полем k и $i : S \to GL(V)$ – точное линейное представление над k. Рассмотрим произвольный нетривиальный S-ковариант $\ell : V \to U$.

Гипотеза. Слой $W = \ell^{-1}(a)$ является k-рациональным многообразием для любой точки общего положения a в U.

Эта гипотеза равносильна гипотезе о рациональности стабильно рациональных торов.

Пример. Пусть L – конечное расширение поля k, F-промежуточное поле. Имеем вложение

$$S = R_{F/k}(G_m) \to R_{L/k}(G_m) = S_1.$$

Пусть $T = S_1/S$ – фактор. Имеем эпиморфизм линейных k-пространств

$$\ell = Sp_{L/F} : L \to F$$

и $Sp_{L/F}(ax) = aSp_{L/F}(x)$, $a \in F$, $x \in L$. Таким образом, отображение ℓ является S-ковариантом, слой $W = \ell^{-1}(1)$ есть линейное аффинное подмножество в L, $\dim W = \dim T$. Многообразия T и W бирациональны над k. Поэтому тор T является k-рациональным. Другое представление: многообразие T является открытым подмножеством в $R_{F/k}(\mathbf{P}^r_F)$, $r = (L : F) - 1$.

6.3. Рациональность торов типа pq . Пусть снова L/k – циклическое расширение степени n, $\Pi_n = Gal\,(L/k)$. Для краткости обозначим тор $R(\Phi_n)$ через T_n, $\hat{T}_n = \mathbf{Z}[\zeta_n]$. Как мы видели, проблема рациональности стабильно рациональных торов с циклическим полем разложения сводится к вопросу о рациональности торов вида T_n. Далее, в п.5.3. было показано, что достаточно проверить рациональность в случаях, когда n свободно от квадратов. Если $n = p$, то пример предыдущего пункта показывает, что тор T_p рационален над k. Пусть теперь $n = pq$, где p и q различные простые числа. В этом случае

$$\mathbf{Z}[\zeta_{pq}] = \mathbf{Z}[\zeta_p] \otimes \mathbf{Z}[\zeta_q], \quad \mathbf{Z}[\Pi_{pq}] = \mathbf{Z}[\Pi_{pq}/\Pi_p] \otimes \mathbf{Z}[\Pi_{pq}/\Pi_q],$$

и мы имеем резольвенту

$$0 \ \to \mathbf{Z}[\zeta_p] \to \mathbf{Z}[\Pi_p] \to \mathbf{Z} \to \ 0,$$

аналогично для q. Получаем длинную точную последовательность

$$0 \ \to \mathbf{Z}[\zeta_{pq}] \to \mathbf{Z}[\Pi_{pq}] \to \mathbf{Z}[\Pi_{pq}/\Pi_p] \otimes \mathbf{Z}[\Pi_{pq}/\Pi_q] \ \to \mathbf{Z} \to \ 0$$

П-модулей, откуда точная последовательность k-торов

$$1 \ \to G_{m,k} \to S_p \times_k S_q \xrightarrow{\alpha} S_{pq} \to T_{pq} \to \ 1.$$

Пусть $L_p = L^{\Pi_q}$, $L_q = L^{\Pi_p}$, тогда

$$S_p = R_{L_p/k}(G_m), \ S_q = R_{L_q/k}(G_m), \ S_{pq} = R_{L/k}(G_m).$$

Далее, $L = L_p \otimes_k L_q$, отображение α есть тензорное представление группы $S_p \times_k S_q$ в пространстве $L_p \otimes_k L_q$. Итак, $k(T_{pq}) = k(L_p \otimes_k L_q)^{S_p \times S_q}$. Рассмотрим несколько более общую задачу. Пусть V_i – линейное пространство над полем k, $\dim V_i = i$ и $V = V_m \otimes_k V_n$. Имеем тензорное представление прямого произведения $GL\,(V_m) \times GL\,(V_n)$ в пространстве $V_m \otimes_k V_n$. Пусть S_i – максимальный k-тор в группе $GL\,(V_i)$, S – максимальный тор в $GL\,(V)$. Имеем гомоморфизм $S_m \times_k S_n \xrightarrow{\alpha} S$ с ядром $G_{m,k}$ и поле инвариантов $k(V)^{S_m \times S_n}$ изоморфно полю рациональных функций на торе $T_{mn} = S/\alpha(S_m \times S_n)$, $\dim T_{mn} = (m-1)(n-1)$. Поскольку m и n не обязательно простые, необходимо уточнение. Б.Кунявский показал [4], что среди торов типа T_{mn} встречаются не рациональные над полем k. Пусть N – образ гомоморфизма α. Имеем две точные последовательности алгебраических торов

$$1 \ \to G_{m,k} \to S_m \times S_n \to N \to \ 1, \tag{1}$$

$$1 \ \to N \to S \to T \to \ 1. \tag{2}$$

Нас интересует рациональность k-тора T. Группы S_m и S_n – квазиразложимы, их модули характеров пермутационны. Выпишем точные последовательности П-модулей рациональных характеров, дуальные последовательностям (1),(2).

$$0 \to \hat{N} \to \hat{S}_m \oplus \hat{S}_n \to \mathbf{Z} \to 0, \tag{3}$$

$$0 \to \hat{T} \to \hat{S} \to \hat{N} \to 0. \tag{4}$$

Ограничимся случаем взаимно-простых чисел m и n. Из последовательности (3) следует точность последовательности

$$(\hat{S}_m \oplus \hat{S}_n)^{\Pi} \xrightarrow{e} \mathbf{Z} \to H^1(\Pi, \hat{N}) \to 0.$$

Множество $Im(e)$ содержит целые числа вида $am + bn$, поэтому отображение e является эпиморфизмом. Отсюда $H^1(\Pi, \hat{N}) = 0$, а это показывает, что последовательность (3) расщепляется: $\hat{N} \oplus \mathbf{Z} \cong \hat{S}_m \oplus \hat{S}_n$. Таким образом, последовательность (4) является вялой резольвентой тора T и $p(T) = [\hat{N}] = [0]$. Тор T стабильно рационален над полем k. Для доказательства рациональности тора T проведем ряд последовательных редукций.

а) Рассмотрим грассманово многообразие $G_m^n(V)$ подпространств Λ размерности m в пространстве $V = V_m \oplus V_n$. Группа $S_m \times_k S_n$ естественно действует на V и на грассманиане $G_m^n(V)$. Тор T_{mn} бирационально эквивалентен многообразию орбит $(V_m \otimes_k V_n)/(S_m \times_k S_n)$. Отождествляя V_m с двойственным пространством, можно считать, что тор T_{mn} бирационально эквивалентен фактору $Hom_k(V_m, V_n)/(S_m \times_k S_n)$. Сопоставляя каждому линейному оператору $\varphi : V_m \to V_n$ его график в $V_m \oplus V_n = V$, получаем эквивариантное вложение $Hom_k(V_m, V_n) \to G_m^n(V)$, образ которого является открытым множеством (главной клеткой Шуберта). Это вложение индуцирует бирациональную эквивалентность тора T_{mn} и фактора $G_m^n(V)/(S_m \times_k S_n)$.

б) Пусть $k = \bar{k}$ и Λ – общее подпространство в V, $\dim \Lambda = m$. Рассмотрим проекцию $p_\Lambda : V \to V_n$ с ядром Λ. Пусть $e = (e_1, .., e_{m+n})$ – собственные векторы тора $S_m \times_k S_n$ в V. При отображении p_Λ собственные подпространства тора $S_m \times_k S_n$ в пространстве V, все они одномерные, проектируются в некоторую конфигурацию прямых в V_n. Выбор другой проекции приводит к проективно эквивалентной конфигурации. Кроме того, умножение на $t \in S_m \times_k S_n$ индуцирует изоморфизм конфигураций прямых в V/Λ и в $V/t\Lambda$. Следовательно, корректно определено отображение

$$G_m^n(V)/(S_m \times_k S_n) \to \mathbf{P}(V_n)^{m+n}/GL(V_n).$$

Прямой подсчет показывает, что это бирациональный изоморфизм.

в) В случае произвольного поля k группа $S_m \times_k S_n$ имеет вид $\prod R_{F_i/k}(G_m)$, где $\sum_{i=1}^{s}(F_i : k) = m + n$. Пусть A прямая сумма полей F_i, $A = \oplus F_i$. Произведение $\prod R_{F_i/k}(G_m)$ запишем в виде $R_{A/k}(G_m)$. Тогда изоморфизм пункта б) принимает вид

$$G_m^n(V)/(S_m \times_k S_n) \cong R_{A/k}(\mathbf{P}(V_n))/GL(V_n).$$

г) Пусть размерность пространства U взаимно-проста с $(A : k)$. Тогда сквозное отображение

$$R_{A/k}(U) \to R_{A/k}(\mathbf{P}(U)) \to R_{A/k}(\mathbf{P}(U))/GL(U)$$

имеет k-рациональное сечение. Это позволяет представить многообразие $R_{A/k}(\mathbf{P}(U))$ бирационально в виде прямого произведения

$$R_{A/k}(\mathbf{P}(U)) \cong [R_{A/k}(\mathbf{P}(U))/GL(U)] \times PGL(U).$$

д) Из предыдущего следует

$$T_{mn} \cong R_{A/k}(\mathbf{P}(V_n))/GL(V_n) \cong (R_{A_m/k}(\mathbf{P}(V_n)) \times R_{A_n/k}(\mathbf{P}(V_n)))/GL(V_n),$$

$A = A_m \oplus A_n$, A_m^* – максимальный тор в $End(V_m)$. Пусть $n < m$, $(m,n) = 1$. Тогда группа $GL(V_n)$ действует свободно на $R_{A_m/k}(\mathbf{P}(V_n))$ и из пункта г) следует

$$R_{A_m/k}(\mathbf{P}(V_n)) \cong R_{A_m/k}(\mathbf{P}(V_n))/GL(V_n) \times PGL(V_n).$$

Имеем бирациональные эквивалентности

$$T_{mn} \cong R_{A_m/k}(\mathbf{P}(V_n))/GL(V_n) \times R_{A_n/k}(V_n) \cong G_{m-n}^{n}(V_m)/S_m \times \mathbf{P}_k^{n(n-1)},$$

последнее по п. в).

Теорема. При взаимно простых m и n тор T_{mn} рационален над полем определения.

Действительно, $T_{mn} \cong G_{m-n}^{n}(V_m)/S_m \times \mathbf{P}_k^{n(n-1)}$, но первый множитель не зависит от компоненты S_n. Если взять в качестве S_n разложимый k-тор, то T_{mn} станет рациональным k-тором. Поскольку его бирациональная природа не зависит от выбора S_n, то он рационален и в общем случае. $\triangle$

Эта изящная теорема принадлежит А.Клячко [3]. Заметим, что для торов T_n, где n есть произведение трех простых чисел, различных между собой, вопрос о рациональности остается открытым.

6.4. Универсальные торсоры. Чтобы не отвлекаться на второстепенные детали, будем считать, что поле k имеет характеристику нуль. Мы видели, что для всякого k-тора T и его гладкой проективной модели X, группа $H^1(k, Pic\,\bar{X})$ является бирациональным инвариантом. Пусть N будет k-тором, дуальным модулю $Pic\,\bar{X}$, тор N называется *тором Нерона-Севери* многообразия X. Группа $H^1(k,N)$ также является бирациональным инвариантом многообразия X или T. Исследование этого бирационального инварианта позволило получить дополнительную информацию о строении тора T. Группа $H^1(k,N)$ представляет собой группу классов главных однородных пространств (торсоров) группы N, определенных над полем k. Эти торсоры можно явно описать, исходя из вялой резольвенты

$$0 \to \hat{T} \to \hat{S} \to Pic\,\bar{X} \to 0,$$

определяемой вложением $T \subset X$ и дуальной последовательности k-торов

$$1 \to N \to S \xrightarrow{\varphi} T \to 1. \tag{1}$$

Из (1) имеем когомологическую последовательность

$$1 \to N(k) \to S(k) \to T(k) \xrightarrow{\delta} H^1(k,N) \to 1,$$

которая показывает, что каждый элемент группы $H^1(k,N)$ определяется некоторой точкой $a \in T(k)$, пусть $[a] = \delta(a)$ – соответствующий класс изоморфизма торсоров из $H^1(k,N)$; в классе $[a]$ можно взять представителя $S_a \in [a]$, $S_a(\bar{k}) = \varphi^{-1}(a)$, S_a является k-подмногообразием в S. Торсоры S_a и S_b изоморфны тогда и только тогда, когда $b = an$, $n \in N(k)$. Последовательность (1) указывает иной подход к этой конструкции. Мы видим, что S есть k-торсор группы N над k-схемой T, т.е.$[S] \in H_{et}^1(T,N)$ и для всякой точки $a \in T(k)$ слой S_a равен $S \otimes_T k(a)$, причем $[S_a] = 0$ тогда и только тогда, когда $a \in \varphi(S(k))$. Допуская вольность, мы часто будем писать $S \in H_{et}^1(T,N)$,

опуская квадратные скобки. Структурный морфизм $T \to Spec\, k$ позволяет каждый торсор из $H^1(k,N)$ поднимать до торсора из $H^1_{et}(T,N)$, такие поднятые торсоры называются постоянными. Имеем гомоморфизм групп $H^1(k,N) \to H^1(T,N)$. Выберем произвольный торсор Y из $H^1(T,N)$, $p: Y \to T$; для любой точки $a \in T(k)$ имеем специализацию $(a,Y) \to [Y_a] \in H^1(k,N)$, $[Y_a] = 0 \Leftrightarrow a \in p(Y(k))$. Пусть $\Theta_Y : T(k) \to H^1(k,N)$ –отображение, определяемое по правилу $\Theta_Y(a) = [Y_a]$. Для любого $a \in T(k)$ построим торсор $Y^a \to T$ из класса $[Y] - [a] \in H^1(k,N)$. Имеем

$$T(k) = \bigcup_{[a] \in Im(\Theta_Y)} p^a(Y^a(k)), \tag{2}$$

где $Im(\Theta_Y) = \{[a] \in H^1(k,N) \mid Y^a(k) \neq \emptyset\}$. К разбиению множества $T(k)$ на классы способом (2) в случае, когда $Y = S$, мы вернемся в следующих параграфах в связи с понятием R-эквивалентности. А сейчас еще одно наблюдение. Рассмотрим группу $H^1(X,N) = H^1_{et}(X,N)$ и естественное отображение $H^1(X,N) \to H^1(T,N)$, индуцированное вложением $T \subset X$. Имеем точную последовательность локальных когомологий в этальной топологии

$$0 \to H^0(X,N) \to H^0(U,N) \to Hom_{\mathcal{G}}(\hat{N}, Div_{\bar{F}} \bar{X}) \to$$

$$\to H^1(X,N) \to H^1(U,N) \to Ext_{\mathcal{G}}(\hat{N}, Div_{\bar{F}} \bar{X}),$$

где U открытое непустое подмножество в X, $F = X - U$; N может быть любой k-группой мультипликативного типа. В нашем случае $U = T$, $Div_{\bar{F}} \bar{X} = \hat{S}$, $\hat{N}$ – вялый, поэтому

$$Ext_{\mathcal{G}}(\hat{N}, \hat{S}) = H^1(k, Hom(\hat{N}, \hat{S})) = H^1(k, \hat{N}^0 \otimes \hat{S}) = 0,$$

ибо $H^1(\mathcal{G}', \hat{N}^0) = 0$ для всякой подгруппы $\mathcal{G}'$ группы $\mathcal{G}$. Таким образом, гомоморфизм $H^1(X,N) \to H^1(T,N)$ является эпиморфизмом; по-другому, всякий торсор над T с вялой группой N продолжается до торсора над X. Все эти соображения позволили Кольо-Телену и Сансюку в серии своих работ развить общий метод спуска и применить его к различным вопросам арифметики и геометрии многообразий. Из всей богатой теории торсоров, разработанной этими авторами, остановимся подробнее на теории универсальных торсоров. Пусть X – гладкое проективное многообразие над полем k, такое, что $\bar{X}$ рационально, N – тор Нерона-Севери многообразия X, $\hat{N} = Pic\, \bar{X}$. Возьмем торсор $Y \in H^1(X,N)$, $p: Y \to X$, тогда, как и выше, имеем разложение

$$X(k) = \bigcup_{[a] \in I} p^a(Y^a(k)), \quad Y^a \in [Y] - [a], \tag{3}$$

где $I = \{[a] \in H^1(k,N) \mid Y^a(k) \neq \emptyset\}$, из каждого класса выбирается один торсор. Разложение (3) обобщает метод спуска Ферма-Морделла, какие здесь возможности? Во-первых, если группа $H^1(k,N)$ конечна, а вычисление ее можно контролировать, мы получаем конечное семейство морфизмов $Y^a \to X$ с покрытием (3), из которого иногда удается доказать пустоту или непустоту множества $X(k)$; далее, если Y^a устроены проще, а иногда так бывает, и $X(k) \neq \emptyset$, то мы получаем приемлемое описание множества $X(k)$.

Пусть $\lambda : \bar{N} \to G_{m,k}$ – характер тора N, $\lambda \in \hat{N} = Pic\, \bar{X}$. Имеем цепочку гомоморфизмов

$$H^1(X,N) \xrightarrow{\alpha} H^1(\bar{X},N) \xrightarrow{\lambda_*} H^1(\bar{X}, G_m) = Pic\, \bar{X}.$$

Для $Y \in [Y] \in H^1(X, N)$ сквозное отображение имеет вид $Y \to \lambda_*(\bar{Y})$. При фиксированном Y имеем функцию $\varphi_Y(\lambda) = \lambda_*(\bar{Y}) \in Pic\,\bar{X}$, $\varphi_Y \in Hom_{\mathcal{G}}(Pic\,\bar{X}, Pic\,\bar{X},) = End_{\mathcal{G}}(Pic\,\bar{X})$. Соответствие $\chi : Y \to \varphi_Y$ определяет точную последовательность групп

$$0 \to H^1(k, N) \to H^1(X, N) \xrightarrow{\chi} End_{\mathcal{G}}(Pic\,\bar{X}).$$

Торсор Y называется *универсальным*, если $\chi(Y) = Id$. Если универсальные торсоры существуют, то они образуют главное однородное пространство над группой $H^1(k, N)$. Показывается, что универсальный торсор существует тогда и только тогда, когда расширение $\mathcal{G}$-модулей

$$1 \to \bar{k}^* \to \bar{k}(X)^* \to \bar{k}(X)^*/\bar{k}^* \to 1 \tag{4}$$

расщепляется, $\mathcal{G} = Gal(\bar{k}/k)$, Кольо-Телен и Сансюк [3]. Поскольку из существования рациональной точки в $X(k)$ следует расщепление последовательности (4), то класс расширения (4) называется первым препятствием (к непустоте множества $X(k)$). Одно из важнейших свойств следующее:

Теорема 1. Отношение эквивалентности на множестве $X(k)$, определенное универсальным торсором, сильнее соответствующего отношения эквивалентности для любого другого M-торсора, где M – произвольный k-тор. $\triangle$

Всякий M-торсор $Y \to X$, где M есть k-тор, является многообразием, рациональным над замыканием $\bar{k}$. Доказано, что для гладкой проективной компактификации Y^c торсора Y, $\mathcal{G}$-модуль $Pic\,\bar{Y}^c$ является пермутационным. Однако, многообразие универсального торсора Y не всегда рационально над k, даже если $X(k) \neq \emptyset$, примеры есть в размерности большей двух. Правда, в случае поверхности X с рациональной k-точкой вопрос о рациональности универсального торсора $Y \to X$ остается открытым. Пусть $R(k)$ – класс алгебраических многообразий, определенных над полем k, таких, что $\bar{X}$ является рациональным над $\bar{k}$.

Теорема 2. Пусть k – поле характеристики нуль, X, X' – гладкие проективные многообразия из класса $R(k)$. Пусть Y – универсальный торсор над X. Тогда существует торсор Y' над X' такой, что Y и Y' стабильно эквивалентны над k. $\triangle$

Изучение геометрии пересечения двух квадрик позволило получить следующее важное утверждение, дающее богатую информацию об арифметике так называемых обобщенных поверхностей Шатле, задаваемых в аффинных координатах уравнениями

$$y^2 - az^2 = P(x), \tag{5}$$

где $a \in k$, $P(x)$ – многочлен степени 3 или 4 над полем k, a не является квадратом в k.

Теорема 3. Универсальный торсор Y гладкой проективной обобщенной поверхности Шатле квазитривиален, т.е. из существования k-рациональной точки на Y следует k-рациональность многообразия Y. $\triangle$

6.5. Контрпримеры к гипотезе Зарисского. В 1984 году в совместной работе Бовиля, Кольо-Телена, Сансюка и сэра Свиннертон-Дайера [Б1] были построены не рациональные, но стабильно рациональные многообразия. Над незамкнутым полем такие примеры встречаются уже среди поверхностей, для замкнутых в размерности $n > 2$. Этим был дан отрицательный ответ на один из вопросов О.Зарисского, см. Сегре [1]. Мир оказался устроенным сложнее, чем ожидалось. Идея конструкции навеяна исследованиями в области N-торсоров $p : Y \to X$, где N – тор Нерона-Севери многообразия X. Авторы рассматривают поверхность Шатле (5), где $P(x)$ – неприводимый многочлен над k третьей степени, $a \in k$, a не

является квадратом в k и a есть дискриминант многочлена $P(x)$. Пусть α – корень $P(x)$ в $\bar{k}$, $F = k(\alpha)$, $M = k(\sqrt{a})$, $L = k(\alpha, \sqrt{a})$ – расширение Галуа с симметрической группой G_3. Пусть X – гладкая проективная модель уравнения (5) над полем k. Поскольку многообразие X_F рационально над F, а X_M – рационально над M, то $Pic\,\bar{X} = Pic\,X_L$ и $H^1(L/M, Pic\,X_L) = H^1(L/F, Pic\,X_L) = 0$. Таким образом, G_3-модуль $Pic\,X_L$ является вялым и, поскольку группа G_3 метациклична, то $Pic\,X_L$ лежит в $D(G_3)$. Но группа $D(G_3)/S(G_3)$ тривиальна по теореме Эндо-Мията [2], откуда изоморфизм

$$Pic\,X_L \oplus \hat{S}_1 \;\cong\; \hat{S}_2, \tag{1}$$

где S_1 и S_2 – пермутационные модули. Итак, поверхность X может претендовать на роль стабильно рационального многообразия. Проективную модель X уравнения (5) можно выбрать в виде расслоения на коники $\pi : X \to \mathbf{P}^1$ с четырьмя вырожденными слоями (корни $P(x)$ и ∞), в слое над ∞ есть k-рациональная точка. По теореме Исковских [1] поверхность X не является k-рациональной. Пусть $p : Y \to X$ – универсальный торсор с группой N, $\hat{N} = Pic\,\bar{X}$. Из соотношения (1) следует существование k-рационального сечения проекции p. Имеем бирациональный k-изоморфизм $Y \cong X \times_k N$. На Y есть k-точка, поэтому, по теореме 3 п.6.4, многообразие Y является k-рациональным. Поскольку многообразие N стабильно рационально, что следует из (1), то X также стабильно рационально. Искомый пример над незамкнутым полем построен. Несложные вычисления показывают, что $\dim N = 6$, $\dim S_1 = 3$ для данной модели X. Имеем $X \times_k \mathbf{A}^9 \;\cong\; \mathbf{A}^{11}_k$. Более тонкие расчеты в статье [Б1] показывают, что $X \times_k \mathbf{A}^3 \;\cong\; \mathbf{A}^5_k$.

Если поле k замкнуто, то все стабильно рациональные поверхности являются рациональными. Для построения аналогичного примера над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ рассмотрим поле $k = \mathbf{C}(t)$. Над полем k рассмотрим поверхность

$$y^2 - a(t)z^2 = P(x,t), \tag{2}$$

где $a(t)$ – многочлен без кратных корней, $P(x,t)$ – многочлен от двух переменных, неприводимый над k как многочлен от x и имеет третью степень по x, $a(t)$ – дискриминант x-многочлена P. Обозначим через X гладкую проективную модель трехмерного многообразия над $\mathbf{C}$, заданного уравнением (2). Многообразие X стабильно рационально над $\mathbf{C}$, поскольку стабильно рациональна поверхность (2) над $k = \mathbf{C}(t)$. В работе [Б1] на подходящей модели X вводится структура расслоения на коники и вычисляется промежуточный якобиан. В результате, если род кривой $P(x,t) = 0$ больше двух и ее проекция на ось t не имеет точек с индексом ветвления 3, то промежуточный якобиан многообразия X не изоморфен произведению якобианов кривых. Простейшие примеры. Поверхность $y^2 + 3z^2 = x^3 - 2$ стабильно рациональна над $\mathbf{Q}$, но не является $\mathbf{Q}$-рациональной. Трехмерное многообразие

$$y^2 + (t^4+1)(t^6+t^2+1)z^2 = 2x^3 + 3t^2x^2 + t^4 + 1$$

стабильно рационально над $\mathbf{C}$, но не является рациональным.

Эти примеры дают ответ на вопрос, поставленный Демазюром в статье [1] о максимальных торах в группе Кремоны $Cr_k(n)$ от n переменных. Существует максимальный тор размерности 3 в группе $Cr_k(6)$, если поле k – алгебраически замкнуто. Если поле k обладает расширением Галуа с группой G_3, то трехмерный разложимый максимальный тор имеется уже в группе $Cr_k(5)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-00038.

ЛИТЕРАТУРА

Борель (Borel A.)

1. Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972.
2. Свойства и линейные представления групп Шевалле //Семинар по алгебраическим группам, М.: Мир, 1973. С. 9 -59.

Бовиль, Кольо-Телен, Сансюк, Сэр Свиннертон-Дайер (Beauville A., Colliot-Thelene J.-L., Sansuc J.-J., Sir Peter Swinnerton-Dyer)

1. Varietes stablement rationnelles non rationnelles //Ann. Math., 1985. V.121. P. 283 - 318.

Ван дер Варден Б.Л.

1. Алгебра. М.: Наука, 1976.

Вейль (Weil A.)

1. The field of definition of a variety //Amer. J. Math., 1956. V.56. P.509-524.
2. Адели и алгебраические группы //Математика, 1964. Т.8:2. С. 3-74.

Воскресенский В.Е.

1. Группа Пикара линейных алгебраических групп //Исслед. по теории чисел. Саратов: СГУ, 1969. С.7-16.
2. О бирациональной эквивалентности линейных алгебраических групп //ДАН СССР, 1969. Т.188:5. С.978-981.
3. Бирациональные свойства линейных алгебраических групп //Изв. АН СССР. Серия матем. 1970, Т.34:1. С. 3-19.
4. Геометрия линейных алгебраических групп //Труды МИАН СССР. 1973. Т.132. С. 151-161.
5. Некоторые вопросы бирациональной геометрии алгебраичесих торов //Proc. Internat. Congress of Math. Vancouver, Canada, 1974. V.1. P. 343-347
6. Алгебраические торы. М.: Наука, 1977.
7. Проективные инвариантные модели Демазюра //Изв. АН СССР. Серия матем. 1982. Т.46:2. С.195-210.
8. Максимальные торы без аффекта в полупростых алгебраических группах //Матем. заметки. 1988. Т. 44:3. С.309-318.

Гельфанд С.И., Манин Ю.И.

1. Методы гомологической алгебры, I. М.: Наука, 1988.

Гротендик (Grothendieck A.)

1. Le groupe de Brauer I,II,III. Dix exposes sur la cohomologie des schemas //North-Holland, Amsterdam, 1968. P. 46-188.

Гротендик, Демазюр (Grothendieck A., Demazure M.)

1. Schemas en groupes, I. Berlin: Springer, 1977.

Демазюр (Demazure M.)

1. Sous-groupes algebriques de rang maximum du groupe de Cremona //Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 1970. V. 4:3. P.507-588.

Дресс (Dress A.)

1. The permutation class group of finite group //J.Pure and Appl. Algebra, 1975. V.6. P.1-12.

Исковских В.А.

1. Бирациональные свойства поверхности 4 //Матем. сб. 1972. Т. 88. С.31-37.

Картан А., Эйленберг С.

1. Гомологическая алгебра. М.:ИЛ, 1960.

Клячко А.А.

1. О рациональности торов с циклическим полем разложения //Арифметика и геометрия многообразий: Межвуз. сб. Куйбыш. ун-т, 1989. С.67-78.

Кольо-Телен, Сансюк (Colliot-Thelene J.-L., Sansuc J.-J.)

1. La R-equivalence sur les tores //Ann. sci. Ec. Norm. Sup. 1977. V.10:2. P.175-230.
2. Principal homogeneous spaces under flasque tori //J. Algebra. 1987. V.106. P. 148-205.
3. La descente sur les varietes rationnelles //Duke Math.J. 1987. V.54. P. 375-492.

Кунявский Б.Э.

1. О торах с биквадратичным полем разложения. //Изв. АН СССР. Серия матем. 1978. Т. 42:3. С.580-587.
2. О бирациональной классификации торов малой размерности //Семинар по арифметике алгебраических многообразий. Саратовский ун-т, 1979. С.37-42.
3. Торы, разложимые над расширением Галуа с группой S_3 //Исследов. по теории чисел. Саратовский ун-т, 1982. С.72-74.
4. О трехмерных алгебраических торах //Исследов. по теории чисел. Саратовский ун-т, 1987. С.90-111.

Мамфорд Д.

1. Абелевы многообразия. М.: Мир, 1971.

Манин Ю.И.

1. Рациональные поверхности над совершенными полями //Publ. Math. IHES. 1966. V.30. P.55-113.
2. Кубические формы. М.: Наука, 1972.

Милн Дж.

1. Этальные когомологии. М.: Мир, 1983.

Назарова Л.А.

1. Целочисленные представления четверной группы //ДАН СССР. 1961. Т.140:5. С.1011-1014.

Платонов В.П., Рапинчук А.С.

1. Алгебраические группы и теория чисел. М.: Наука, 1991.

Попов В.Л.

1. Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения //Изв. АН СССР. Серия матем. 1974. Т.38: 2. С.294-322

Розенлихт (Rosenlicht M.)

1. Some basic theorems on algebraic groups //Amer. J. Math.. 1956. V.78. P.401-443.

Ройтер А.В.

1. О представлениях циклической группы четвертого порядка целочисленными матрицами //Вестник ЛГУ. Т.19. 1960. С. 65-74.

Сегре (Segre B.)

1. Sur un probleme de M.Zariski //Colloque intern. d'algebre et de theorie des nombres. Paris, 1950. P.135-138.

Серр Ж.П.

1. Когомологии Галуа. М.: Мир, 1968
2. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969

Спрингер Т.А.

1. Линейные алгебраические группы //Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. 1989. Т.55. С. 5-136.

Суон Р.Г.

1. Индуцированные представления и проективные модули //Математика. 1964. Т.8:2. С. 3-27.

Суслин А.А.

1. Алгебраическая К-теория и гомоморфизм норменного вычета //Итоги науки и техн. ВИНИТИ.Соврем. пробл. матем. Новейшие достижения. 1984. Т. 25. С. 115-207.

Хамфри Дж.

1. Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1980.

Хиронака (Hironaka H.)

1. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero //Ann. Math. 1964. V.79. P.109-326.

Чистов А.Л.

1. О бирациональной эквивалентности торов с циклическим полем разложения //Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1976. Т.64. С.153-158.
2. О числе образующих полугруппы классов алгебраических торов относительно стабильной эквивалентности. ДАН СССР. 1978. Т.242:5. С.1027-1029.

Шафаревич И.Р.

1. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1972.

Шевалле (Chevalley C.)

1. On algebraic group varieties //J. Math. Soc.Japan. 1954. V.6. P.303-324.

Эндо, Мията (Endo S., Miyata T.)

1. Invariants of finite abelian groups //J. Math. Soc. Japan. 1973. V.25. P.7-26
2. Quasi-permutation modules over finite groups //I. J.Math. Soc. Japan, 1973, v.25. P.347-421; II. J.Math. Soc. Japan. 1974. V.26. P.698-713.
3. On a classification of the function fields of algebraic tori //Nagoya Math. J. 1974. V.56. P.85-104.
4. On the progective class group of finite groups //Osaka J. Math. 1976. V.13. P.109-122.
5. On the class groups of dihedral groups //J. of Algebra. 1980. V. 63:2. P.548-573.
6. Integral represantations with trivial first cohomology groups //Nagoya Math. J. 1982. V. 85. P.321-240.

Якобинский (Jacobinski H.)

1. Jenera and decompositions of laftices over orders //Acta Math. 1968. V.121. P.1-29.

BIRATIONAL GEOMETRY AND ARITHMETIC OF LINEAR ALGEBRAIC GROUPS, I.

V.E. Voskresenskii [2]

This article is the first one of the series of the works on birational geometry of linear algebraic groups and their applications. It contains necessary information from theories of schemes, cohomologies and some new results about linear algebraic groups.

[2]Voskresenskii Valentin Eugenievich, Dept. of Math. Samara State University