РАЗВИТИЕ ТРЕЩИН В ОХРУПЧИВАЮЩЕЙСЯ УПРУГО–ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

В.И. Астафьев, [1] Л.К. Ширяева, [2]

В работе предложена математическая модель, описывающая процесс рас пространения трещин в упруго пластической охрупчивающейся среде. Моде лирование роста трещин проводилось с привлечением внутренней скалярной переменной (параметра поврежденности). В качестве критерия локального разрушения использовался модифицированный критерий Леонова Панасюка. Предложенная модель была применена к решению задачи о росте полубеско нечной трещины в материале, охрупчивающемся под воздействием водородсо держащей среды. Определены условия существования стационарного решения задачи, найдены значения порогового коэффициента интенсивности напряже ний K_{ISCC}.

1 Постановка задачи

Рассмотрим полубесконечную трещину нормального отрыва, подвергнутую на бесконечности растяжению,которое определяется заданным коэффициентом интенсивности напряжений K_I. На плоскости XY трещина представляет собой разрез вдоль отрицательной полуоси X, свободный от внешних нагрузок (рис.1). Предположим, что материал, в котором расположена трещина, находится в условиях воздействия водородсодержащей среды. Процесс взаимодействия агрессивной среды с материалом включает в себя ряд стадий: адсорбцию атомарного водорода на поверхности раздела среда-металл, переход водорода через поверхность раздела среда-металл,диффузию атомарного водорода в объем металла, абсорбцию водорода в металле, химическое взаимодействие водорода с атомами решетки и примесями [1]. Как показывают эксперименты, важную роль в этом взаимодействии играет диффузия водорода в объеме металла [2]. Диффундирующий водород оказывает охрупчивающее влияние на материал, всегда уменьшая его прочность и пластичность. Такие изменения механических свойств материала под воздействием водорода связаны с накоплением в объеме металла различных повреждений, вносимых действующими /newpage напряжениями и агрессивной средой [1,3]. Процесс накопления поврежденности, происходящий в результате воздействия агрессивной среды

[1] Астафьев Владимир Иванович.Кафедра механики сплошной среды Самарского государственного университета

[2] Ширяева Людмила Константиновна. Кафедра информатики и вычислительной математики Самарского государственного университета

Рис.1. Геометрия упруго-пластической трещины

и деформирования, будем описывать с помощью безразмерного параметра поврежденности ω. Кинетическое уравнение для параметра поврежденности ω возьмем в виде [4]:

$$\frac{d\omega}{dt} = A\ |\omega_* - \omega|^m \tag{1.1}$$

где A, m – коррозионные параметры материала, определяемые экспериментально, ω_*– предельное значение поврежденности, выше которой его величина при данных условиях испытаний не накапливается. В качестве простейшей аппроксимации для величины $\omega_*(\sigma_{ij})$ возьмем кусочно–линейную функцию в виде [4]:

$$\omega_* = \begin{cases} \alpha\sigma_0 + \beta, & \sigma_0 > 0 \\ \beta, & \sigma_0 \leq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

где $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ коррозионные параметры материала, определяемые из эксперимента; $\sigma_0 = \sigma_{kk}$– первый инвариант тензора напряжений.

Будем считать материал, в котором расположена трещина, идеальным упруго–пластическим и охрупчивающимся под действием агрессивной среды. Условие пластичности Мизеса для охрупчивающегося материала можно модифицировать следующим образом [4]:

$$\sigma_e = \sigma_*(\omega) \tag{1.3}$$

где $\sigma_e = \sqrt{3/2\, s_{ij}s_{ij}}$ – интенсивность напряжений; $s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_0\delta_{ij}$ –компоненты девиатора тензора напряжений; $\sigma_*(\omega)$ – предел текучести материала, меняющийся под действием агрессивной среды и деформирования.

Допустим, что пластина находится в условиях плоского напряженного состояния $(\sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0)$.

В этом случае можно найти приближенное решение задачи в постановке, аналогичной постановке Дагдейла для задачи о сквозной трещине, расположенной в идеальном упруго–пластическом материале. Будем считать, что гипотеза Дагдейла остается справедливой и для упруго–пластического материала, охрупчивающегося под действием водородсодержащей среды, т.е. пластическая зона располагается перед вершиной трещины и представляет собой отрезок нулевой толщины [5]. По гипотезе Дагдейла пластическая зона является линией разрыва упругого смещения, так что решение задачи в такой постановке можно искать в классе разрывных решений теории упругости [6].

С помощью основных представлений плоской задачи теории упругости напряженно–деформированное состояние в материале, содержащем трещину нормального отрыва, выражается через потенциал Колосова–Мусхелишвили $\Phi(Z)$ следующим образом [6,7]:

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(Z) + \overline{\Phi(Z)}] \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\sigma_{xy} = -4iY\Phi'(Z) \\ 2\mu(U_x + iU_y) = \chi \int \Phi(Z)\,dZ - Z\overline{\Phi(Z)} + \overline{\int Z\Phi'(Z)\,dZ} \end{cases} \tag{1.4}$$

здесь μ–модуль сдвига;

U_x и U_y– горизонтальная и вертикальная компоненты упругого смещения;

$Z = X + iY$– комплексная переменная;

коэффициент χ в случае плоского напряженного состояния вычисляется как $\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$;

ν– коэффициент Пуассона.

Тогда на основании условия пластичности (1.3), основных представлений плоской задачи теории упругости (1.4) и гипотезы Дагдейла, краевая задача для определения потенциала $\Phi(Z)$ примет вид:

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = 0, & \text{при}\, Y = 0 \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_*, & \text{при}\, Y = 0, 0 \le X \le D \\ U_y = 0, & \text{при}\, Y = 0, X > D \\ \sigma_y = 0, & \text{при}\, Y = 0, X < 0 \end{cases}$$

где D–координата границы пластической и упругой зон.

Общее представление решения этой неоднородной краевой задачи известно [6]:

$$\Phi(Z) = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi(Z-D)}}\left[1 - \frac{1}{K_I}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^D \sigma_* \frac{\sqrt{D-\rho}}{Z-\rho}\,d\rho\right] \tag{1.5}$$

Из зависимости (1.4) напряженное состояние перед вершиной трещины определяется как

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y, & при\ Y = 0, X \ge 0 \\ \sigma_{xy} = 0, & при\ Y = 0, X \ge 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Тогда распределение нормального напряжения σ_y перед вершиной трещины с учетом зависимостей (1.5)–(1.6) примет вид:

$$\sigma_y|_{Y=0} = \begin{cases} \sigma_*, & при\, 0 \le X \le D \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(Z-D)}} \left[1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{K_I} \int_0^D \sigma_* \frac{\sqrt{D-\rho}}{X-\rho}\, d\rho\right], & при\, X > D \end{cases} \tag{1.7}$$

В качестве критерия локального разрушения примем концепцию Леонова и Панасюка: в момент локального разрушения на некотором участке на продолжении трещины номальное напряжение σ_y и раскрытие трещины $V = 2[U_y]$ в ее вершине достигают некоторых критических значений, являющихся постоянными иатериала [8]. Таким образом, в момент разрушения в конце трещины выполняются два условия: условие пластичности (1.3) для σ_y и условие критического раскрытия трещины в ее вершине:

$$V = V_* \tag{1.8}$$

Чтобы учесть охрупчивающее влияние водорода на материал, проявляющееся в уменьшении прочности и пластичности материала, примем, что не только предел текучести материала σ_*, но и величина критического раскрытия трещины V_* является величиной, меняющейся в процессе наводороживания. В качестве простейших аппроксимаций для величин $\sigma_* = \sigma_*(\omega)$ и $V_* = V_*(\omega)$ возьмем линейные аппроксимации в виде [4]:

$$\sigma_* = \sigma_*^0(1 - k\omega) \tag{1.9}$$

$$V_* = V_*^0(1 - \omega) \tag{1.10}$$

где σ_*^0,V_*^0 –предел текучести материала и критическая величина раскрытия трещины в исходном (ненаводороженном) состоянии соответственно; k–параметр материала, отражающий влияние наводороживания на прочностные свойства материала.

Скачок нормального смещения V в пластической зоне $(0 \le X \le D)$ и раскрытие трещины при $X < 0$ при известном потенциале $\Phi(Z)$ может быть вычислено из (1.4) следующим образом:

$$V(X) = \frac{8}{E} Im[\int \Phi(Z)\, dZ]|_{(Y=0,\, X \le D)} \tag{1.11}$$

где

$$\int \Phi(Z) dZ = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \left[\sqrt{Z-D} + \frac{2\sigma_*^0}{K_I} \sqrt{\frac{2}{\pi}} i \int_0^D (1 - k\omega(\rho,\tau)) ln \frac{\sqrt{D-Z} - \sqrt{D-\rho}}{\sqrt{D-Z} + \sqrt{D-\rho}}\, d\rho\right]$$

2 Моделирование развития трещины

Предположим, что в момент начала воздействия агрессивной среды $t = 0$ поврежденность материала пластины была нулевой. В результате охрупчивающего влияния водородсодержащей среды на материал при $t > 0$ происходит накопление поврежденности в материале, изменение его прочностных и пластических свойств.

В начальный момент времени размер пластической зоны $D_0 = D(t)|_{(t=0)}$ и величина раскрытия трещины в ее вершине $V_0 = V(X,t)|_{(X=0,t=0)}$ определяются из решения упруго–пластической задачи Дагдейла [6]:

$$D_0 = \frac{\pi {K_I^0}^2}{8{\sigma_*^0}^2} \tag{2.1}$$

$$V_0 = \frac{{K_I^0}^2}{E\sigma_*^0} \tag{2.2}$$

где $K_I^0 = K_I(t)|_{(t=0)}$–начальное значение коэффициента интенсивности напряжений.

Будем исследовать развитие трещины в материале для двух вариантов нагружения. Для первого варианта нагружения величина коэффициента интенсивности напряжений не меняется с течением времени, т.е.

$$K_I = K_I^0 < K_{Ic} \tag{2.3}$$

где K_{Ic}–вязкость разрушения.

Второй вариант нагружения будет характеризоваться тем, что раскрытие трещины в точке $X = 0$ всегда остается постоянным. В этом случае величина раскрытия трещины при $X = 0$ удовлетворяет условию:

$$V(X,t)|_{(X=0)} = V_0 < V_*^0, \tag{2.4}$$

а величина K_I меняется с течением времени,т.е. $K_I = K_I(t)$ и $K_I(t)|_{(t=0)} = K_I^0$.

Из соотношений (1.8)–(2.2) следует, что для рассматриваемой модели Леонова–Панасюка–Дагдейла величина вязкости разрушения K_{Ic} связана с критической величиной раскрытия трещины в ее вершине V_*^0 следующим соотношением:

$$K_{Ic} = \sqrt{V_*^0 E\sigma_*^0}. \tag{2.5}$$

2.1. Вариант 1.

Запишем определяющие соотношения, описывающие накопление поврежденности, расширение пластической зоны и развитие трещины в охрупчивающемся материале в случае выполнения условия (2.3).

Вводя безразмерные переменные

$$x = X/D_0,\ y = Y/D_0,\ z = Z/D_0,\ \tau = At,\ d = D/D_0 \tag{2.6}$$

распределение нормального напряжения перед вершиной трещины с учетом зависимостей (1.7),(2.3) можно представить в виде:

$$\sigma_y = \begin{cases} \sigma_*^0(1 - k\omega(x,\tau)), & \text{при } 0 \le x \le d(\tau) \\ \frac{2\sigma_*^0}{\pi\sqrt{x-d}}\left[1 - \frac{1}{2}\int_0^{d(\tau)} (1 - k\omega(\xi,\tau))\frac{\sqrt{d-\xi}}{x-\xi}d\xi\right], & \text{при } x > d(\tau) \end{cases} \tag{2.7}$$

Неизвестную функцию $d(\tau)$ можно найти из условия непрерывности нормального напряжения $\sigma_y(x,\tau)$ в точке $x = d(\tau)$, которое с учетом зависимости (2.7) можно записать в виде:

$$\lim_{x\to d+0} \frac{2\sigma_*^0}{\pi\sqrt{x-d}}[1 - \frac{1}{2}\int_0^{d(\tau)} (1 - k\omega(\xi,\tau))\frac{\sqrt{d-\xi}}{x-\xi}\,d\xi] = \sigma_*^0(1 - k\omega(d,\tau))$$

Легко показать, что для выполнения последнего равенства достаточно требования неопределенности вида $\frac{0}{0}$ под знаком предела. Следовательно, условие непрерывности σ_y можно переписать в виде:

$$\int_0^d \frac{(1-k\omega(\xi,\tau))}{\sqrt{d-\xi}}\,d\xi = 2 \tag{2.8}$$

Величина поврежденности $\omega(x,\tau)$ перед вершиной трещины является решением уравнения (1.1), которое с учетом замены переменных (2.6) можно переписать в виде:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = |\omega_* - \omega|^m \tag{2.9}$$

где

$$\omega_* = 2\alpha\sigma_y(x,\tau) + \beta \tag{2.10}$$

Трещина начинает развиваться, как только в некоторый конечный момент времени $\tau = \tau_* < \infty$ в вершине трещины впервые выполнится критерий локального разрушения (1.8). Для данного варианта нагружения из зависимости (1.11) следует, что в момент времени $\tau = \tau_*$ критерий разрушения (1.8) принимает вид:

$$2\sqrt{d_*} + \frac{1}{2}\int_0^{d_*}(1-k\omega(\xi,\tau_*))ln\frac{\sqrt{d_*}-\sqrt{d_*-\xi}}{\sqrt{d_*}+\sqrt{d_*-\xi}}\,d\xi = \frac{v_*^0}{v_0}(1-\omega(0,\tau_*)) \tag{2.11}$$

где $d_* = d(\tau_*)$–величина пластической зоны в момент страгивания трещины;

$v_0 = v|_{(x=0,\tau=0)} = V_0/d_0$–безразмерное начальное раскрытие трещины;

$v_*^0 = V_*^0/d_0$–безразмерное критическое раскрытие трещины.

Запишем определяющие соотношения, описывающие рост трещины при $\tau > \tau_*$. К моменту времени τ трещина проросла до некоторой точки $x = l(\tau) > 0$, и перед вершиной проросшей трещины по-прежнему имеются две зоны: пластическая зона $(l(\tau) < x \le d(\tau))$ и зона упругости $x > d(\tau)$. Потенциал Колосова–Мусхелишвили для времен $\tau > \tau_*$ вычисляется как

$$\Phi(z) = \frac{\sigma_*^0}{\pi\sqrt{z-d}}\left[1 - \frac{1}{2}\int_l^d (1-k\omega(\xi,\tau))\frac{\sqrt{d-\xi}}{z-\xi}\,d\xi\right] \tag{2.12}$$

Тогда распределение нормального напряжения $\sigma_y(x,\tau)$ на прямой $y=0$ в случае распространяющейся трещины примет вид:

$$\sigma_y(x,\tau) = \begin{cases} 0, & \text{при}\, x < l \\ \sigma_*^0(1-k\omega(x,\tau)), & \text{при}\, l \le x \le d \\ \frac{2\sigma_*^0}{\pi\sqrt{x-d}}\left[1 - \frac{1}{2}\int_l^d (1-k\omega(\xi,\tau))\frac{\sqrt{d-\xi}}{x-\xi}d\xi\right], & \text{при}\, x > d \end{cases} \tag{2.13}$$

При этом нормальное напряжение $\sigma_y(x,\tau)$ на границе раздела зон в точке $x = d(\tau)$ непрерывно, т.е. выполняется условие:

$$\int_l^d \frac{(1-k\omega(\xi,\tau))}{\sqrt{d-\xi}}\,d\xi = 2 \tag{2.14}$$

В вершине движущейся трещины, в точке $x = l(\tau)$, выполняется критерий локального разрушения (1.8), который с учетом (1.11) при известном потенциале $\Phi(z)$ можно переписать в виде:

$$2\sqrt{d-l} + \frac{1}{2}\int_l^d (1-k\omega(\xi,\tau)) ln \frac{\sqrt{d-l}-\sqrt{d-\xi}}{\sqrt{d-l}+\sqrt{d-\xi}}\, d\xi = \frac{v_*^0}{v_0}(1-\omega(l,\tau)) \qquad (2.15)$$

В результате, для нахождения трех неизвестных функций: $l(\tau)$,$d(\tau)$ и $\omega(x,\tau)$ получена система интегро–дифференциальных уравнений (2.9), (2.14) и (2.15). Эта система уравнений решалась численно с постоянным временным шагом для времен $\tau > \tau_*$. При этом момент времени $\tau = \tau_*$, размер пластической зоны $d_* = d(\tau_*)$ и величина поврежденности $\omega(x,\tau_*)$ перед вершиной трещины были найдены в результате численного интегрирования системы уравнений (2.8)–(2.10).

2.2. Вариант 2.

Запишем определяющие соотношения, описывающие накопление поврежденности, расширение пластической зоны и движение трещины в охрупчивающемся материале в случае выполнения условия (2.4). С учетом соотношений (1.7),(2.1),(2.4),(2.6) распределение нормального напряжения σ_y перед вершиной неподвижной трещины можно представить в виде:

$$\sigma_y(x,\tau) = \begin{cases} \sigma_*^0(1-k\omega(x,\tau)), & \text{при } 0 \le x \le d(\tau) \\ \frac{2\sigma_*^0}{\pi\sqrt{x-d}}\left[S(\tau) - \frac{1}{2}\int_0^d (1-k\omega)\frac{\sqrt{d-\xi}}{x-\xi}d\xi\right], & \text{при } x > d(\tau) \end{cases} \qquad (2.16)$$

где $S(\tau) = K_I(\tau)/K_I^0$.

Неизвестную функцию $d(\tau)$ можно найти из условия непрерывности нормального напряжения σ_y в точке $x = d(\tau)$, которое можно записать в виде:

$$\int_0^d \frac{(1-k\omega(\xi,\tau))}{\sqrt{d-\xi}}\, d\xi = 2S(\tau) \qquad (2.17)$$

При этом величина $S(\tau)$ может быть найдена из условия (2.4), которое с учетом соотношений (1.11),(2.1) можно записать в виде:

$$2\sqrt{d}S - d(1-k\omega(0,\tau)) + \frac{1}{2}\int_0^d (1-k\omega(\xi,\tau)) ln \frac{\sqrt{d}-\sqrt{d-\xi}}{\sqrt{d}+\sqrt{d-\xi}}\, d\xi = 1 \qquad (2.18)$$

Величину поврежденности $\omega(x,\tau)$ можно найти численным интегрированием кинетического уравнения накопления поврежденности (2.9) с учетом зависимости (2.16) для нормального напряжения $\sigma_y(x,\tau)$. Интегральные уравнения (2.16)–(2.18) описывают изменение напряженного состояния перед вершиной трещины для тех времен $0 \le \tau \le \tau_*$, когда трещина остается неподвижной.

Трещина начинает развиваться,как только в некоторый конечный момент времени $0 < \tau_* < \infty$ в вершине трещины впервые выполнится критерий локального разрушения (1.8). Для данного варианта нагружения интегрирование кинетического уравнения накопления поврежденности (2.9) в первоначальной пластической зоне $(0 \le x \le 1)$ вместе с критерием локального разрушения (1.8) позволяет вычислить момент страгивания трещины τ_*:

$$\tau_* = \frac{(\omega_\infty)^{1-m} - (\omega_\infty - \omega_f)^{1-m}}{(1-m)(1+2k\alpha\sigma_*^0)^m}$$

, где $\omega_\infty = (2k\alpha\sigma_*^0 + \beta)/(1+2k\alpha\sigma_*^0)$ и $\omega_f = 1 - v_0/v_*^0$.

Запишем определяющие соотношения, описывающие рост трещины для времен $\tau \geq \tau_*$. К этому моменту времени трещина проросла до некоторой точки $x = l(\tau)$. Перед вершиной проросшей трещины по–прежнему имеются две зоны: пластическая зона $(l(\tau) \leq x \leq d(\tau))$ и зона упругости $(x > d(\tau))$. Потенциал Колосова–Мусхелишвили для времен $\tau \geq \tau_*$ принимает вид:

$$\Phi(z) = \frac{\sigma_*^0}{\pi\sqrt{z-d}}\left[S(\tau) - \frac{1}{2}\int_{l(\tau)}^{d(\tau)}(1-k\omega(\xi,\tau))\frac{\sqrt{d-\xi}}{z-\xi}\,d\xi\right] \tag{2.19}$$

Распределение нормального напряжения σ_y на прямой $y = 0$ в случае распространяющейся трещины вычислится как

$$\sigma_y(x,\tau) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < l(\tau) \\ \sigma_*^0(1-k\omega(x,\tau)), & \text{при } l \leq x \leq d \\ \frac{2\sigma_*^0}{\pi\sqrt{x-d}}\left[S(\tau) - \frac{1}{2}\int_l^d(1-k\omega(\xi,\tau))\frac{\sqrt{d-\xi}}{x-\xi}d\xi\right], & \text{при } x > d \end{cases} \tag{2.20}$$

При этом скачок нормального смещения $v(x,\tau)$ при $x \leq d(\tau)$ с учетом (1.11),(2.19) вычисляется следующим образом:

$$\frac{v(x,\tau)}{v_0} = 2\sqrt{d-x}S + \frac{1}{2}\int_l^d(1-k\omega(\xi,\tau))ln\frac{|\sqrt{d-x}-\sqrt{d-\xi}|}{\sqrt{d-x}+\sqrt{d-\xi}}\,d\xi, \tag{2.21}$$

Тогда условие локального разрушения (1.8) с учетом соотношения (2.21) принимает вид:

$$2\sqrt{d-l}S + \frac{1}{2}\int_l^d(1-k\omega)ln\frac{\sqrt{d-l)}-\sqrt{d-\xi}}{\sqrt{d-l}+\sqrt{d-\xi}}\,d\xi = \frac{v_*^0}{v_0}(1-\omega(l,\tau)) \tag{2.22}$$

При этом в точке $x = 0$ выполняется условие (2.4), которое с учетом (2.21) можно переписать в виде:

$$2\sqrt{d(\tau)}S(\tau) + \frac{1}{2}\int_l^d(1-k\omega(\xi,\tau))ln\frac{\sqrt{d}-\sqrt{d-\xi}}{\sqrt{d}+\sqrt{d-\xi}}\,d\xi = 1 \tag{2.23}$$

Неизвестную функцию $S(\tau)$ найдем из условия непрерывности нормального напряжения σ_y в точке $x = d(\tau)$:

$$\int_l^d \frac{(1-k\omega(\xi,\tau))}{\sqrt{d-\xi}}\,d\xi = 2S(\tau) \tag{2.24}$$

В результате, для нахождения четырех неизвестных функций: $l(\tau)$, $d(\tau)$,$S(\tau)$ и $\omega(x,\tau)$ получена система интегро–дифференциальных уравнений (2.9), (2.22)–(2.24). Эта система уравнений решалась численно с постоянным временным шагом для времен $\tau > \tau_*$. При этом момент времени $\tau = \tau_*$, величина $S_* = S(\tau_*)$, размер пластической зоны $d_* = d(\tau_*)$ и величина поврежденности $\omega(x,\tau_*)$ перед вершиной трещины были найдены в результате численного интегрирования системы уравнений (2.8),(2.17)–(2.18).

3 Стационарное состояние и условия его существования

Найдем при каких условиях возможно существование стационарного состояния. Предположим, что в зависимости от величин внешних параметров задачи(начального коэффициента интенсивности напряжений K_I^0 и начального раскрытия трещины v_0), величин упруго-пластических и коррозионных параметров модели при $\tau \to \infty$ может быть реализовано два варианта поведения трещины:

1)трещина оставалась неподвижной, перед ее вершиной имеются две зоны– зона пластического течения и зона упругости (стационарное решение задачи вида P–E);

2)с течением времени происходило движение трещины, такое, что при $\tau \to \infty$ трещина распространилась вглубь пластической зоны на некоторое конечное расстояние; при этом перед вершиной продвинувшейся трещины по–прежнему имеются две зоны–зона пластического течения и зона упругости (стационарное решение задачи вида F–P–E).

3.1. Стационарное решение задачи вида P–E для случая $K_I = Const$.

В этом случае не произойдет разрушения ни в одной из точек пластической зоны. Следовательно, в любой момент времени величина раскрытия трещины в ее конце при $x = 0$ будет меньше критической величины раскрытия трещины, т.е.

$$v_0[2\sqrt{d} + \frac{1}{2}\int_0^d (1 - k\omega(\xi,\tau))ln\frac{\sqrt{d}-\sqrt{d-\xi}}{\sqrt{d}+\sqrt{d-\xi}}d\xi] < v_*^0(1-\omega(0,\tau)) \tag{3.1}$$

Осуществляя предельный переход в неравенстве (3.1),получаем

$$\lim_{\tau\to\infty} v(0,\tau) \le v_*^0(1 - \lim_{\tau\to\infty}\omega(0,\tau)) \tag{3.2}$$

Условие (3.2) является необходимым условием существования стационарного решения задачи в этом случае.Таким образом,если в любой момент времени справедливо условие (3.1),то трещина останется неподвижной,и перед ее вершиной при $\tau \to \infty$ будут лежать две зоны: пластическая зона $(0 \le x \le d_\infty)$ и зона упругости $(x > d_\infty)$. Поскольку при $\tau \to \infty$ скорость накопления поврежденности $\frac{\partial\omega}{\partial\tau} \to 0$, то из (1.1)–(1.3) можно найти величину поврежденности перед вершиной трещины в стационарном случае:

$$\omega(x) = \omega_*(x) = \begin{cases} \omega_\infty = \frac{2\alpha\sigma_*^0+\beta}{1+k\alpha\sigma_*^0}, & \text{при } 0 \le x \le d_\infty \\ 2\alpha\sigma_y(x)+\beta, & \text{при } x > d_\infty \end{cases} \tag{3.3}$$

При этом из (2.7) напряжение $\sigma_y(x) = \lim\limits_{\tau\to\infty}\sigma_y(x,\tau)$ определяется следующим образом:

$$\sigma_y(x) = \begin{cases} \sigma_*^0(1-k\omega_\infty), & \text{при } 0 \le x \le d_\infty \\ \frac{2\sigma_*^0(1-k\omega_\infty)}{\pi\sqrt{x-d_\infty}}\Big[\frac{1}{1-k\omega_\infty} - \sqrt{d_\infty}(1-\frac{\sqrt{x-d_\infty}}{\sqrt{d_\infty}}\times \\ \times arctg\sqrt{\frac{d_\infty}{x-d_\infty}})\Big], & \text{при } x > d_\infty \end{cases} \tag{3.4}$$

Размер зоны пластического течения d_∞ находим из условия напрерывности нормального напряжения σ_y в точке $x = d_\infty$: