АСИМПТОТИКА ФОРМФАКТОРА ПИОНА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ДИНАМИКЕ

А.Ф.Крутов,[1] В.Е.Троицкий[2]

В рамках мгновенной формы релятивистской гамильтоновой динамики получена асимптотика пионного формфактора при больших переданных импульсах. Полученная асимптотика совпадает с предсказаниями пертурбативной КХД. Показано, что этот результат является следствием релятивистского эффекта поворота спина и не зависит от выбора волновой функции кварков в пионе.

В последние годы сформировались два основных способа описания адронной материи. Первый – квантовая хромодинамика (КХД) – основан на фундаментальных принципах квантовой теории поля, второй – составная кварковая модель адронов (СКМ) – является по преимуществу феноменологическим (см., например, [1]).

Стандартная пертурбативная КХД дает достаточно надежные вычисления только для так называемых "жестких" процессов, которые характеризуются большими передачами импульса. С другой стороны есть основания считать [2], что пертурбативная хромодинамика неприменима для описания существующих экспериментальных данных по эксклюзивным реакциям. Это касается, например, описания упругих формфакторов составных кварковых систем. Так, для электромагнитного формфактора пиона пертурбативная КХД дает лишь поведение при $Q^2 \to \infty$ ($Q = -q$, q – переданный импульс) [3]:

$$F_\pi(Q^2) \sim Q^{-2}\,. \qquad (1)$$

Вопросы о границах асимптотического режима и о том, достигнут ли этот режим в, эксперименте остаются пока открытыми.

Составная кварковая модель претендует на описание адронных свойств в непертурбативной области. При описании пиона это область малых и промежуточных Q^2, где есть экспериментальные данные по пионному формфактору. Существует целый ряд формулировок СКМ, достаточно хорошо описывающих эксперименты по измерению формфактора пиона [4] – [9].

Проблема согласования предсказаний пертурбативной КХД и СКМ является в настоящее время весьма актуальной. Делаются, например, попытки описания формфактора пиона в рамках пертурбативной КХД в области промежуточных переданных импульсов [10]. С другой стороны, интересной задачей является получение асимптотического поведения (1) в рамках составных кварковых моделей.

[1]Крутов Александр Федорович. Кафедра общей и теоретической физики Самарского государственного университета

[2]Троицкий Вадим Евгеньевич. Лаборатория теории поля, Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ

В настоящей работе эта задача решается в рамках мгновенной формы релятивистской гамильтоновой динамики (РГД) (см., например, [11] – [14]). Мы покажем, что в рамках нашего подхода [14] при $Q^2 \to \infty$ и $M \to 0$ (M – масса конституентного кварка) получается асимптотическое поведение (1). Будет показано также, что данное поведение обусловлено только релятивистскими эффектами и не зависит, например, от вида волновой функции кварков в пионе. Данный факт проверен для волновых функций с гауссовским и степенным спаданием.

В рамках нашего подхода для формфактора пиона получено интегральное представление следующего вида [9], [14]:

$$F_\pi(Q^2) = \int d\sqrt{s}\; d\sqrt{s'}\;\; \varphi(k)\, g_0(s, Q^2, s')\, \varphi(k'). \tag{2}$$

$s = 4\,M^2 + 2\,M\,E\,,\quad k^2 = E\,M/2.$ E – энергия кварков в лабораторной системе отсчета. Явная формула для свободного двухчастичного формфактора $g_0(s, Q^2, s')$ для точечных кварков приведена в [9]. В силу громоздкости соответствующего выражения в настоящей работе оно не приводится. Релятивистская волновая функция $\varphi(k)$ определяется следующими соотношениями [14]:

$$\varphi(k) = \sqrt[4]{4(k^2 + M^2)}\, u(k)\, k\,, \quad \int k^2\, u^2(k)\, dk = 1\,. \tag{3}$$

В качестве $u(k)$ в (3) может быть взята какая-либо феноменологическая волновая функция пиона.

Для исследования асимптотического поведения формфактора (2) мы будем использовать следующие волновые функции, широко распространенные в текущей литературе:

1. Волновая функция модели с осцилляторным взаимодействием кварков (см., например, [5])

$$u(k) = N_{HO}\, \exp\left(-k^2/2\, b^2\right), \tag{4}$$

2. Волновая функция степенного вида (см., например, [6])

$$u(k) = N_{PL}\, (k^2/b^2 + 1)^{-n}\,, \quad n = 2\,, 3\,. \tag{5}$$

Перейдем теперь к исследованию асимптотики выражения (2) с волновыми функциями (4) и (5).

Асимптотическое разложение интеграла (2) может быть получено на основании теоремы 7.1 из [15]:
Теорема. Рассмотрим интеграл следующего вида:

$$I(x) = \int\limits_a^b \mathrm{e}^{-x\, p(t)}\, q(t)\, dt\,. \tag{6}$$

В этом интеграле: $x > 0$, a, b, $p(t)$, $q(t)$ не зависят от x.
a – конечно, а b может быть бесконечным. Без потери общности можно считать, что минимум функции $p(t)$ достигается в точке a: в других случаях область интегрирования можно разбить на части точками минимума и максимума функции $p(t)$ и, если это необходимо, изменить знак t.

Пусть выполняются следующие условия:

1) $p(t) > p(a)$ при $\forall t \in (a\,,\, b)$ и $p(t)$ достигает минимума лишь в точке a;

2) $p'(t)$ и $q(t)$ непрерывны в малой окрестности точки a, исключая, возможно, саму точку a;

3) при $t \to a$ справа

$$p(t) - p(a) \sim C\,(t-a)^{\mu}\,, \quad q(t) \sim D\,(t-a)^{\lambda-1}\,,$$

и первое из этих соотношений допускает дифференцирование. Здесь $C\,,\,\mu,\,,\,\lambda$ – положительные постоянные (целые или нет), а $D \neq 0$ – действительная или комплексная постоянная;

4) интеграл (6) абсолютно сходится при всех достаточно больших x.

При сформулированных условиях

$$I(x) \sim \frac{D}{\mu}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x\,p(a)}}{(C\,x)^{\lambda/\mu}}\,, \quad x \to \infty\,. \tag{7}$$

В силу равномерной сходимости двойного интеграла (2), под знаком интеграла можно перейти к пределу $Q^2 \to \infty\,(Q^2 >> M^2)$. В случае волновой функции (4) соответствующий главный член разложения будет иметь вид:

$$F_\pi(Q^2) \sim \frac{1}{8}\,N_{HO}\,(2\,M)^{3/2}\,\sqrt[4]{x}\,\exp\left(-\,x\,\frac{M^2}{2b^2}\right)\int\limits_0^\infty \frac{dy\,\varphi(s(y))}{\sqrt{1+y}}\exp\left(-\,2\,x\,y\,\frac{M^2}{2b^2}\right)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^1 dt\,\exp\left(-\,2\,x\,(2t-1)\frac{M^2}{2b^2}\sqrt{y\,(1+y)}\right)\cdot\frac{1}{\left[1+2y+2(2t-1)\sqrt{y\,(1+y)}\right]^{1/4}}$$

$$\frac{1}{\left[\sqrt{y}(2t-1)+\sqrt{y+1}\right]^2}\left\{\left[\sqrt{y}\,(2t-1)+\sqrt{y+1}\right]\cos(\omega_1+\omega_2)+\right.$$

$$\left.+\,2\sqrt{y}\sqrt{t(1-t)}\,\sin(\omega_1+\omega_2)\right\} \tag{8}$$

$\omega_1\,,\,\omega_2$ в (8) это главные члены разложения параметров поворота спина [9], имеющие следующий вид:

$$\omega_1 = \mathrm{arctg}\frac{a}{b}\,, \quad a = \sqrt{y}\,\sqrt{1-(2t-1)^2}\,, \quad b = \left[1+(2t-1)\sqrt{y}+\sqrt{1+y}\right]\,, \tag{9}$$

$$\omega_2 = \mathrm{arctg}\frac{a}{c}\,, \quad c = \left[1+2y+\sqrt{y+1}\;+\;2(2t-1)\sqrt{y}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{y+1}\right)\right]\,. \tag{10}$$

В выражении (8) использованы следующие переменные $y = E/2M$, $x = Q^2/4M^2$.

Теорема (7) напрямую применима к внутренним интегралам в (8). После подстановки соответствующего разложения в (8) внешний интеграл, содержащий косинус параметров поворота спина, имеет следующий вид:

$$J \sim N_{HO}^2\frac{M\,b^2}{4}\,x^{-3/4}\int\limits_0^\infty dy\,\frac{\exp\left(-y\,\frac{M^2}{2b^2}\right)}{(1+y)^{3/4}}\,\frac{\exp\left(-\,x\,\frac{M^2}{2b^2}\,\left[\sqrt{y+1}-\sqrt{y}\right]^2\right)}{\left[\sqrt{y+1}-\sqrt{y}\right]^{3/2}}\,. \tag{11}$$

При получении (11) были учтены выражения (3) и (4). Для вычисления асимптотики интеграла (11) теорема (7) напрямую неприменима. Для асимптотической оценки (11) необходимо найти максимум всего подинтегрального выражения при

$x \to \infty$. Именно окрестность точки максимума дает основной вклад в асимптотику. Отыскание максимума сводится к нахождению асимптотического решения трансцендентного уравнения. Асимптотический корень этого уравнения для (11) равен: $y = \sqrt{x}/2$. Чтобы положение максимума подинтегральной функции не зависело от x, нужно сделать замену переменной в интеграле $\tilde{y} = 2y/\sqrt{x}$. Точка максимума $\tilde{y} = 1$ разбивает область интегрирования на две части и, соответственно, интеграл (11) на два интеграла. При интегрировании по отрезку $[0\,,1]$ нужна еще одна замена $\tilde{\tilde{y}} = 2 - \tilde{y}$. После этого к обоим интегралам применима теорема (7). В результате для (11) получаем следующую асимптотику:

$$J \sim N_{HO}^2 \frac{\sqrt{2\,\pi}}{2\,\sqrt{x}}\, b^3 \,\exp\left(-\sqrt{x}\,\frac{M^2}{2b^2}\right)\,. \tag{12}$$

Аналогично вычисляется асимптотическое разложение для интеграла, содержащего синус суммы параметров поворота.

Окончательно асимптотическое разложение для пионного формфактора в случае волновых функций (4) имеет вид:

$$F_\pi(Q^2) \;\sim\; 4\sqrt{2}\frac{M}{Q}\exp\left(-\frac{QM}{4b^2}\right)\,\left(1 + 8\,\frac{b^2}{MQ}\right)\,, \tag{13}$$

В выражении (13) учтен вид нормировочной константы в (4) $N_{HO}^2 = 4/(\sqrt{\pi}b^3)$. Второе слагаемое в этом выражении это вклад интеграла, содержащего синус суммы углов поворота спина.

Без учета поворота спина ($\omega_1 = \omega_2 = 0$) в (8) асимптотика принимает следующий вид:

$$F_\pi(Q^2) \;\sim\; 4\sqrt{2}\frac{M}{Q}\exp\left(-\frac{QM}{4b^2}\right)\,. \tag{14}$$

Для сравнения приведем асимптотику нерелятивистского формфактора пиона:

$$F_\pi(Q^2) \sim\; 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{Q}{2M}}\exp\left(-\,\frac{Q^2}{8b^2}\right)\,. \tag{15}$$

Таким образом, нерелятивистская асимптотика дает гауссовское убывание формфактора. Как видно из сравнения (13) и (14) с (15), релятивизм существенно замедляет убывание формфактора – от гауссовского убывания до просто экспоненциального.

Из формулы (13) в пределе $M \to 0$, $(M/b \ll 1)$ получается асимптотика, совпадающая с правилами кваркового счета (1):

$$F_\pi(Q^2) \;\sim 32\sqrt{2}\frac{b^2}{Q^2}\,. \tag{16}$$

Итак, мы получили, что асимптотика формфактора, совпадающая с предсказаниями пертурбативной КХД, получается в нашем подходе в модели взаимодействия кварков (4) только при учете поворота спина, возникающего при сложении спинов конституентных кварков.

Чтобы выяснить степень модельной зависимости полученного результата, вычислим асимптотику формфактора в модели (5).

Главный член разложения формфактора (2) при $Q^2 \to \infty (Q^2 >> b^2)$ и $M \to 0\,(M << b)$ имеет следующий вид:

$$F_\pi(Q^2) \sim \frac{N_{PL}}{4}\, M\,\sqrt{x} \int\limits_0^\infty dy\, \frac{\varphi(s(y))}{\sqrt{1+y}} \int\limits_0^1 dt \frac{1}{p(t\,,\,y\,,x)} \left\{ \frac{\cos\tilde\omega}{\sqrt{y}(2t-1)\,+\sqrt{y+1}} + \right.$$

$$\left. + 2\,\sqrt{y}\,\sqrt{t(1-t)} \frac{\sin\tilde\omega}{\left[\sqrt{y}(2t-1)+\sqrt{y+1}\right]^2} \right\}. \tag{17}$$

здесь,

$$p(t\,,\,y\,,x) = \left(y\,x\,\frac{M^2}{b^2}\right)^n \left(4t\,Z(y\,,\,x) - \frac{1}{2yx} + \frac{b^2}{yxM^2}\right)^n \cdot$$

$$\cdot (yx)^{1/4} \left(4t\,Z(y\,,\,x) + \frac{1}{2yx}\right)^{1/4},$$

$$\tilde\omega = \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-t}{t}}\,, \quad Z(y\,,\,x) = 1 + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4yx}\,. \tag{18}$$

Внутренний интеграл в (17), содержащий косинус параметров поворота спина представим в виде:

$$J\,e^{(\ln\,p(0\,,\,y\,,x))} = \int\limits_0^1 dt e^{(-\,[\ln\,p(t\,,\,y\,,x) - \ln\,p(0\,,\,y\,,x)])} \frac{\cos\tilde\omega}{\sqrt{y}(2t-1)+\sqrt{y+1}} \simeq$$

$$\simeq \int\limits_0^\varepsilon dt e^{(-\,[\ln\,p(t\,,\,y\,,x) - \ln\,p(0\,,\,y\,,x)])} \frac{\cos\tilde\omega}{\sqrt{y}(2t-1)+\sqrt{y+1}}\,. \tag{19}$$

Приведенная оценка основана на том, что, как это следует из структуры подинтегральной функции, основной вклад в асимптотику дает малая окрестность точки $t = 0$. Отброшенная часть интеграла имеет более высокий параметр малости при $x \to \infty$. Производя разложение подинтегральной функции в окрестности точки $t = 0$, получаем интеграл стандартного вида (6). Соответствующее асимптотическое разложение по теореме (7) имеет следующий вид:

$$J \sim \sqrt[4]{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{(2x)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{y+1}-\sqrt{y}} \frac{1}{\left[y\left(1+\frac{1}{2y}\right)\right]^{3/2}}\,. \tag{20}$$

Аналогично вычисляется асимптотика интеграла, содержащего синус параметра поворота кварков в (17).

Внешние интегралы в (17) в случае волновых функций (5) изменяют только множитель в асимптотическом разложении и легко вычисляются. Окончательное выражение для асимптотики пионного формфактора в модели (5) при $n = 2$ имеет следующий вид:

$$F_\pi(Q^2) \sim \sqrt[4]{2}\,N_{PL}^2\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)(2\,M\,b)^{5/2}\,B\left(\frac{5}{4}\,,\,\frac{3}{4}\right)\,\frac{1}{Q^2}\,, \tag{21}$$

и при $n = 3$:

$$F_\pi(Q^2) \;\sim\; \sqrt[4]{2}\, N_{PL}^2\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (2\,M\,b)^{5/2}\, B\left(\frac{5}{4}\,,\,\frac{7}{4}\right)\,\frac{1}{Q^2}\,. \tag{22}$$

Таким образом, как и в модели (4), в модели (5) при $M\ \to 0$ в рамках нашего подхода асимптотика пионного формфактора совпадает с предсказаниями пертурбативной КХД (1). Прямыми вычислениями показывается, что в отсутствии поворота спина ($\tilde{\omega} = 0$) в (17) асимптотика будет отличаться от асимптотики КХД.

Итак, можно сделать вывод, что асимптотика формфактора пиона, совпадающая с предсказанием КХД, является следствием чисто кинематического релятивистского эффекта поворота спина и не зависит от модели взаимодействия кварков.

Отметим, что этот факт отличает наш подход от релятивистской гамильтоновой динамики на световом фронте [16], [17], где КХД-асимптотика является следствием структуры волновой функции. Можно показать, используя формулы [5], что асимптотика пионного формфактора на световом фронте не зависит, например, от т.н. поворота Мелоша, который является аналогом поворота спина в мгновенной форме динамики в нашем формализме.

Представляется, что наш результат более отвечает традиционным представлениям о физике процессов при асимптотических передачах импульса. Кварки в этой области являются почти свободными, и поэтому свойства составных систем не должны в этой области определяться какой-либо непертурбативной динамикой, в частности, не должны определяться структурой волновой функции.

В заключение отметим, что наш формализм достаточно хорошо описывает эксперименты по измерению пионного формфактора при малых Q^2 [9], при промежуточных переданных импульсах [13] и, как показано в настоящей работе, дает правильную, т.е. совпадающую с предсказаниями КХД асимптотику при $Q^2\ \to\ \infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 96 – 02 – 17288).

Литература

[1] Le Yaouanc A., Oliver L., Péne O., Raynal J.–C.// preprint Université de Paris XI, LPTHE–Orsay 95/11, Orsay, 1995.

[2] Brodsky S.J.// preprint of Stanford University, SLAC–PUB–6356, Stanford, 1993.

[3] Lepage G.P., Brodsky S.J. // Phys.Rev. 1980. V.D22. P.2157.

[4] Buck W.W., Williams R.A., Ito H.// preprint CEBAF–TH–94–02, Newport News, 1994.

[5] Chung P.L., Coester F., Polyzou W.N. // Phys.Lett. 1988. V.205B. P.545.

[6] Cardarelli F., Grach I.M., Narodetskii I.M., Pace E., Salmeé G., Simula S. // Phys.Lett. 1994. V.332B. P.1.

[7] Kisslinger L.S., Wang S.W. // preprint hep-ph/9403261.

[8] Schlumpf F. // Phys.Rev. 1994. V.D50. P.6895.

[9] Krutov A.F., Troitsky V.E. // J.Phys.G. 1993. V.19. P.L127.

[10] Jacob R., Kroll P. // Phys.Lett. 1993. V.315B. P.463.

[11] Keister B.D., Polyzou W.N. // Advances in Nucl.Phys. 1991. V.20. P.225.

[12] Lev F.M. // Revista Nuovo Cim., 1993. V.16. P.1.

[13] Balandina E.V., Krutov A.F., Troitsky V.E. // preprint of Skobeltsyn Institut of Nuclear Physics, 95 – 27/391, Moscow, 1995.

[14] Баландина Е.В., Крутов А.Ф., Троицкий В.Е. // ТМФ. 1995. Т.103. С.41.
[15] Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
[16] Терентьев М.В. // Ядерная физика. 1976. Т.24. С.207.
[17] Keister B.D. // Phys.Rev. 1994. V.D49. P.1500.

ASYMPTOTIC OF PION FORM FACTOR IN THE RELATIVISTIC HAMILTONIAN DYNAMICS

A.F. Krutov,[1] V.E. Troitsky[2]

Asymptotic of pion form factor is obtained in the framework of hamiltonian relativistic dynamics at large momentum transfers. Result coincides with prediction of QCD. It is shown that QCD asymptotic arises from relativistic effect of spin rotation and does not depend on choosing of quark antiquark wave function.

[1]Krutov Alexander Fedorovich, Dept. of General and Theoretical Physics, Samara State University
[2]Troitsky Vadim Evgenievich, Lab. of Field Theory, Institute of Nuclear Physics, Moscow State University