ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ЛАУРИЧЕЛЛЫ К РЕШЕНИЮ ОДНОГО МНОГОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Х.А.Чиханов[1]

Получено фундаментальное решение уравнения $LU \equiv (x+y+z)U_{xyz}+lU_{yz}+mU_{zx}+nU_{xy}=0$ при произвольных значениях параметров и его многомерного аналога;найдено решение задачи Гурса. При построении решений используется функция Лауричеллы F_A .

В статье рассматривается уравнение

$$LU \equiv (x+y+z)U_{xyz}+lU_{yz}+mU_{zx}+nU_{xy}=0, \tag{1}$$

частные случаи которого изучались в ряде работ (см.библ. в [2]). При произвольных значениях параметров решение уравнения (1) до настоящей работы не было известно.

1 Фундаментальное решение.

Пусть $E(x,y,z)$ -фундаментальное решение уравнения (1) в пространстве обобщенных фуункций $D'(R^3)$([1],с.21), исчезающее вне октанта $G_+(x>x_0, y>y_0, z>z_0)$, а $\hat{E}(\xi,\eta,\zeta)$ - его преобразование Фурье. Тогда функция $V=\xi\eta\zeta\hat{E}$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_\xi+\partial_\eta+\partial_\zeta)V-\left(\frac{l}{\xi}+\frac{m}{\eta}+\frac{n}{\zeta}\right)V=e^{i(\xi x_0+\eta y_0+\zeta z_0)} \tag{2}$$

Решение уравнения (2) необходимо искать в классе функций,голоморфных по ξ,η,ζ при $Im\xi>0, Im\eta>0, Im\zeta>0$, соответственно. Оно имеет вид

$$V=-i\int\limits_0^\infty\left(\frac{\xi}{\xi+is}\right)^l\left(\frac{\eta}{\eta+is}\right)^m\left(\frac{\zeta}{\zeta+is}\right)^n *$$

$$*exp[i(\xi x_0+\eta y_0+\zeta z_0)-(x_0+y_0+z_0)s]ds, \tag{3}$$

Последний интеграл сходится при $l+m+n>1$. Ветвь функции $(\xi/(\xi+is))^l$ определена в плоскости с разрезом по $[0,-is]$ и принимает значение 1 при $\xi\to+\infty+$

---

[1] Чиханов Хамит Александрович, Кафедра математической физики Самарского государственного университета

$i0$. Аналогично определяются ветви двух других функций в (3). Отметим теперь формулу для обратного преобразования Фурье

$$F^{-1}_{\xi\to x}\left[\frac{1}{\xi}\left(\frac{\xi}{\xi+is}\right)^l\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\xi}{\xi+is}\right)^l exp(-ix\xi)\frac{d\xi}{\xi}=$$

$$=-i\,{}_1F_1(l,1,-xs)\theta(x), \tag{4}$$

которая несложно проверяется (с использованием леммы Жордана и стягиванием контура на разрез). Таким образом фундаментальное решение имеет вид

$$E(x,y,z)=\theta(x-x_0)\theta(y-y_0)\theta(z-z_0)\int\limits_0^{+\infty}exp[-(x_0+y_0+z_0)s]*$$

$$*{}_1F_1(l,1,(x_0-x)s){}_1F_1(m,1,(y_0-y)s){}_1F_1(n,1,(z_0-z)s)ds, \tag{5}$$

где $\theta(x)$ - функция Хевисайда,принимающая значения 1 при $x>0$ и 0 при $x<0$. Нетрудно проверить,что уравнение (1) выполняется, если использовать тождество

$$L\omega=-\frac{1}{(x-x_0)(y-y_0)(z-z_0)}\frac{d}{ds}(s^3\omega), \tag{6}$$

где ω - подинтегральная функция.

2 Задача Гурса.

Рассмотрим теперь решение задачи Гурса для октанта $R^3_+(x,y,z\geq 0)$. Пусть $U(x,y,z)$ - обобщенное решение уравнения (1), исчезающее вне октанта R^3_+ и удовлетворяющее краевым условиям $U(x,y,+0)=\tau(x,y), U(x,+0,z)=0, U(+0,y,z)=0$; предполагается,что U не имеет разрывов производных на плоскостях $y=0$ и $z=0$, Тогда поставленная краевая задача Гурса сводится к следующему уравнению в пространстве обобщенных функций:

$$LU=f\equiv\delta(z)[(x+y+z)\tau_{xy}+l\tau_x+m\tau_y] \tag{7}$$

Применяя преобразование Фурье, получим для функции $V=\xi\eta\zeta\hat{U}$ (здесь $\hat{U}=FU$) уравнение

$$(\partial_\xi+\partial_\eta+\partial_\zeta)V-\left(\frac{l}{\xi}+\frac{m}{\eta}+\frac{n}{\zeta}\right)V=\hat{f}\equiv Ff \tag{8}$$

Решение его имеет вид

$$V=\xi^l\eta^m\zeta^n(\partial_\xi+\partial_\eta)\int\limits_0^{+\infty}\frac{\hat{\tau}(\xi+is,\eta+is)}{(\xi+is)^{l-1}(\eta+is)^{m-1}}\frac{ds}{(\zeta+is)^n}, \tag{9}$$

где $\hat{\tau}(\xi,\eta)=F_{x\to\xi,y\to\eta}\tau(x,y)$ есть преобразование Фурье по переменным x и y . Теперь $\hat{U}$ можно записать в виде

$$\hat{U}=\int\limits_0^{+\infty}\left[(\partial_\xi+\partial_\eta)\Omega+(1-l)\frac{\Omega}{\xi}+(1-m)\frac{\Omega}{\eta}\right]\frac{ds}{\zeta+is}, \tag{10}$$

где

$$\Omega=\left(\frac{\xi}{\xi+is}\right)^{l-1}\left(\frac{\eta}{\eta+is}\right)^{m-1}\left(\frac{\zeta}{\zeta+is}\right)^{n-1}\hat{\tau}(\xi+is,\eta+is) \tag{11}$$

Используя формулу (4), а также формулу

$$F^{-1}_{\xi\to x}\left(\frac{\xi}{\xi+is}\right)^{l-1}=(1-l)s_1F_1(l,2,-xs), \tag{12}$$

получим решение Гурса в виде

$$U(x,y,z)=(1-l)(1-m)\int\limits_0^x\int\limits_0^y\tau(p,q)dpdq\int\limits_0^{+\infty}e^{-(p+q)s}K(p,q,x,y,z,s)ds, \tag{13}$$

где

$$K(p,q,x,y,z,s)=s_1F_1(n,1,-zs)[(x+y)s_1F_1(l,2,(p-x)s)_1F_1(m,2,(q-y)s)-$$

$$-_1F_1(l-1,1,(p-x)s)_1F_1(m,2,(q-y)s)-_1F_1(l,2,(p-x)s)_1F_1(m-1,1,(q-y)s)] \tag{14}$$

Отметим здесь аналогичное тождество

$$e^{-(p+q)s}LK=\frac{d}{ds}\left[-e^{-(p+q)s}[(p+q)s^5\dot{X}_2\dot{Y}_2\dot{Z}- -s^4(\dot{X}_2\dot{Y}_1+\dot{X}_1\dot{Y}_2)\dot{Z}]/[(x-p)(y-q)z]\right], \tag{15}$$

где X_j,Y_j,Z -соответствующие ряды ${}_1F_1$, а точка означает дифференцирование по s. Представление (13) не очень удобно для использования, так как в нем плохо просматривается выполнение краевого условия при $z=0$. Поэтому мы преобразуем (10) иначе. Заметим,что обратное преобразование Фурье по одной переменной ζ можно записать в виде

$$F^{-1}_{\zeta\to z}\hat{U}=-i\xi^{l-1}\eta^{m-1}(\partial_\xi+\partial_\eta)\int\limits_0^{+\infty}\frac{\hat{\tau}(\xi+is,\eta+is)_1F_1(n,1,-zs)ds}{(\xi+is)^{l-1}(\eta+is)^{m-1}}=$$

$$=-\xi^{l-1}\eta^{m-1}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d}{ds}\left[\frac{\hat{\tau}(\xi+is,\eta+is)}{(\xi+is)^{l-1}(\eta+is)^{m-1}}\right]{}_1F_1(n,1,-zs)ds=$$

$$\hat{\tau}(\xi,\eta)-nz\xi^{l-1}\eta^{m-1}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\hat{\tau}(\xi+is,\eta+is)}{(\xi+is)^{l-1}(\eta+is)^{m-1}}{}_1F_1(n+1,2,-zs)ds \tag{16}$$

Применяя обратное преобразование Фурье по x и y , получим решение задачи Гурса в виде

$$U(x,y,z)=\tau(x,y)-(1-l)(1-m)nz\int\limits_0^x\int\limits_0^y\tau(x-p,y-q)H(p,q,x,y,z)dpdq, \tag{17}$$

где

$$H(p,q,x,y,z)=\int\limits_0^{\infty}s^2e_1^{-(x+y)s}F_1(2-l,2,ps)_1F_1(2-m,2,qs)_1F_1(n+1,2,-zs)ds=$$

$$= \frac{1}{(x+y)^3} F_A \left(\begin{array}{cccc} 3; & 2-l, & 2-m, & n+1 \\ & 2, & 2, & 2 \end{array} \middle| \frac{p}{x+y}, \frac{q}{x+y}, -\frac{z}{x+y} \right) \qquad (18)$$

Ряд Лауричеллы F_A , входящий в формулу (18), является обобщением ряда Куммера F_2 ; он сходится при $|p|+|q|+|z|<|x+y|$. Фундаментальное решение (5) также можно выразить через F_A :

$$E(x,y,z) = \frac{\theta(x-x_0)\theta(y-y_0)\theta(z-z_0)}{x+y+z} *$$

$$* F_A \left(\begin{array}{cccc} 1; & 1-l, & 1-m, & 1-n \\ & 1, & 1, & 1 \end{array} \middle| \frac{x-x_0}{x+y+z}, \frac{y-y_0}{x+y+z}, \frac{z-z_0}{x+y+z} \right) \qquad (19)$$

В связи с вышеизложенным интересно заметить,что фундаментальное решение многомерного эллиптического уравнения

$$\Delta U + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\lambda}{x_k} U_{x_k} = 0 \qquad (20)$$

также выражается через ряд F_A [3]. Вернемся к задаче Гурса для уравнения (1). Представления (13) и (17) дают нулевые значения на плоскостях $y=0$ и $z=0$. Полное решение задачи Гурса состоит из трех слагаемых: представления (13)-(17) и аналогичных выражений,получаемых круговой перестановкой $x \to y \to z \to x, l \to m \to n \to l, \tau(x,y) \to \tau_1(y,z) \to \tau_2(z,x)$.

3 Функция Римана.

Сопряженное по Лагранжу уравнение имеет вид

$$-[(x+y+z)U]_{xyz} + lU_{yz} + mU_{zx} + nU_{xy} = 0 \qquad (21)$$

Следовательно,функция Римана получается из фундаментального решения (5)-(19) заменой $l \to 1-l, m \to 1-m, n \to 1-n$. Также возможна замена $x \leftrightarrow x_0, y \leftrightarrow y_0, z \leftrightarrow z_0$

4 Многомерный аналог.

Фундаментальное решение уравнения

$$(\sum_1^n x_j) U_{x_1,\ldots,x_n} + \sum_1^n l_j U_{x_1,\ldots,\hat{x}_j,\ldots,x_n} = 0 \qquad (22)$$

($\hat{x}_j$ означает отсутствие дифференцирования по x_j) имеет вид:

$$E_n = \prod_1^n \theta(x_k - x_k^0) \int_0^{+\infty} e^{-s\sum x_k^0} \prod_1^n {}_1F_1(l_k, 1, (x_k - x_k^0)s) ds \qquad (23)$$

Литература

[1] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

[2] Волкодавов В.Ф.,Захаров В.Н. Таблицы функций Римана и Римана- Адамара для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерных евклидовых пространствах. Самара: Изд.Сампедуниверситета, 1994.

[3] Чиханов Х.А. Матричные ряды Лауричеллы и краевые задачи для вырождающихся эллиптических систем. // Сиб.матем.журн. 1985. Т.26, N5. С. 182-189.

LAURICHELLA SERIES APPLICATION TO SOLVING ONE MANY-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION

Ch.A. Chikhanov[1]

It is build a fundamental solution for the equation $LU \equiv (x+y+z)U_{xyz} + lU_{yz} + mU_{zx} + nU_{xy} = 0$ and for its many dimensional analog. The Gursa problem was solved. The Laurichella series F_A was used in this paper.

[1]Chikhanov Chamit Alexandrovich, Dept. of Mathematatik Samara State University