ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ

О.П.Филатов[1]

Получены необходимые и достаточные условия, позволяющие сводить зада чу вычисления предела максимального среднего к более простой. Приводятся примеры.

Постановка исходной задачи связана с построением аппроксимирующих диф ференциальных включений в проблемах усреднения.

1 Постановка задачи и обозначения

Построение аппроксимирующих дифференциальных включений основано на вычислениях или оценках усредненных опорных функций [1, 2, 3].

Напомним, что в евклидовом пространстве R^m со скалярным произведением $<\cdot,\cdot>$ опорная функция ограниченного множества $A \subset R^m$ в направлении вектора $\psi \in R^m$ определяется равенством

$$c(A,\psi) = \sup_{a\in A} < a, \psi > .$$

По опорной функции однозначно восстанавливается само множество A, при условии, что оно замкнуто и выпукло. Таким образом, при работе с многозначными отображениями опорные функции позволяют эффективно описывать соответствующие множества. В частности, аппарат опорных функций удобен для конструктивного построения аппроксимирующих дифференциальных включений в задачах усреднения, при этом, фактически, приходится вычислять пределы максимальных средних. В общем случае трудно дать какие–либо рецепты по решению таких задач. Но в простейших ситуациях, имеющих, тем не менее, практический интерес, можно предложить конструктивные методы решения подобных проблем.

В данном разделе приводится одна из задач такого рода, которая в частном случае была решена в [3]. Основной результат работы— Теорема 3.1.

Переходим теперь к постановке задачи.

Расмотрим предел максимального среднего вида

$$M_f(\omega_1,\omega_2) \equiv \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\Delta} f(\gamma(t))\,dt, \qquad (1)$$

[1]Филатов Олег Павлович. Кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета

где функция $f : R \to R$ предполагается локально интегрируемой по Лебегу, а точная верхняя граница средних вычисляется по всем решениям γ дифференциального включения

$$d\gamma/dt \in [\omega_1, \omega_2], \quad \gamma(0) = \gamma_0. \tag{2}$$

Здесь постоянные ω_1, ω_2 удовлетворяют неравенствам $0 < \omega_1 \le \omega_2$. Кроме того, предполагаем, что функция f имеет нулевое среднее,

$$\lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int\limits_0^{\Delta} f(\gamma_0 + t)\, dt = 0. \tag{3}$$

По поводу ограничения на скорости ω_1, ω_2 сразу же внесем разъяснение. Если отрезок $[\omega_1, \omega_2]$ сводится к точке 0, то предел максимального среднего (1) всегда существует и равен числу $f(\gamma_0)$, то есть зависит от начального условия γ_0 дифференциального включения (2).

В случае, если отрезок $[\omega_1, \omega_2]$ содержит кроме нуля и другие числа, то указанный предел заведомо существует, например, для функции f, которая имеет максимальное значение в промежутке $[\gamma_0, \infty]$ и $\omega_2 > 0$. Понятно, что этот предел, равный максимальному значению функции на множестве $[\gamma_0, \infty]$, вообще говоря, зависит от начального условия γ_0. Поскольку нас интересует ситуация, когда предел максимального среднего не зависит от начального условия γ_0, то эти случаи мы сразу искючаем из рассмотрения.

Наконец, если отрезок $[\omega_1, \omega_2]$ состоит из отрицательных точек, то переход к новому времени $-t$ сводит этот случай к основному ограничению на правую часть дифференциального включения (2).

Для задачи (1) требуется указать конструктивный метод вычисления предела максимального среднего. С этой целью введем некоторые обозначения, которые будем использовать для формулировки основного результата.

Во–первых, меру Лебега множества A будем обозначать $\lambda(A)$. Далее, для любого $\Delta > 0$ и любого $c \in R$ определим множество

$$A_f(\gamma_0, \Delta, c) = \{\gamma \in [\gamma_0, \gamma_0 + \Delta] : f(\gamma) \ge c\},$$

меру которого обозначим $\lambda_f(\gamma_0, \Delta, c)$. Кроме того, введем интеграл

$$I_f(\gamma_0, \Delta, c) = \int\limits_{A_f} f(x)\, dx. \tag{4}$$

Если заметить, что интеграл (4) равен плоской мере Лебега ординатного множества

$$T = \{(x, y) : x \in A_f(c), y \in [0, f(x)]\},$$

то этот же интеграл можно представить в виде

$$I_f = \int\limits_T dxdy. \tag{5}$$

Последнее равенство позволяет выявить связь между интегралом I_f и функцией λ_f.

2 Лемма об ординатном множестве

Лемма 2.1. *Для интегрируемой (по Лебегу) функции $f : [a,b] \to R$ имеет место равенство*

$$I_f(c) = c\lambda_f(c) + \int\limits_c^\infty \lambda_f(y)\,dy, \qquad (6)$$

где $\lambda_f(c) = \lambda(A_f(c))$, $A_f(c) = \{x \in [a,b] : f(x) \geq c\}$, $I_f(c) = \int\limits_{A_f} f(x)\,dx$.

$\bigtriangledown$[1] Действительно, если $c \geq 0$, то величина $\lambda_f(c)$ равна линейной мере поперечного сечения $l_f(c)$ ординатного множества T прямой $y = c$. Последнее множество представим в виде $T = T_1 \bigcup T_2$, где

$$T_1 = \{(x,y) : x \in A_f, y \in [0,c)\}, \quad T_2 = \{(x,y) : x \in A_f, y \in [c, f(x)]\}.$$

Плоская мера Лебега множества T_1 равна $c\lambda_f(c)$. Поэтому в силу аддитивности меры и теоремы Фубини, примененной к интегралу (5) при $T = T_2$, получим

$$I_f(c) = c\lambda_f(c) + \int\limits_c^\infty l_f(y)\,dy,$$

что совпадает с (6), так как $l_f(c) = \lambda_f(c)$.

Если $c < 0$, то

$$l_f(c) = \lambda\{x \in [a,b] : f(x) \leq c\}.$$

В этом случае ординатное множество $T = \{(x,y) : x \in [a,b] : f(x) \geq c\}$ представим в виде $T = T_- \bigcup T_+$, где

$$T_- = T \cap \{(x,y) : y \geq 0\}, \quad T_+ = T \cap \{(x,y) : y < 0\}.$$

Для множества T_+, лежащего в верхней полуплоскости, по теореме Фубини имеем

$$\int\limits_{T_+} dxdy = \int\limits_0^\infty \lambda_f(y)\,dy. \qquad (7)$$

Пусть теперь T_0—множество, лежащее в нижней полуплоскости $y < 0$, ограниченное осью абсцисс, прямой $y = c$ и графиком функции $f(x)$. Заметим, что

$$\int\limits_{T_0} dxdy = c\lambda\{(x,y) : x \in A_f(c), c < y < 0\} + \int\limits_{T_-} dxdy.$$

Отсюда, введя обозначение $h(c) = \lambda\{(x,y) : x \in A_f(c), c < y < 0\}$, получим

$$\int\limits_{T_-} dxdy = \int\limits_{T_0} dxdy - ch(c) = -\int\limits_c^0 l_f(y)\,dy - ch(c). \qquad (8)$$

[1]Начало и конец доказательства отмечаются соответственно знаками $\bigtriangledown$, $\bigtriangleup$.

Поскольку,

$$l_f(y) = (b-a) - \lambda\{x \in [a,b] : f(x) \geq y\} + h_0(y),$$

где $h_0(y) = \lambda\{x \in [a,b] : f(x) = y\}$, то

$$-\int_c^0 l_f(y)\,dy = c(b-a) + \int_c^0 \lambda_f(y)\,dy + \int_c^0 h_0(y)\,dy. \tag{9}$$

Последний интеграл в правой части этого равенства равен 0, так как его величина определяет плоскую меру Лебега множества, принадлежащего границе измеримого множества T. С учетом этого замечания, из (8),(9) следует

$$\int_{T_-} dxdy = c(b-a) - ch(c) + \int_c^0 \lambda_f(y)\,dy. \tag{10}$$

Так как $c\lambda_f(c) = c(b-a) - ch(c)$, то из формул (7), (10) получим равенство (6) для всех $c < 0$.

Таким образом, соотношение (6) доказано при любом $c \in R$. $\triangle$

3 Теорема о совпадении пределов

В этом разделе приводится основной результат о вычислении предела (1), позволяющий в некоторых случаях конструктивно получать ответ.

Для формулировки соответствующей теоремы введем следующие обозначения: $k = \omega_2/\omega_1$—отношение предельных скоростей для дифференциального включения (2);

$$I_f^{\Delta} = I_f/\Delta, \quad \lambda_f^{\Delta} = \lambda_f/\Delta.$$

Теперь определим функции

$$\varphi_f(k,\Delta,c) = \frac{(k-1)I_f^{\Delta}}{1+(k-1)\lambda_f^{\Delta}},$$

$$\Phi_f(k) = \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{c\geq 0} \varphi_f(k,\Delta,c).$$

Зависимость от начального условия γ_0 пределов M_f, Φ_f, в обозначениях этих и промежуточных сотношений мы для краткости опускаем.

Уточним теперь терминологию, используемую ниже.

Измеримую функцию $f : R \to R$ мы называем ступенчатой, если на любом отрезке она принимает конечное число значений. При этом, если отрезок представим в виде объединения промежутков на каждом из которых функция постоянная, то такую функцию называем простой ступенчатой.

Напомним также известный факт из теории функций. Речь идет о представлении неубывающей по $c \in R$ введенной выше функции $\lambda_f(j,1,c)$, где j—целое, на отрезке $[-b,b], b > 0$, в виде суммы

$$\lambda_f(j,\Delta,c) = \Lambda_f(j,\Delta,c) + h_f(j,\Delta,c), \quad \Delta = 1, \tag{11}$$

непрерывной по $c \in [-b, b]$ невозрастающей функции Λ_f и функции скачков

$$h_f = \sum_{c_s < c} h_s,$$

где $c_1, c_2, \ldots$— точки разрыва функции λ_f, а величина $h_s = f(c_s + 0) - f(c_s - 0)$— скачок функции в точке c_s. Для удобства формулировок множество локально интегрируемых функций $f : R \to R$, имеющих нулевое среднее (3), обозначим символом S_0. Основной результат данной работы формулируется в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть функция $f \in S_0$, Тогда предел M_f существует одновременно с пределом Φ_f и они совпадают,*

$$M_f(\omega_1, \omega_2) = \Phi_f(k). \tag{12}$$

4 Доказательство Теоремы 3.1

Равенство (12) будем доказывать последовательно для гладких, простых ступенчатых, ступенчатых и, наконец, локально интегрируемых функций.

Лемма 4.1. *Пусть $f \in S_0$. Тогда для любого $K > 0$ существует локально ограниченная функция $g \in S_0$ такая, что*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|\, dx \le K, \tag{13}$$

и для любых $\gamma_0, c \in R, \Delta > 0$ выполняются неравенства

$$|\lambda_f(\gamma_0, \Delta, c) - \lambda_g(\gamma_0, \Delta, c)| \le K, \quad |I_f(\gamma_0, \Delta, c) - I_g(\gamma_0, \Delta, c)| \le K. \tag{14}$$

Наоборот, если функция g удовлетворяет оценкам (13), (14), то $g \in S_0$ и справедливы равенства

$$M_f(\omega_1, \omega_2) = M_g(\omega_1, \omega_2), \quad \Phi_f(k) = \Phi_g(k) \tag{15}$$

при условии существования соответствующих пределов для одной из функций.

$\bigtriangledown$ Требуемая локально ограниченная функция g получается из f срезкой на каждом из промежутков $(j, j+1]$, j—целое, достаточно большой константой, гарантирующей выполнение неравенств (13),(14). Если некоторая функция g удовлетворяет указанным неравенствам, то первое из равенств в (15) следует из (13), так как $\omega_1 > 0$. Второе вытекает из (14), поскольку

$$|\varphi_f(k, \Delta, c) - \varphi_g(k, \Delta, c)| \le K_1/\Delta$$

с некоторой постоянной K_1 не зависящей от Δ и c, при условии существования одного из пределов $\Phi_f(k), \Phi_g(k)$.$\bigtriangleup$

Равенства (15) далее понимаются с обычной оговоркой о существовании одного из пределов.

Лемма 4.2. *Для любой простой ступенчатой функции $f \in S_0$ существует гладкая функция $g \in C^\infty \cap S_0$ для которой выполняются соотношения (15).*

$\bigtriangledown$ Согласно Лемме 4.1 достаточно построить функцию g с оценками (13),(14). Для этого функцию $f(x)$ в окрестности каждой точки разрыва a заменяем сверткой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x-t)f(t)\,dt$$

при достаточно малом $\varepsilon = \varepsilon(a) > 0$, где усредняющая бесконечно дифференцируемая функция $\omega_\varepsilon \geq 0$, удовлетворяет обычным условиям

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1, \quad supp(\omega_\varepsilon) \subset [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Здесь $supp(\omega_\varepsilon)$—носитель функции ω_ε.

Можно считать, что в ε–окрестности точки a нет других точек разрыва. В таком случае, погрешность в метрике пространства $L_1(R)$ от замены функции f ее аппроксимирующей только в указанной окрестности этой точки не превосходит величины $2\varepsilon(a)h(a)$, где $h(a)$—скачок функции f в точке a. Множество всех точек разрыва не более чем счетно. Поэтому за счет выбора $\varepsilon(a)$ можно обеспечить любую точность аппроксимации, скажем $K = 1$, и выполнение неравенств (14) для этого же числа K. $\bigtriangleup$

Лемма 4.3. *Для любой ступенчатой функции $f \in S_0$ существует простая ступенчатая функция $g \in S_0$ для которой выполняются равенства (15).*

$\bigtriangledown$ Для промежутка $(j, j+1]$, j—целое, существует целое $N = N(j)$, определяющее число попарно непересекающихся множеств

$$B_1, B_2, \ldots, B_N,$$

объединение которых составляет весь промежуток, а функция f постоянна на каждом из множеств, $f(B_i) = f_i$. Измеримое множество B_i аппроксимируем открытым множеством $U_i \subset (j, j+1]$, состоящим из конечного числа попарно непересекающихся интервалов, так, чтобы выполнялись оценки

$$|\lambda(B_i) - \lambda(U_i)| < \varepsilon_j/(8N^2), \quad \lambda(u_i \setminus B_i) < \varepsilon_j/(8N^2) \tag{16}$$

при любом $i = 1, 2, \ldots, N$, где $\varepsilon_j > 0$ выбирается так, чтобы

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (1+b_j)\varepsilon_j < 1, \quad b_j = \max_{j<x\leq j+1} |f(x)|.$$

Множество

$$V_i = U_i \setminus \bigcup_{s\neq i} U_s$$

состоит из конечного числа попарно непересекающихся промежутков. На основании (16) нетрудно получить следующую оценку

$$|\lambda(B_i) - \lambda(V_i)| < \varepsilon_j/(2N) \tag{17}$$

Отсюда, для меры множества

$$V_{N+1} = (j, j+1] \setminus \bigcup_{i=1}^{N} V_i$$

получим

$$\lambda(V_{N+1}) < \varepsilon_j/2. \tag{18}$$

Теперь определим простую ступенчатую функцию g на всей оси, полагая ее равной f в точках множества $V_i, i \neq N(j)+1$. На каждом из множеств V_{N+1} полагаем $g = f_{N+1} = 0$. По построению на множестве $V_i \bigcap B_i$ функции f и g совпадают, поэтому

$$\int_j^{j+1} |f(x) - g(x)|\, dx = \sum_{i-1}^{N} \int_{V_i \setminus B_i} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{V_{N+1}} |f(x)|\, dx.$$

Поскольку $V_i \setminus B_i \subset U_i \setminus B_i$, то с учетом (16), (18), отсюда следует оценка

$$\int_j^{j+1} |f(x) - g(x)|\, dx < N(\varepsilon_j/(8N^2)2b_j + (\varepsilon_j/2)b_j < \varepsilon_j b_j,$$

а значит выполняется (13) при $K = 1$. Из (17),(18) получим первую из оценок (14), так как

$$|\lambda_f(j,1,c) - \lambda_g(j,1,c)| \leq \sum_{f_i \geq c} |\lambda(V_i) - \lambda(B_i)| + \lambda(V_{N+1}) < \varepsilon_j.$$

Отсюда, согласно (6), следует вторая из оценок (14). Действительно,

$$|I_f(j,1,c) - I_g(j,1,c)| \leq b_j\varepsilon_j + 2b_j\varepsilon_j = 3b_j\varepsilon_j < 1.$$

Таким образом, по Лемме 2.1 выполняются равенства (14), (15) для этого же числа K. $\triangle$

Лемма 4.4. *Для любой функции $f \in S_0$ существует ступенчатая функция $g \in S_0$, для которой выполняются равенства (15).*

$\bigtriangledown$ По Лемме 4.1 функцию f можно считать ограниченной на любом промежутке $(j, j+1], j$—целое, т.е. $|f| < b = b(j)$. Для целого $n = n(j) > 1/\varepsilon_j$, где ε_j из доказательства предыдущей леммы, составим множество $A_j \subset [-b, b]$, элементами которого являются точки вида

$$-b + ib/n, \quad i = 0, 1, \ldots, 2n$$

и первые $p = p(j)$ точек разрыва функции $\lambda_f(j,1,c)$, $c \in [-b, b]$, где целое p выбирается так, чтобы (см. (11))

$$\sum_{s \geq p+1} |h(s)| < \varepsilon_j/2. \tag{19}$$

Все точки множества A_j пронумеруем в порядке возрастания, $A_j = \{a_{j,1}, a_{j,2}, \ldots\}$, и положим

$$B_{j,i} = \{x \in (j, j+1] : a_{j,i} \leq f(x) < a_{j,i+1}\}.$$

Теперь определим ступенчатую функцию g на всей оси, полагая ее равной $a_{j,i}$ в точках множества $B_{j,i}$. Тогда будет выполнено (14) при $K=1$, так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\gamma(x)-g(x)|\,dx < \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int\limits_{j}^{j+1} |f(x)-g(x)|\,dx < \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varepsilon_j < 1.$$

Можно считать число $n(j)$ настолько большим, что неравенство

$$|c_1-c_2| \le 1/n(j), \quad c_1, c_2 \in [-b, b]$$

влечет оценку

$$|\Lambda_f(j,1,c_1) - \Lambda_f(j,1,c_2)| < \varepsilon_j/2 \tag{20}$$

для функции Λ_f из (11) в силу ее равномерной непрерывности по переменной $c \in [-b, b]$. Заметим, что при $c \in (a_{j,i}, a_{j,i+1})$ выполняется равенство

$$\lambda_g(j,1,c) = \lambda_f(j,1,a_{j,i+1}),$$

поэтому из (11),(19),(20) получим

$$|\lambda_f(j,1,c) - \lambda_g(j,1,c)| < \varepsilon_j.$$

Заметим, что при замене 1 на $\xi, 0 \le \xi \le 1$ указанное соотношение сохраняется. Отсюда следует выполнение первого из неравенств (14) при $K=1$. Второе обосновывается как и в Лемме 4.3.

Теперь из Леммы 4.1 следуют равенства (15). $\triangle$

Из Лемм 4.2–4.4 вытекает, что Теорему 3.1 достаточно доказать только для гладких функций.

Лемма 4.5. *Теорема 3.1 справедлива для любой функции $f \in S_0 \cap C^\infty(R)$.*

$\triangledown$ На основаниии принципа максимума Понтрягина (см. [4, с.88]) устанавливается, что при фиксированном $\Delta > 0$ для задачи со свободным концом

$$F(\gamma, \Delta) = \int\limits_0^{\Delta} f(\gamma(t)\,dt \to \sup,$$

$$d\gamma/dt = u, \quad u \in [\omega_1, \omega_2], \quad \gamma(0) = \gamma_0,$$

управление u необходимо выбирается по правилу

$$u(t) = \begin{cases} \omega_1, & \text{если } p(t) \le 0, \\ \omega_2, & \text{если } p(t) > 0, \end{cases}$$

где $p(t)$—решение дифференциального уравнения

$$dp/dt = -df(\gamma(t))/d\gamma, \quad \gamma(\Delta) = 0.$$

Пусть $\omega(\gamma) = u(t(\gamma))$, где $t(\gamma)$— функция, обратная к $\gamma(t)$. Положим $\varphi(\gamma) = p(t(\gamma))$. Тогда

$$\omega(\gamma) = \begin{cases} \omega_1, & \text{если } \varphi(\gamma) \le 0, \\ \omega_2, & \text{если } \varphi(\gamma) > 0. \end{cases}$$

Для непрерывной функции φ множество

$$\{\gamma \in [\gamma_0, \gamma(\Delta)] : \varphi(\gamma) > 0\}$$

распадается на не более чем счетное множество попарно непересекающихся интервалов и, возможно, двух промежутков. Вместе со смежными промежутками это дает разложение отрезка

$$[\gamma_0, \gamma(\Delta)] = \bigcup_{j \geq 0} A_j$$

на попарно непересекающиеся промежутки A_j, где принято $A_0 = [\gamma_0, \gamma_1]$ при некотором $\gamma_1 \geq \gamma_0$. На концах любого промежутка A_j при $j \geq 1$ функция φ обращается в 0, а во внутренних точках промежутка либо $\varphi > 0$, либо $\varphi \leq 0$. Покажем, что на концах любого промежутка A_j, $j \geq 1$, функция f принимает значение $f(\gamma_1)$. Действительно,

$$df/d\gamma = -\omega(\gamma) d\varphi/d\gamma. \tag{21}$$

Отсюда,

$$f(\gamma) = f(\gamma_1) - \int_{\gamma_1}^{\gamma} \omega(\gamma)\dot{\varphi}(\gamma)\, d\gamma.$$

Поэтому, если $a_j \leq b_j$—границы промежутка A_j, то

$$f(b_j) = f(\gamma_1) - \sum_{b_i \leq b_j} \int_{A_i} \omega(\gamma)\dot{\varphi}(\gamma)\, d\gamma = f(\gamma_1),$$

поскольку функция $\omega(\gamma)$ постоянна во внутренних точках промежутка A_i, а на концах промежутка $\varphi(a_i) = \varphi(b_i) = 0$.

Таким образом, правило выбора управления $\omega(\gamma)$ можно сформулировать явно в терминах значений функции f, так как из (21) следует, что неравенство $\varphi(\gamma) \leq 0$ эквивалентно неравенству $f(\gamma) \geq f(\gamma_1)$, а соотношение $\varphi(\gamma) > 0$ эквивалентно соотношению $f(\gamma) < f(\gamma_1)$. Пусть теперь $c \in R$–произвольное число. Определим функцию

$$\omega(\gamma) = \begin{cases} \omega_1, & \text{если } f(\gamma) \geq c, \\ \omega_2, & \text{если } f(\gamma) < c. \end{cases} \tag{22}$$

Тогда оптимальное решение $\gamma = \gamma(t)$,$0 \leq t \leq \Delta$, нашей задачи принадлежит множеству решений Γ_Δ дифференциального включения (2), каждое из которых определяется следующим образом. Для произвольного $c \in R$ строится функция $\omega(\gamma)$ (22), а затем на отрезке $[0, \Delta]$, где

$$\Delta = \int_{\gamma_0}^{\gamma_0 + T} \frac{d\gamma}{\omega(\gamma)}, \quad T = T(\Delta), \tag{23}$$

неявно задается решение $\gamma = \gamma(t)$ задачи (22) уравнением

$$t = \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{\omega(\gamma)}.$$

Для произвольного решения $\gamma \in \Gamma_\Delta$ преобразуем среднее $F(\gamma, \Delta)/\Delta$. Имеем

$$F(\gamma, \Delta) = \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma(\Delta)} \frac{f(\gamma)\, d\gamma}{\omega(\gamma)} = \int\limits_{f(\gamma) \geq c} \frac{f(\gamma)\, d\gamma}{\omega(\gamma)} + \int\limits_{f(\gamma) < c} \frac{f(\gamma)\, d\gamma}{\omega(\gamma)}. \qquad (24)$$

Положим $T = \gamma(\Delta) - \gamma_0$. Поскольку функция f имеет нулевое среднее, то правая часть (24) в силу (22) равна

$$I_f(\gamma_0, T, c)\tau + \varepsilon(c, T, \gamma_0)T,$$

где $\tau = 1/\omega_1 - 1/\omega_2$, а функция $\varepsilon(c, T, \gamma_0) \to 0$ при $T \to \infty$ равномерно по $c \in R$.

Аналогично, разбивая интеграл (23) на два по тем же множествам, что и (24), убеждаемся в равенстве

$$\Delta = \lambda_f(\gamma_0, T, c)\tau + T/\omega_2. \qquad (25)$$

Следовательно, среднее

$$\frac{F(\gamma, \Delta)}{\Delta} = \varphi_f(k, T, c) + \eta, \quad \eta = \frac{\omega_2 \varepsilon}{1 + (k-1)\lambda_f^\Delta}.$$

Поскольку $\eta \to 0$ при $\Delta \to \infty$ равномерно по $c \in R$, то

$$\lim_{\Delta \to \infty} \sup_{\gamma \in \Gamma_\Delta} \frac{F(\gamma, \Delta)}{\Delta} = \lim_{T \to \infty} \sup_{c \in R} \varphi_f(k, T, c). \qquad (26)$$

Заметим, что при $c \leq 0$ выполняется неравенство $I_f^\Delta(T, c) \leq I_f^\Delta(0, c)$ и в то же время $\lambda_f^\Delta(T, c) \geq \lambda_f^\Delta(0, c)$. Поэтому в правой части (26) достаточно перебрать только значения $c \geq 0$.

Остается заметить, что функционал $l(\gamma) = F(\gamma, \Delta)/\Delta$, определенный на множестве Q_Δ всех решенй задачи (2) при $0 \leq t \leq \Delta$, достигает своего максимального значения, так как множество Q_Δ является компактом в равномерной метрике, [5, Теорема 6, с. 216], а функционал $l(\gamma)$ непрерывен в этой метрике.
Таким образом, Теорема 3.1 доказана.

5 Следствия

Приведем два результата, которые следуют из Теоремы 3.1.

Теорема 5.1. *Пусть функция $f \in S_0$ и существует равномерно по $c \geq 0$ предел*

$$\varphi_f(k, \infty, c) = \lim_{T \to \infty} \varphi_f(k, T, c).$$

Тогда существует предел (1), при этом

$$M_f(\omega_1, \omega_2) = \sup_{c \geq 0} \varphi_f(k, \infty, c). \qquad (27)$$

$\bigtriangledown$ Действительно, при нахождении предела $\Phi_f(k)$ в правой части (12), в силу равномерности предельного перехода по c, можно переставить местами операции вычисления предела и нахождения точной верхней границы. $\triangle$

В частности, если существуют равномерные по $c \geq 0$ пределы

$$I_f(c) = \lim_{T\to\infty} I_f(T,c), \quad \lambda_f(c) = \lim_{T\to\infty} \lambda_f(T,c),$$

то равенство (27) принимает вид

$$M_f(\omega_1,\omega_2) = \Phi_f(k) \equiv \sup_{c\geq 0} \frac{(k-1)I_f(c)}{1+(k-1)\lambda_f(c)}, \quad k = \omega_2/\omega_1. \tag{28}$$

Этот случай всегда имеет место для P—периодических функций, поскольку

$$I_f(c) = I_f(P,c)/P, \quad \lambda_f(c) = \lambda_f(P,c)/P. \tag{29}$$

Более того, от начального условия γ_0, которое фигурирует в задаче (2), указанные функции не зависят. Этот результат мы сформулируем отдельно.

Теорема 5.2. *Пусть функция $f \in S_0$ и является P—периодической. Тогда равномерно по $\gamma_0 \in R$ существует предел (1), который можно вычислить по формуле (28), где функции $I_f(c), \lambda_f(c)$ определяются равенствами (29).*

Таким образом, для периодической функции предел максимального среднего $\Phi_f(k)$ (1) зависит от отношения скоростей $k = \omega_2/\omega_1$ и его можно вычислить по формуле

$$\Phi_f(k) = \sup_{c\geq 0} \frac{I_f(c)\tau}{T_f(c)}, \tag{30}$$

которая отличается только формой записи от (28), где (см.(6))

$$I_f(c) = c\lambda_f(c) + \int_c^\infty \lambda_f(y)\,dy,$$

$$T_f(c) = \lambda_f(c)\tau + P/\omega_2, \quad \tau = 1/\omega_1 - 1/\omega_2.$$

Приведем еще один пример вычисления предела (1) с помощью формулы (28).

Пусть график функции $f \in S_0$ представляет последовательность прямоугольных импульсов одинаковой высоты h и существует среднее $2S$ от $|f|$. Тогда по формуле (28), как нетрудно проверить, получим

$$M_f(\omega_1,\omega_2) = \frac{(k-1)S}{1+(k-1)S/h}, \quad k = \omega_2/\omega_1. \tag{31}$$

Заметим, что в этом примере функция f, вообще говоря, не периодическая.

В последнем примере мы рассмотрим тригонометрическую функцию $f = \sin$. В этом случае

$$\lambda_f(c) = \begin{cases} \pi - 2\arcsin c, & \text{если } 0 \leq c \leq 1, \\ 0, & \text{если } c > 1, \end{cases}$$

$$I_f(c) = \begin{cases} 2\sin(\lambda(c)/c), & \text{если } 0 \leq c \leq 1, \\ 0, & \text{если } c > 1. \end{cases}$$

Переходя к переменной $\lambda \in [0,\pi]$, по формуле (28) получим

$$M_{\sin}(\omega_1,\omega_2) = \Phi_{\sin}(k) = \frac{2(k-1)}{\pi(k+1)} Q_{\sin}(k), \tag{32}$$

где для удобства введена функция

$$Q_{\sin}(k) = \pi(k+1) \sup_{0 \le \lambda \le \pi} \frac{\sin(\lambda/2)}{2\pi + (k-1)\lambda}. \tag{33}$$

Нетрудно проверить, что функция $Q_{\sin}(k)$ монотонно возрастает при $k \ge 1$ от значения $Q_{\sin}(1) = 1$ до предельногого значения $\pi/2$. Таким образом,

$$1 \le Q_{\sin}(k) < \pi/2, \quad k \ge 1. \tag{34}$$

Разумеется, эти же результаты получаются и для функции $f = \cos$, что, впрочем, следует из свойств максимальных средних, которые мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 5.3. *Пусть для функций $f, g \in S_0$ существуют максимальные средние (1). Тогда имеют место следующие свойства:*
a) $M_{cf} = cM_f$ при любом $c \ge 0$;
b) $M_{f+g} \le M_f + M_g$;
c) если при любых $c, \Delta \ge 0$ меры множеств

$$\{x \in [\gamma_0, \gamma_0 + \Delta] : f(x) \ge c\}, \quad \{x \in [\gamma_0, \gamma_0 + \Delta] : g(x) \ge c\}$$

совпадают, то совпадают и максимальные средние $M_f = M_g$.

$\bigtriangledown$ Первые два свойства следуют из определения максимальных средних. Свойство c) вытекает из Леммы 1. $\triangle$

Например, равенство $M_{\sin} = M_{\cos}$ сразу получается из свойства c).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 96–01–00616.

Литература

[1] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение дифференциальных включений с “быстрыми” и “медленными” переменными. //Матем. заметки. 1990. Т.47. Вып.6. С. 102–109.

[2] Филатов О.П., Хапаев М.М. О взаимной ε–аппроксимации решений системы дифференциальных включений и усредненного включения. //Матем. заметки. Т.47. Вып.5. С. 127–124.

[3] Филатов О.П. Об оценках опорных функций усредненных дифференциальных включений.// Матем. заметки. 1991. Т.50. Вып.3. С. 135–142.

[4] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

[5] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление. //Труды Математ. инст. АН СССР. 1985. Т.169. С.194–252.

THE CALCULATION OF LIMITS OF MAXIMUM AVERAGES

O.P. Filatov[1]

We consider the problem of calculation of limits of maximum averages related to the approximating problems for differential inclusions.

It is obtained the rst problem can be reduced to more simple problem.

[1]Filatov Oleg Pavlovich, Dept. of Mathematics and Mechanics Samara State University