ВКЛАД ДВУХФОТОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ В ТОНКУЮ СТРУКТУРУ Р-ВОЛНОВОГО ПОЗИТРОНИЯ

А.П. Мартыненко [1], Р.Н. Фаустов [2]

В рамках квазипотенциального метода получен вклад двухфотонных ан нигиляционных диаграмм в оператор взаимодействия Р волнового позитрония. Вычислены поправки порядка $ff^5 R_\infty$ и $ff^5 lnffR_\infty$ к Р уровням энергии позитро ния.

Исследования энергетического спектра позитрония позволяют проверить предсказания квантовой электродинамики для чисто лептонной системы с высокой степенью точности. В последнее время большой интерес представляет изучение интервалов тонкой структуры в позитронии $2^3S_1 \div 2^3P_J$ (J=0,1,2), $2^3S_1 \div 2^1P_1$ [1, 2], точность измерения которых уже составляет несколько Мгц. В работе [3] были вычислены поправки порядка $\alpha^4 R_\infty$ к Р-уровням позитрония на основе нерелятивистской теории возмущений для уравнения Шредингера. Численные значения полученных поправок для 2Р-уровней составляют: 0,06 Мгц (2^1P_1); 0,08 Мгц (2^3P_2); 0,025 Мгц (2^3P_1); -0,58 Мгц (2^3P_0). Сравнивая эти результаты с расчетами Алексеева [4] вероятностей двухфотонной аннигиляции ортопозитрония в Р-состоянии, можно ожидать, что в случае появления в вещественной части двухфотонных аннигиляционных амплитуд $ln\alpha$, возникающие при этом поправки могут оказаться сопоставимыми со вкладами [3]. В данной работе проведен расчет вкладов $\alpha^5 ln\alpha R_\infty$ и $\alpha^5 R_\infty$ для Р-уровней позитрония из амплитуд двухфотонной аннигиляции. Наши вычисления основаны на релятивистском двухчастичном волновом уравнении шредингеровского типа [5]

$$\left(\frac{b^2}{2\mu_R} - \frac{\vec{p}^2}{2\mu_R}\right)\psi_M(\vec{p}) = \int V(\vec{p},\vec{q},M)\psi_M(\vec{q})\frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}, \tag{1}$$

где $\mu_R = M/4$ - релятивистская приведенная масса, а квадрат относительного импульса частиц на энергетической поверхности выражается через массу связанного состояния M=2m+B (B-энергия связи) следующим образом:

$$b^2(M) = \frac{1}{4}M^2 - m^2. \tag{2}$$

В случае позитрония основной вклад в оператор взаимодействия $V(\vec{p},\vec{q},M)$ дает модифицированный кулоновский потенциал:

$$V^c(\vec{p},\vec{q},M) = -\frac{4\pi\alpha}{(\vec{p}-\vec{q})^2}\left(1 + \frac{4b^2}{M^2}\right), \tag{3}$$

---

[1] Мартыненко Алексей Петрович, кафедра общей и теретической физики СамГУ
[2] Фаустов Рудольф Николаевич, Научный Совет "Кибернетика" РАН

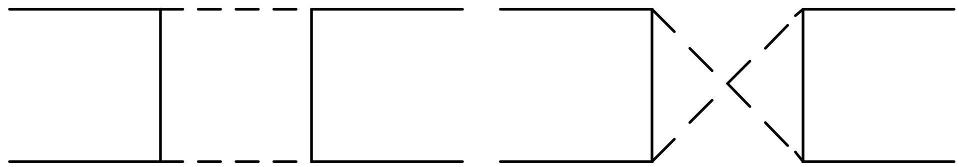

Рис. 1: Две диаграммы Фейнмана, представляющие квазипотенциал двухфотонной аннигиляции.

для которого уравнение (1) имеет точное решение в виде обычных кулоновских волновых функций с учетом релятивистских поправок кинематической природы [5]. Рассмотрим вклад в квазипотенциал уравнения (1) двухфотонных аннигиляционных диаграмм, изображенных на рисунке 1.

Квазипотенциал первой диаграммы рис.1 имеет вид [6]:

$$V_1(\vec{p},\vec{q},M)=\frac{i\alpha^2}{4m^2\pi^2}\int d^4k\bar{v}(p_2)\gamma_\lambda\frac{\hat{p}_1-\hat{k}+m}{(p_1-k)^2-m^2+i0} \tag{4}$$

$$\gamma_\mu u(p_1)\bar{u}(q_1)\gamma_\nu\frac{\hat{q}_1-\hat{k}+m}{(q_1-k)^2-m^2+i0}\gamma_\sigma v(q_2)\frac{g_{\mu\nu}}{k^2+i0}\frac{g_{\lambda\sigma}}{(P-k)^2+i0},$$

где

$$p_1=\frac{P}{2}+p=\left(\frac{M}{2}+p^0,\vec{p}\right),\quad p_2=\frac{P}{2}-p=\left(\frac{M}{2}-p^0,-\vec{p}\right),$$

$$q_1=\frac{P}{2}+q=\left(\frac{M}{2}+q^0,\vec{q}\right),\quad q_2=\frac{P}{2}-q=\left(\frac{M}{2}-q^0,-\vec{q}\right)$$

- 4-импульсы электрона и позитрона в начальном и конечном состояниях, $P=p_1+p_2$ - полный 4-импульс, $p=(p_1-p_2)/2, q=(q_1-q_2)/2$. Пропагатор фотона был выбран в калибровке Фейнмана. Как будет показано ниже, полученные результаты не зависят от выбора калибровки. Квазипотенциал (4) описывает состояния электрона и позитрона со спином S=0,1. Рассмотрим вначале ортопозитроний. Для этого введем в (4) релятивистский проекционный оператор на состояние со спином S=1 [7, 8, 9]:

$$\hat{\pi}=u(\vec{p})\bar{v}(-\vec{p})=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{(\hat{p}_1+m)(1+\gamma^0)\hat{\epsilon}(-\hat{p}_2+m)}{2m(\epsilon(\vec{p})+m)}. \tag{5}$$

Тогда для построения оператора взаимодействия частиц, соответствующего первой аннигиляционной амплитуде, необходимо вычислить два следа γ - матриц Дирака и выполнить интегрирование по d^4k:

$$V_1^{orth.}(\vec{p},\vec{q},M)=\frac{i\alpha^2}{128m^4\pi^2}\int d^4kTr[(\hat{p}_1+m)(1+\gamma^0) \tag{6}$$

$$\hat{\epsilon}(-\hat{p}_2+m)\gamma_\lambda(\hat{p}_1-\hat{k}+m)\gamma_\mu]Tr[(-\hat{q}_2+m)\hat{\epsilon}(1+\gamma^0)(\hat{q}_1+m)\gamma_\mu(\hat{q}_1-\hat{k}+m)\gamma_\lambda]$$

$$\left\{(k^2+i0)[(P-k)^2+i0][(p_1-k)^2-m^2+i0][(q_1-k)^2-m^2+i0]\right\}^{-1}.$$

Для l=1 ортопозитрония основной вклад в квазипотенциал необходимого порядка получится, если в (6) выполнить разложение по относительным импульсам p,q и удержать лишь члены линейные по p и q. Усреднение (6) по волновым функциям $\psi(\vec{p})$ P-волнового ортопозитрония выполняется тогда с помощью соотношения:

$$\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\psi(\vec{p})p_\alpha = -i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}R'_P(0)\epsilon_\alpha(L_z), \tag{7}$$

где $\epsilon_\alpha(L_z)$ - вектор поляризации орбитального движения, R_P - радиальная волновая функция P-состояния. Используя далее коэффициенты Клебша-Гордона, выразим $\epsilon_\alpha(S_z), \epsilon_\beta(L_z)$ через волновые функции $\epsilon_\lambda(J_z), \epsilon_{\lambda\sigma}(J_z)$ с полным моментом J=0,1,2 соответственно [10]:

$$\sum_{S_z,L_z} < 1, L_z; 1, S_z|J, J_z > \epsilon_\alpha(S_z)\epsilon_\beta(L_z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}(g_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta), & J = 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\epsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}v_\lambda\epsilon_\rho(J_z), & J = 1 \\ \epsilon_{\alpha\beta}(J_z), & J = 2. \end{cases} \tag{8}$$

Интегрирование по k выполняется стандартным образом. Объединим фотонные, электронные и позитронные знаменатели с помощью фейнмановских параметров x, y, z:

$$\frac{1}{D_\gamma(k)D_\gamma(P-k)D_e(p_1-k)D_e(q_1-k)} = 6\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{z(1-z)dz}{(k^2-2k\Omega+T)^4}, \tag{9}$$

$$\Omega = z[x(p-q) + \frac{P}{2} + q] + (1-z)Py, \quad T = \kappa z + M^2 y(1-z),$$

а κ учитывает сход частиц с массовой поверхности:

$$\kappa = b^2 = -\frac{m^2\alpha^2}{4}.$$

Сдвиг переменной интегрирования $k \to k + \Omega$ и вычисление импульсных интегралов с заданной точностью приводит к следующему выражению для квазипотенциала первой диаграммы:

$$V^{orth.}_{1,J=0}(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\alpha^2(\vec{p}\vec{q})}{1536m^4}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 z(1-z)dz\left[\frac{f_1(x,z)}{D^2(y,z)} + \frac{f_2(x,y,z)}{D^3(y,z)}\right], \tag{10}$$

$$f_1 = 3(2 - x^2z^2 + xz^2 + z), \quad D(y,z) = 4y(1-y)(1-z)^2 - z^2 - z\frac{\alpha^2}{4},$$

$$f_2 = 6xz^2(12xy^2z^2 - 24xy^2z + 12xy^2 - 12xyz^2 + 24xyz - 12xy + 3xz^2 + 4xz - 4x-$$
$$-12y^2z^2 + 24y^2z - 12y^2 + 12yz^2 - 24yz + 12y - 3z^2 - 4z + 4),$$

$$V^{orth.}_{1,J=1}(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\alpha^2(\vec{p}\vec{q})}{1536m^4}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 z(1-z)dz\left[\frac{f_3(x,y,z)}{D^2(y,z)} + \frac{f_2(x,y,z)}{D^3(y,z)}\right], \tag{11}$$

$$f_3 = 2(1 + 2x^2z^2 - 2xz^2 - 2y^2z^2 + 4y^2z - 2y^2 + 2yz^2 - 4yz + 2y - z^2 - z),$$

$$V^{orth.}_{1,J=2}(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\alpha^2(\vec{p}\vec{q})}{1536m^4}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 z(1-z)dz\left[\frac{f_4(x,y,z)}{D^2(y,z)} + \frac{f_2(x,y,z)}{D^3(y,z)}\right], \tag{12}$$

$$f_4 = 2(1 + x^2z^2 - xz^2 - z).$$

Квазипотенциал перекрестной двухфотонной аннигиляционной диаграммы имеет вид:

$$V_2(\vec{p},\vec{q},M)=\frac{i\alpha^2}{4m^2\pi^2}\int d^4k\bar{v}(p_2)\gamma_\lambda\frac{\hat{p}_1-\hat{k}+m}{(p_1-k)^2-m^2+i0} \tag{13}$$

$$\gamma_\mu u(p_1)\bar{u}(q_1)\gamma_\nu\frac{\hat{k}-\hat{q}_2+m}{(q_2-k)^2-m^2+i0}\gamma_\sigma v(q_2)\frac{g_{\mu\sigma}}{k^2+i0}\frac{g_{\lambda\nu}}{(P-k)^2+i0},$$

Дальнейшие преобразования этого выражения выполняются также, как для первой диаграммы, и в результате оказывается, что обе диаграммы дают одинаковые вклады (10)-(12) в квазипотенциал в рассматриваемом приближении для ортопозитрония и вклады противоположные по знаку для парапозитрония. Вычисляя интегралы по фейнмановским параметрам x, y, z в (10)-(12) с помощью системы "REDUCE" и усредняя полученные выражения по кулоновским P-волновым функциям уравнения (1), мы получили следующие вклады в энергетический спектр ^3P_J - состояний:

$$B_{J=0}=m\alpha^7\frac{(n^2-1)}{8\pi n^5}\left(\frac{8}{9}ln2+\frac{1}{9}ln\alpha+\frac{5}{18}-\frac{i\pi}{2}\right), \tag{14}$$

$$B_{J=1}=m\alpha^7\frac{(n^2-1)}{8\pi n^5}\left(\frac{8}{9}ln2-\frac{8}{9}ln\alpha+\frac{2}{9}\right), \tag{15}$$

$$B_{J=2}=m\alpha^7\frac{(n^2-1)}{30\pi n^5}\left(\frac{10}{3}ln2-\frac{7}{3}ln\alpha-\frac{1}{12}-\frac{i\pi}{2}\right), \tag{16}$$

где мы учли, что

$$|R'_{nP}(0)|^2=\frac{m^5\alpha^5(n^2-1)}{72n^5}, \tag{17}$$

n=1,2,... - главное квантовое число. Мнимая часть энергии B определяет ширину соответствующего распада позитрония $\Gamma=-2ImB$. Для состояния $^3P_1$ мнимые части в формуле для энергии (15), возникающие от двух слагаемых в (11), сокращаются, а для состояний $^3P_0,^3P_2$ они оказываются отличными от нуля и совпадающими с результатами [4]. Вещественные части энергетических уровней (14)-(16) приводят к следующим численным значениям для уровня n=2: 0,2 Кгц ($^3P_0$), 2,6 Кгц ($^3P_1$), 2 Кгц ($^3P_2$). Наиболее значимой оказывается поправка к уровню $^3P_1$, составляющая около 10% от вклада порядка α^4R_∞ [3].

Мы вычислили в данной работе вклады α^5R_∞ и $\alpha^5ln\alpha R_\infty$ к P-уровням позитрония в диагональной калибровке (Фейнмана), так как данная калибровка является наиболее простой. Но проведенные расчеты являются калибровочно инвариантными. В этом легко убедиться, рассмотрев вклад в квазипотенциал произвольной продольной части фотонного пропагатора. Этот вклад пропорционален выражению:

$$\bar{v}(p_2)\gamma_\lambda S_F(p_1-k_1)\gamma_\mu u(p_1)k_1^\mu k_1^\sigma k_2^\lambda k_2^\nu\bar{u}(q_1)\gamma_\nu\left[S_F(q_1-k_1)+S_F(k_1-q_2)\right]\gamma_\sigma v(q_2)=$$

$$=\bar{v}(p_2)\hat{k}_2S_F(p_1-k_1)\hat{k}_1u(p_1)\bar{u}(q_1)\left[(\hat{k}_1-\hat{q}_1+m)\frac{1}{\hat{q}_1-k_1-m}\hat{k}_2+\right. \tag{18}$$

$$\left.\hat{k}_1\frac{1}{\hat{k}_1-\hat{q}_2-m}(\hat{k}_1-\hat{q}_2-m)\right]v(q_2)\equiv 0,\quad k_2=P-k,\quad S_F(k)=\hat{k}+m$$

с учетом уравнений движения для биспиноров Дирака.

В заключение авторы выражают благодарность И.Б.Хрипловичу и В.А.Салееву за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-17309).

Литература

[1] Hagena D., Ley R., Weil D., Werth G. //Phys. Rev. Let. 1993. V.71. N18. P.2887.
[2] Двоеглазов В.В., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н. //ФЭЧАЯ. 1994. Т.25. Вып.1. С.144.
[3] Елховский А.С., Мильштейн А.И., Хриплович И.Б. //ЖЭТФ. 1994. Т.105. Вып.2. С.299.
[4] Алексеев А.И. //ЖЭТФ. 1958. Т.34. Вып.5. С.1195.
[5] Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. //ЯФ. 1987. Т.45. С.770.
[6] Фаустов Р.Н. //ТМФ. 1970. Т.3. N2. С.240.
[7] Keung Wai-Yee, Muzinich I.J. //Phys. Rev. 1983. V.D27. P.1518.
[8] Мартыненко А.П., Салеев В.А., Фаустов Р.Н. //ЯФ. 1995. Т.58. N8. С.1454.
[9] Cung V.K., Devoto A., Fulton T., Repko W.W. //Nuovo Cimento. 1978. V.43A. N4. P.643.
[10] Kuhn J.H., Kaplan J., Safiani El. G.O. //Nucl. Phys. 1979. B157. P.125.

TWO FOTON ANNIHILATION CONTRIBUTION TO THE FINE STRUCTURE OF P-WAVE POSITRONIUM

R.N. Faustov,[1] A.P. Martynenko[2]

On the basis of the quasipotential method we have obtained the contribution of two foton annihilation diagramms to the interaction operator of P wave positronium. The corrections of order of $ff^5 R_\infty$ and $ff^5 ln ff R_\infty$ to the P wave energy levels of positronium were calculated.

[1]Faustov Rudolf Nikolaevich, Scientific Council "Cybernetics" RAS
[2]Martynenko Alexei Petrovich, Dep. of General & Theoretical Physics Samara State University