МНОГОМЕСТНЫЕ СКОБКИ ПУАССОНА

А.Н.Панов[1]

В работе показывается, что скобка Пуассона от больше двух переменных локально совпадает с якобианом. Результаты прилагаются к изучению скобок Склянина.

В настоящей работе делается попытка построить теорию многоместных скобок Пуассона. Для этого требуется дать аналог тождества Якоби с числом мест≥ 3. Автор предлагает в качестве аналога принять соотношение пункта 4 из определения 1.1. Для k=2 получается обычное тождество Якоби. Основным примером является операция, ставящая в соответствие набору функций их якобиан по некоторому набору переменных (пример1.2). В дальнейшем оказывается (Теоремы 1.8 и 1.10), что для $k \geq 3$ любая k-местная скобка Пуассона локально сводится к якобиану. Во втором параграфе статьи вводится k-местный аналог векторного произведения. В качестве частных случаев получается обычное векторное произведение и скобка Склянина. Выписываются функции Казимира и дается описание симплектических листов для k=2.

1 Локальная структура k-местной скобки Пуассона

Пусть $V = K^n$ n-мерное координатное пространство над полем K характеристики нуль. Алгеброй функций A=Fun V на V будем называть одну из следующих алгебр: алгебру регулярных функций K[V];алгебру C^∞-гладких функций на V для $K = \mathbf{R}$;алгебру голоморфных функций для $K = \mathbf{C}$.

Определение 1.1. Под k-местной скобкой Пуассона будем понимать k-местное отображение $\{.,\ldots,.\}$ алгебры A в себя, удовлетворяющее указанным ниже свойствам 1-4.

1)Линейность по всем переменным;

2)Для любой подстановки σ чисел $1,2,\ldots,k$ и любого набора функций $h_1,\ldots,h_k$ из

$$\{h_{\sigma(1)},\ldots,h_{\sigma(k)}\} = \epsilon(\sigma)\{h_1,\ldots,h_k\},$$

где $\epsilon(\sigma)$ знак подстановки σ;

Пусть $f_1,\ldots,f_{k-1}$ набор функций из A. Обозначим $\partial_F h = \{f_1,\ldots,f_{k-1},h\}$.

3)Тождество Лейбница:

$$\partial_F(h_1h_2) = \partial_F(h_1)h_2 + h_1\partial_F(h_2) \tag{1}$$

[1]Панов Александр Николаевич. Кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета

4)Тождество Якоби:

$$\begin{array}{l}\partial_F\{h_1, h_2, \ldots, h_k\} = \{\partial_F h_1, h_2, \ldots, h_k\} + \\ \{h_1, \partial_F h_2, \ldots, h_k\} + \ldots + \{h_1, h_2, \ldots, \partial_F h_k\}\end{array} \qquad (2)$$

Пример 1.2. Покажем, что скобка $\{f_1, \ldots, f_k\} = \frac{D(f_1,\ldots,f_k)}{D(x_1,\ldots,x_k)}$ удовлетворяет свойствам 1-4. Проверим выполнимость тождества Якоби.Достаточно проверить для случая $h_1 = x_1, \ldots, h_k = x_k$

$$0 = \{\partial_F x_1, x_2, \ldots, x_k\} + \{x_1, \partial_F x_2, \ldots, x_k\} + \{x_1, x_2, \ldots, \partial_F x_k\}$$

Это равенство равносильно следующему:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_1}\{f_1, \ldots, f_{k-1}, x_1\} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_k}\{f_1, \ldots, f_{k-1}, x_k\}$$

По определению якобиана получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{D(f_1, \ldots, f_{k-1})}{D(\hat{x}_1, x_2, \ldots, x_k)} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{D(f_1, \ldots, f_{k-1})}{D(x_1, \ldots, \hat{x}_k)} = 0$$

Здесь $\hat{x}_i$ означает отсутствие переменной x_i в наборе $x_1, \ldots, x_k$. Обозначим $D_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $D^2_{ij} = D_i D_j$. Последнее равенство можно переписать как равенство нулю следующего формального определителя

$$\begin{vmatrix} D_1 & D_2 & \ldots & D_k \\ D_1(f_1) & D_2(f_1) & \ldots & D_k(f_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1(f_{k-1}) & D_2(f_{k-1}) & \ldots & D_k(f_{k-1}) \end{vmatrix} \qquad (3)$$

подсчитанного разложением по первой строке. Определитель (3) -это сумма элементов $\epsilon(\sigma)D_i(D_{\sigma(2)}(f_1)\cdots D_{\sigma(k)}(f_{k-1}))$ по всем подстановкам

$$\sigma : (1, 2, \ldots, k) \mapsto (i, \sigma(2), \ldots, \sigma(k)).$$

После дифференцирования по правилу Лейбница получаем сумму элементов

$$\epsilon(\sigma)D_{\sigma(2)}(f_1)\cdots D^2_{is}(f_{j-1})\cdots D_{\sigma(k)}(f_{k-1}),$$

где

$$\sigma : (1, 2, \ldots, j, \ldots, k) \mapsto (i, \sigma(2), \ldots, s, \ldots, \sigma(k)).$$

Выписанный элемент сокращается с элементом

$$\epsilon(\sigma')D_{\sigma(2)}(f_1)\cdots D^2_{si}(f_{j-1})\cdots D_{\sigma(k)}(f_{k-1}),$$

где

$$\sigma' : (1, 2, \ldots, j, \ldots, k) \mapsto (s, \sigma(2), \ldots, i, \ldots, \sigma(k))$$

Тождество Якоби доказано.□

Следующая цель - установить условия на структурные константы k-местной скобки Пуассона. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - естественный базис V; $x_1, \ldots, x_n$ - дуальный базис в V^*. Обозначим $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\} = p_{i_1\ldots i_k}(x)$,$x = (x_1, \ldots, x_n)$. В дальнейшем будем сокращенно обозначать $p_{i_1,\ldots,i_k}$. Набор $\{p_{i_1,\ldots,i_k}\}$ элементов из A будем называть набором

структурных констант скобки $\{.,\dots,.\}$ в базисе $x_1,\dots,x_n$. Зная набор структурных констант, можно продолжить скобку по линейности и тождеству Якоби на алгебру A. Выясним, каким свойствам должен удовлетворять набор $\{p_{i_1\dots i_k}\}$, чтобы обеспечить выполнимость пунктов 2) и 4) из определения 1.1.
Для выполнимости пункта 2) необходимо и достаточно потребовать

$$p_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(k)}}=\epsilon(\sigma)p_{i_1\dots i_k} \tag{4}$$

Это условие будем называть кососимметричностью $p_{i_1\dots i_k}$ Тождество Якоби достаточно проверить для случая, когда $h_1,\dots,h_k$ являются базисными элементами. Пусть $h_1=x_{i_1},\dots,h_k=x_{i_k}$. Тогда

$$\partial_F(x_{i_s})=\{f_1,\dots,f_{k-1},x_{i_s}\}=\sum_{j_1,\dots,j_{k-1}=1}^{n}p_{j_1\dots j_{k-1},i_s}D_{j_1}(f_1)\dots D_{j_{k-1}}(f_{k-1})$$

Левая часть L тождества Якоби (1) принимает вид

$$L=\partial_F\{x_{i_1},\dots,x_{i_k}\}=\partial_F(p_{i_1,\dots,i_k})=$$

$$\sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n}p_{j_1,\dots,j_{k-1},j_k}D_{j_1}(f_1)\dots D_{j_{k-1}}(f_{k-1})D_{j_k}(p_{i_1,\dots,i_k})$$

Первое слагаемое в правой части записывается в виде

$$\{\partial_F x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_k}\}=$$

$$\{\sum_{m_1,\dots,m_{k-1}=1}^{n}p_{m_1,\dots,m_{k-1},i_1}D_{m_1}(f_1)\dots D_{m_{k-1}}(f_{k-1}),x_{i_2},\dots,x_{i_k}\}=$$

$$\sum_{j_1=1}^{n}p_{j_1,i_2,\dots,i_k}D_{j_1}(\sum_{m_1,\dots,m_{k-1}=1}^{n}p_{m_1,\dots,m_{k-1},i_1}D_{m_1}(f_1)\dots D_{m_{k-1}}(f_{k-1}))$$

Правая часть R тождества Якоби принимает вид :

$$R=\sum_{j_1=1}^{n}p_{j_1,i_2,\dots,i_k}D_{j_1}(\sum_{m_1,\dots,m_{k-1},i_1}p_{m_1,\dots,m_{k-1},i_k}D_{m_1}(f_1)\cdots D_{m_{k-1}}(f_{k-1}))+$$

$$\sum_{j_2=1}^{n}p_{i_1,j_2,\dots,i_k}D_{j_2}(\sum_{m_1,\dots,m_{k-1}=1}^{n}p_{m_1,\dots,m_{k-1},i_2}D_{m_1}(f_1)\cdots D_{m_{k-1}}(f_{k-1}))+$$

$$\dots+\sum_{j_k=1}^{n}p_{i_1\dots i_{k-1},j_k}D_{j_k}(\sum_{m_1,\dots,m_{k-1}=1}^{n}p_{m_1,\dots,m_{k-1},i_k}D_{m_1}(f_1)\cdots D_{m_{k-1}}(f_{k-1}))$$

Теорема 1.3. Кососимметрическая скобка $\{x_{i_1},\dots,x_{i_k}\}=p_{i_1,\dots,i_k}$ продолжается до k-местной скобки Пуассона тогда и только тогда, когда структурные константы удовлетворяют написанным ниже условиям (5) и (6) :

$$\sum_{j=1}^{n}p_{m_1,\dots,m_{k-1},j}D_j(p_{i_1,\dots,i_k})=\sum_{j=1}^{n}p_{j,i_2,\dots i_k}D_j(p_{m_1,\dots,m_{k-1},i_1})+$$

$$\sum_{j_1}^{n} p_{i_1,j,i_3,\dots,i_k} D_j(p_{m_1,\dots,m_{k-1},i_2}) + \dots + \sum_{j=1}^{n} p_{i_1,i_2,i_3,\dots,i_{k-1},j} D_j(p_{m_1,\dots,m_{k-1},i_k}) \qquad (5)$$

$$\sum_{t=1}^{k}(-1)^t p_{m_1,\dots,m_s,\dots,m_{k-1},i_t} p_{j,i_1,\dots,\hat{i_t}\dots i_k} + \sum_{t=1}^{k}(-1)^t p_{m_1,\dots,j,\dots,m_{k-1},i_t} p_{m_s i_1,\dots,\hat{i_t},\dots,i_k} = 0 \qquad (6)$$

для любых $m_1,\dots,m_s,\dots,m_k,j$.
Доказательство. Равенство (5) получается приравниванием нулю коэффициентов при $D_{m_1}(f_1)\cdots D_{m_{k-1}}(f_{k-1})$, равенство (6) - коэффициентов при

$$D_{m_1}(f_1)\cdots D^2_{m_s j}(f_{m_s})\cdots D_{m_{k-1}}(f_{m_{k-1}}).$$

□

Выясним геометрический смысл условий (6). Используемые ниже обозначения, согласованы с книгой [1] (в частности $\lfloor$ внутреннее произведение). Рассмотрим внешнюю форму $\Omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} p_{i_1,\dots,i_k} e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k}$ и линейное отображение $L_\Omega : \bigwedge^{k-1} V^* \longmapsto \bigwedge^{k+1} V$, что $L_\Omega(F) = (F\lfloor\Omega)\wedge\Omega$ для любой формы $F\in\bigwedge^{k-1}V^*$. Хорошо известна следующая теорема.
Теорема 1.4[1].Форма Ω расщепима (то есть $\Omega = v_1\wedge\dots\wedge v_k$) тогда и только тогда, когда $L_\Omega = 0$. □
Выпишем $L_\Omega(x_{m_1}\wedge\dots\wedge x_{m_{k-1}})$ в явном виде. Воспользуемся равенством [1.гл.1, формула 4.17]:

$$x_{m_1}\wedge\dots\wedge x_{m_{k-1}}\lfloor e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k} = \begin{cases} 0 & , \ \textit{если} \quad \{m_1,\dots,m_{k-1}\}\not\subset\{i_1,\dots,i_k\} \\ \epsilon e_{i_0} & , \ \textit{если} \quad \{i_1,\dots,i_k\} = \{m_1,\dots,m_{k-1}\}\cup\{i_0\}\end{cases}$$

Здесь ϵ знак подстановки $(i_1,\dots,i_{k-1},i_k)\mapsto(m_1,\dots,m_{k-1},i_0)$. С учетом кососимметричности $p_{i_1,\dots,i_k}$ второй случай в стоящей выше формуле может может быть переписан в виде

$$x_{m_1}\wedge\dots\wedge x_{m_{k-1}}\lfloor p_{i_1,\dots,i_k} e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k} = p_{m_1,\dots,m_{k-1},i_0} e_{i_0}.$$

Тогда $\quad x_{m_1}\wedge\dots\wedge x_{m_{k-1}}\lfloor\Omega = \sum_{i_0=1}^{n} p_{m_1,\dots,m_{k-1},i_0} e_{i_0} \quad$ и

$$L_\Omega(x_{m_1}\wedge\dots\wedge x_{m_{k-1}}) = \left(\sum_{i_0}^{n} p_{m_1,\dots,m_{k-1},i_0} e_{i_0}\right)\wedge\left(\sum_{i_1<\dots<i_k} p_{i_1,\dots,i_k} e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k}\right) =$$

$$\sum_{i_0=\overline{1,n}, i_1<\dots<i_k} p_{m_1,\dots,m_{k-1},i_0} p_{i_1,\dots,i_k} e_{i_0}\wedge\dots\wedge e_{i_k}$$

Обозначение. Следующую сумму $\sum_{t=0}^{k}(-1)^t p_{m_1,\dots,m_{k-1},i_s} p_{i_0,\dots,\hat{i_t}\dots,i_k}$ будем обозначать $H_{m_1,\dots,m_{k-1},i_0,\dots,i_s,\dots,i_k}$ или коротко H.
Получаем

$$L_\Omega(x_{m_1}\wedge\dots\wedge x_{m_{k-1}}) = \sum_{i_0<i_1<\dots<i_k} H_{m_1,\dots,m_{k-1},i_0,i_1,\dots,i_k} e_{i_0}\wedge\dots\wedge e_{i_k}$$

Поскольку L_Ω линейное отображение ,то ему соответствует элемент

$$l_\Omega \in \left(\bigwedge^{k-1} V^*\right)^* \otimes \bigwedge^{k+1} V = \bigwedge^{k-1} V \otimes \bigwedge^{k+1} V.$$

Теорема 1.5. Кососимметрический набор $\{p_{i_1,\ldots,i_k}\}$ удовлетворяет условию (6) тогда и только тогда, когда элемент l_Ω кососимметричен.
Доказательство. Легко видеть ,что Hсохраняет знак при транспозициях $i_0 \mapsto i_1$, $i_1 \mapsto i_2$,. . .,$i_{k-1} \mapsto i_k$. Поэтому H кососимметричен по $i_0,\ldots,i_k$. Кососимметричность по $m_1,\ldots,m_{k-1}$ следует из кососимметричность $p_{i_1,\ldots,i_k}$. Условие (6) может быть переписано в виде

$$0=\sum_{t=1}^{k}(-1)^t p_{m_1,\ldots,m_s,\ldots,m_{k-1},i_t}p_{i_0,i_1,\ldots,\hat{i}_t,\ldots,i_k}+\sum_{t=1}^{k}(-1)^t p_{m_1,\ldots,i_0,\ldots,m_{k-1},i_t}p_{m_s,i_1,\ldots,\hat{i}_t,\ldots,i_k}=$$

$$p_{m_1,\ldots,m_s,\ldots,m_{k-1},i_0}p_{i_1,\ldots,i_k}+\sum_{t=1}^{k}(-1)^t p_{m_1,\ldots,m_s,\ldots,m_{k-1},i_t}p_{i_0,i_1,\ldots,\hat{i}_t,\ldots,i_k}+$$

$$p_{m_1,\ldots,i_0,\ldots,m_{k-1},m_s}p_{i_1,\ldots,i_k}+\sum_{t=1}^{k}(-1)^t p_{m_1,\ldots,i_0,\ldots,m_{k-1},i_t}p_{m_s,i_1,\ldots,\hat{i}_t,\ldots,i_k}=$$

$$H_{m_1,\ldots,m_s,\ldots,i_0,\ldots,i_k}+H_{m_1,\ldots,i_0,\ldots,m_s,\ldots,i_k} \qquad (6')$$

Итак, условие (6) равносильно кососимметричности H. Элемент l_Ω записывается в виде

$$l_\Omega=\sum_{m_1<\ldots<m_{k-1},i_0<\ldots<i_k}H_{m_1,\ldots,m_{k-1},i_0,\ldots,i_k}(e_{m_1}\wedge\cdots\wedge e_{m_{k-1}})\otimes(e_{i_0}\wedge\cdots\wedge e_{i_k})=$$

$$\frac{1}{(k-1)!(k+1)!}\sum_{m_1,\ldots,m_{k-1},i_0,i_1,\ldots,i_k=1}^{n}H_{m_1,\ldots,m_{k-1},\ldots i_k}e_{m_1}\otimes\cdots\otimes e_{m_{k-1}}\otimes e_{i_0}\otimes\cdots\otimes e_{m_k}$$

Кососимметричность l_Ω равносильна кососимметричности H.□
Следствие 1.6. Если форма Ω ,равная $\sum p_{i_1,\ldots,i_k}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}$, расщепима, то выполняется условие (6).
Следствие 1.7. Пусть задан кососимметрический набор $p_{i_1,\ldots,i_k}\in K$. Тогда $\{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\}=p_{i_1,\ldots,i_k}$ продолжается до k-местной скобки Пуассона тогда и только тогда, когда элемент l_Ω кососимметричен.
Следующая теорема классифицирует формы, удовлетворяющие (6) в заданной точке.
Теорема 1.8. Условие (6) является тождеством для $k=2$ и равносильна расщепимости формы Ω для $k\geq 3$.
Доказательство. Форма Ω является кососимметрической k-местной формой на V^*.Условие на нее может быть переписано в виде

$$\begin{array}{l}\sum_{t=1}^{k}(-1)^t\Omega(\lambda_1,\ldots,\lambda_s,\ldots,\lambda_{k-1},\mu_t)\Omega(\mu_0,\ldots,\hat{\mu}_t,\ldots,\mu_k)+\\ \sum_{t=1}^{k}(-1)^t\Omega(\lambda_1,\ldots,\mu_0,\ldots,\lambda_{k-1},\mu_t)\Omega(\lambda_s,\ldots,\hat{\mu}_t,\ldots,\mu_k)=O\end{array} \qquad (6'')$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1},\mu_0,\ldots,\mu_k$ - произвольные элементы V^*.
1)Покажем ,что (6") является тождеством для $k=2$. Достоточно проверить это для случая $s=1$.Для любых $\lambda_1,\mu_0,\mu_1,\mu_2$ имеем

$$\Omega(\lambda_1,\mu_1)\Omega(\mu_0,\mu_2)-\Omega(\lambda_1,\mu_2)\Omega(\mu_0,\mu_1)+\Omega(\mu_0,\mu_1)\Omega(\lambda_1,\mu_2)-\Omega(\mu_0,\mu_2)\Omega(\lambda_1,\mu_1)=0$$

2)Пусть $k\geq 3$. Если форма Ω расщепима, то выполняется (6").
Покажем в обратную сторону. Пусть $\Omega\neq 0$ и удовлетворяет (6).В V^* существут

такой набор линейных форм $\epsilon_1,\dots,\epsilon_k$, что $\Omega(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\neq 0$. Система $\epsilon_1,\dots,\epsilon_k$ линейно независима. Обозначим через Wподпространство , натянутое на $\epsilon_1,\dots,\epsilon_k$. Определим

$$W^\perp=\{\nu\in V^*\mid \Omega(\omega_1,\dots,\omega_{k-1},\nu)=0 \qquad \text{для любых} \qquad \omega_1,\dots,\omega_{k-1}\in W\}.$$

Множество $W^\perp$ является подпространством, $W\cap W^\perp=0$, $dim W^\perp=n-k$. Поэтому $V^*=W\oplus W^\perp$.
2.1)Следующая цель показать, что

$$\Omega(\omega_1,\dots,\omega_{k-r},\nu_1,\dots,\nu_r)=0 \tag{7}$$

для любых $\omega_1,\dots,\omega_{k-r}\in W$;$\nu_1,\dots,\nu_r\in W^\perp$ и $1\le r\le k-1$.
Будем доказывать (7) индукцией по r. Для $r=1$ это следует из из определения $W^\perp$.Предположим ,что (7) доказано для номера r. Докажем для $r+1$. Положим в (6") $\lambda_1=\omega_1,\dots,\lambda_{k-1}=\omega_{k-1}$, $\mu_0=\omega_1$, $\mu_1=\omega_k$,$\mu_2=\omega_2,\dots,\mu_{k-r-1}=\omega_{k-r-1}$, $\mu_{k-r}=\nu_1,\dots,\mu_k=\nu_{r+1}$. Вторая сумма в (6") при такой подстановке зануляется и равенство (6") принимает вид

$$-\Omega(\omega_1,\dots,\omega_{k-1},\dots,\omega_k)\Omega(\omega_1,\dots,\omega_{k-r-1},\nu_1,\dots,\nu_{r+1})+$$

$$\sum_{t=1}^{r+1}(-1)^t\Omega(\omega_1,\dots,\omega_{k-1},\nu_t)\Omega(\omega_1,\omega_k,\omega_2,\dots,\omega_{k-r-1},\nu_1,\dots,\hat{\nu}_t,\dots,\nu_{r+1})=0$$

Из $\Omega(\omega_1,\dots,\omega_{k-1},\nu_t)=0$ получаем

$$\Omega(\omega_1,\dots,\omega_{k-1},\omega_k)\Omega(\omega_1,\dots,\omega_{k-r-1},\nu_1,\dots,\nu_{r+1})=0.$$

Так как $\Omega(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\neq 0$,то для любого базиса $\omega_1,\dots,\omega_k$ в W также $\Omega(\omega_1,\dots,\omega_k)\neq 0$. Поэтому $\Omega(\omega_1,\dots,\omega_{k-r-1},\nu_1,\dots,\nu_{r+1})=0$ для любого линейно независимого набора векторов $\omega_1,\dots,\omega_{k-r-1}$. Для линейно зависимых наборов равенство нулю также имеет место.Что доказывает (7).
2.2)Покажем теперь, что $\Omega(\nu_1,\dots,\nu_k)=0$ для любого набора $\nu_1,\dots,\nu_k\in W^\perp$. Для этого положим в (6") $\lambda_1=\epsilon_1,\dots,\lambda_{k-1}=\epsilon_{k-1},\mu_0=\nu_1,\mu_1=\epsilon_k,\mu_2=\nu_2,\dots,\mu_k=\nu_k$ В силу (7) при такой подстановке все слагаемые в (6) равны нулю, кроме одного. Получаем $\Omega(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\Omega(\nu_1,\dots,\nu_k)=0$.Отсюда $\Omega(\nu_1,\dots,\nu_k)=0$.
2.3)Дополним $\epsilon_1,\dots,\epsilon_k$до базиса в V^*,выбрав $\epsilon_{k+1},\dots,\epsilon_n\in W^\perp$. Если $a_1,\dots,a_n$ дуальный базис к $\epsilon_1,\dots,\epsilon_n$, то $\Omega=\mathrm{Const}a_1\wedge\dots\wedge a_k$. То есть форма Ω расщепима .□
Определение 1.9. Точку $m\in K^n$ будем называть нулевой точкой скобки Пуассона $\{.,\dots,.\}$,если $p_{i_1,\dots,i_k}=0$ для любого набора индексов $i_1,\dots,i_k$.
Теорема 1.10. Пусть $m\in\mathbf{R^n}$ ненулевая точка скобки Пуассона $\{.,\dots,.\}$ алгебры $A=C^\infty(\mathbf{R^n})$ для $k\ge 3$. Существует локальная система координат $y_1,\dots,y_n$ в окрестности точки m, что для любых функций $f_1,\dots,f_k$ скобка Пуассона $\{f_1,\dots,f_k\}$ равна $\frac{D(f_1,\dots,f_k)}{D(y_1,\dots,y_k)}$.
Доказательство. Достаточно показать, что можно выбрать локальную систему координат $y_1,\dots,y_n$, для которой $\{y_1,\dots,y_k\}=1$ и $\{y_{i_1},\dots,y_{i_k}\}=0$ при любом наборе индексов $i_1,\dots,i_k$ не сопряженным с $1,2,\dots,k$. Пусть $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R^n}$. $\{x_1,\dots,x_k\}=p_{1,\dots,k}(x)$,$p_{1,\dots,k}(m)\neq 0$. Положим $y_1=x_1,\dots,y_{k-1}=x_{k-1}$.Пусть y_k - время на гамильтоновой траектории векторного поля $f\mapsto\{y_1,\dots,y_{k-1},f\}$.Тогда $\{y_1,\dots,y_k\}=1$. Рассмотрим такой набор векторных полей $L_1,\dots,L_k$, что $L_i(f)=\{y_1,\dots,\hat{y}_i,\dots,y_k,f\}$. Из тождества Якоби (определение 1.1) следует, что эти векторные поля коммутируют. Дополним $y_1,\dots,y_k$ до системы координат $y_1,\dots,y_n$ такой,

что $L_i(y_j) = 0$ для $j \geq k+1$.Осталось показать, что $\{y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}\} = 0$, для любого набора индексов, не сопряженного $1, 2, \ldots, k$.Доказательство завершается аналогично п.2.2,2.3 из доказательства теоремы 1.8.□

2 Обобщенное векторное произведение

Определение 2.1. Пусть $c_{i_1,\ldots,i_k}$ любой кососимметрический набор чисел из поля K. Рассмотрим скобку

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\} = c_{i_1,\ldots,i_k} x_1 \cdots \hat{x_{i_1}} \cdots \hat{x_{i_k}} \cdots x_n \tag{8}$$

Продолжим скобку (8) по тождеству Лейбница и линейности на всю алгебру A. Полученную скобку будем называть обобщенным векторным произведением.
Выделим следующие частные случаи.
1)$k = 2, n = 3, c_{12} = c_{23} = c_{31}$получаем соотношения $\{x_1, x_2\} = x_3$, $\{x_2, x_3\} = x_1$, $\{x_3, x_1\} = x_2$. Это обычное векторное произведение.
2)Скобка Склянина [2,3,4]: $k = 2, n = 4; c_2, c_3, c_4 \in K$; соотношения $\{x_2, x_1\} = 2(c_3 - c_4)x_3x_4$,$\{x_3, x_1\} = 2(c_4 - c_1)x_4x_2$, $\{x_4, x_1\} = 2(c_2 - c_3)x_2x_3$, $\{x_2, x_3\} = -2x_1x_4$, $\{x_3, x_4\} = -2x_1x_2$, $\{x_4, x_2\} = -2x_1x_3$.
Сохраним обозначение из первого параграфа

$$p_{i_1,\ldots,i_k} = c_{i_1,\ldots,i_k} x_1 \cdots \hat{x_{i_1}} \cdots \hat{x_{i_k}} \cdots x_n$$

Теорема 2.2. Обобщенное векторное произведение является k-местной скобкой Пуассона тогда и только тогда,когда $c_{i_1,\ldots,i_k}$ набор плюккеровых координат.
Доказательство. Заметим ,что $D_j(p_{i_1,\ldots,i_k}) = 0$ для $j \in \{i_1, \ldots, i_k\}$ и
$D_j(p_{i_1,\ldots,i_k}) = p_{i_1,\ldots,i_k} x_j^{-1}$ для $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$. Обозначим

$$P = \prod_{i=1}^{n} x_i, Q = (\prod_{t=1}^{k-1} x_{m_t})(\prod_{s=1}^{k} x_{i_s})$$

Выпишем условие (5) для случая обобщенного векторного произведения.
Подстановка в левую часть приводит к следующему равенству:

$$L = \sum_{j=1}^{n} p_{m_1,\ldots,m_{k-1},j} D_j(p_{i_1,\ldots,i_k}) = \sum_{j \notin \{i_1,\ldots,i_k\}} p_{m_1,\ldots,m_{k-1},j} p_{i_1,\ldots,i_k} x_j^{-1} =$$
$$\sum_{j \notin \{i_1,\ldots,i_k\}} c_{m_1,\ldots,m_{k-1},j} c_{i_1,\ldots,i_k} PQ^{-1} x_j^{-2}$$

В правой части

$$\sum_{j=1}^{n} p_{j,i_2,\ldots,i_k} D_j(p_{m_1,\ldots,m_{k-1},i_1}) = \sum_{j \notin \{m_1,\ldots,m_{k-1},i_1\}} p_{j,i_2,\ldots,i_k} p_{m_1,\ldots,m_{k-1},i_1} x_j^{-1} =$$
$$\sum_{j \notin \{m_1,\ldots,m_{k-1},i_1\}} c_{j,i_2,\ldots,i_k} c_{m_1,\ldots,m_{k-1},i_1} PQ^{-1} x_j^{-2},$$
$$\cdots$$
$$\sum_{j=1}^{n} p_{i_1,\ldots,i_{k-1},j} D_j(p_{m_1,\ldots,p_{k-1},i_k}) = \sum_{j \notin \{m_1,\ldots,m_{k-1},i_k\}} p_{i_1,\ldots,i_{k-1},j} p_{m_1,\ldots,m_{k-1},i_k} x_j^{-1} =$$

$$\sum_{j\notin\{m_1,\dots,m_{k-1},i_k\}} c_{i_1,\dots,i_{k-1},j}c_{m_1,\dots,m_{k-1},i_k}PQ^{-1}x_j^{-2}.$$

Приравнивая обе части равенства (5), получаем :

$$\sum_{j\notin\{i_1,\dots,i_k\}} c_{m_1,\dots,m_{k-1},j}c_{i_1,\dots,i_k}x_j^{-2} = \sum_{j\notin\{m_1,\dots,m_{k-1},i_1\}} c_{j,i_2,\dots,i_k}c_{m_1,\dots,m_{k-1},i_1}x_j^{-2}+$$

$$\dots + \sum_{j\notin\{m_1,\dots,m_{k-1},i_k\}} c_{i_1,\dots,i_{k-1},j}c_{m_1,\dots,m_{k-1},i_k}x_j^{-2}$$

Это равенство равносильно следующему

$$c_{m_1,\dots,m_{k-1},j}c_{i_1,\dots,i_k} = c_{m_1,\dots,m_{k-1},i_1}c_{j,i_2,\dots,i_k} + \dots + c_{m_1,\dots,m_{k-1},i_k}c_{i_1,\dots,i_{k-1},j} \qquad (9)$$

Положим $j = i_0$. Равенство (9) может быть переписано в форме (10):

$$\sum_{t=0}^{k}(-1)^t c_{m_1,\dots,m_{k-1},i_t}c_{i_0,\dots,\hat{i_t}\dots,i_k} = 0 \qquad (10)$$

Это условие равносильно расщепимости формы $\sum c_{i_1,\dots,i_k}e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k}$. Итак (5) равносильно плюккеровости набора $c_{i_1,\dots,i_k}$. Равенство (6) после сокращений принимает вид

$$\sum_{t=1}^{k}(-1)^t c_{m_1,\dots,m_s,\dots,m_{k-1},i_t}c_{i_0,\dots,\hat{i_t},\dots,i_k} + \sum_{t=1}^{k}(-1)^t c_{m_1,\dots,i_0,\dots,m_{k-1},i_t}c_{m_s,i_1,\dots,\hat{i_t},\dots,i_k} = 0$$

Это равенство (теорема 1.8)является тождеством для $k = 2$ и равносильно (10) для $k \geq 3$.□

Дадим описание функций Казимира и симплектических листов обобщенного векторного произведения.

Определение 2.3. Функцию f из A будем называть функцией Казимира, если $\{a_1,\dots,a_{k-1},f\} = 0$ для любого набора $a_1,\dots,a_{k-1}\in A$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} c_{i_1,\dots,i_{k-1},j}\xi_j = 0 \qquad ; \qquad 1 \leq i_1,\dots,i_k \leq n \qquad (11)$$

Теорема 2.4.

1) Функция F_Ξ, равная $\sum_{s=1}^{n}\xi_s x_s^2$, является функцией Казимира ,если $\Xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ решение (11),

2)Пусть $k = 2$, $\{c_{i,j}\}$ набор плюккеровых координат и $c_{i,j}\neq 0$ для всех i,j. Рассмотрим набор функций Казимира $F_1,\dots,F_{n-2}$, построенный по некоторой фундаментальной системе решений (11). Симплектические листы обобщенного векторного произведения имеют размерность 0 или 2. В первом случае они состоят из одной точки. Симплектический лист, содержащий точку $x = (x_1,\dots,x_n)$ нульмерен, если точка имеет по крайней мере три нулевые координаты. В противном случае его размерность равна двум и его замыкание в топологии Зарисского задается системой алгебраических уравнений $F_1 = d_1,\dots,F_{n-2} = d_{n-2}$ для некоторого набора констант $d_1,\dots,d_{n-2}$.□

Литература

[1] Стейнберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.
[2] Склянин Е.К.// Функц. анализ и его приложения. 1982. Т.16. N4. С.27-34.
[3] Карасев М.В.,Маслов В.П. Нелиинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
[4] Черкашин В.П.// Успехи мат.наук. 1995. Т.50. N2. С.225-226.

MULTIPLE POISSON BRACKETS

A.N. Panov[1]

It is proved that every Poisson bracket with more than two arguments locally coinsides with jacobian of some group of variables.The results are applied to Sklyanin brackets.

[1]Panov Alexander Nikolaevich,Mathematical Department of Samara State University