ОПЕРАТОР ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА-ЗИГМУНДА

Ю.Е. Ким[1]

В настоящей работе доказан аналог известной теоремы О'Нейла для про странств Лоренца Зигмунда, а также найден мультипликатор $L_{p,\alpha,q}$ относи тельно тензорного произведения.

1 ВВЕДЕНИЕ

Пусть $I = [0,1]$ и $S(I)$ – метрическое пространство всех измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций $x(t)$ на I. Для каждой функции $x \in S(I)$ введем функцию распределения $n_x(\tau)$ [1, с.81] :

$$n_x(\tau) = \mu\{t \in I \;:\; |x(t)| > \tau\}.$$

Банахово. пространство. $E \subset S(I)$ называеся.. симметричным.. (перестановочно- ..инвариантным) [1, с.123], если из неравенства $n_x(\tau) \leq n_y(\tau)$, справедливого для любого $\tau > 0$ и $y \in E$, следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$.

Важную роль в различных вопросах теории операторов и геометрии симметричных пространств (с. п.) (см., например, [2, p.169-171], [3], [4]) играет следующий билинейный оператор тензорного произведения.

Пусть E – с.п. и $x \in E$, $y \in E$. Тогда

$$B(x,y)(s,t) = (x \otimes y)(s,t) = x(s)y(t), \quad (s,t) \in I \times I.$$

В работах [3, 5, 6, 7] были найдены условия непрерывности оператора B в конкретных классах с.п.: в пространствах Лоренца, Марцинкевича, Орлича. Некоторые результаты для этого оператора в рамках общих с.п. были получены в [8]. В первой части статьи рассматриваются вопросы, связанные с изучением поведения оператора B в пространствах Лоренца-Зигмунда $L_{p,\alpha,q}$ [9, p.67]. Напомним, что пространство $L_{p,\alpha,q}$ ($1 < p < \infty, -\infty < \alpha < +\infty$, $1 \leq q \leq \infty$) представляет собой множество функций $x \in S(I)$, для которых $\|x\|_{p,\alpha,q} < \infty$, где

$$\|x\|_{p,\alpha,q} = \begin{cases} \left(\int_0^1 \left(x^*(s)s^{1/p}\ln^{-\alpha} e/s\right)^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q}, & q < \infty \\ vrai \sup\limits_{0<s<1} \left(x^*(s)s^{1/p}\ln^{-\alpha} e/s\right), & q = \infty. \end{cases}$$

[1]Ким Юлия Евгеньевна. Кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета

Хотя функционал $\|x\|_{p,\alpha,q}$ не субаддитивен, он эквивалентен норме $\|x\|'_{p,q} = \|x^{**}\|_{p,\alpha,q}$, где $x^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x^*(s)ds$, а $x^*(s)$ – невозрастающая перестановка функции $|x(s)|$ [1,с.83].

В частности, $L_{p,0,q} = L_{p,q}$ – хорошо известные пространства Лоренца. В [3] Р.О'Нейлом была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q, r, s \le \infty$. *Оператор B непрерывен из* $L_{p,r} \times L_{p,s}$ *в* $L_{p,q}(I \times I)$, *если и только, если выполнены условия :*
¿11) $max(s, r) \le q$ *;*
2)$p^{-1} + q^{-1} \le s^{-1} + r^{-1}$.

В статье получен аналог этой теоремы для более общей конструкции – пространств Лоренца-Зигмунда. Вторая часть работы посвящена нахождению мультипликатора $L_{p,\alpha,q}$ относительно тензорного произведения. Последнее понятие было введено в [8]. Там же были найдены оценки мультипликатора для произвольных с.п..

2 НЕПРЕРЫВНОСТЬ ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА-ЗИМУНДА

Отметим, что вопросы вложения пространств $L_{p,\alpha,q}$ функций, определенных на полуоси $(0, \infty)$, изучались в [9] (см. также [10]). В то же время, в связи с тем, что аналогичный результат для с.п. на отрезке выглядит иначе, а также для полноты изложения приведем соответствующую теорему для пространств $L_{p,\alpha,q}$ на I.

ТЕОРЕМА 2. $L_{p,\alpha,b} \subset L_{p,\beta,c}$ *тогда и только тогда, когда:*
1) если $b \le c$ *,то* $\alpha \le \beta$ *;*
2) если $b > c$ *, то* $\beta > \alpha + c^{-1} - b^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $b < c$, $\alpha \le \beta$. Предположим, что $x \in L_{p,\alpha,b}$. Используя убывание функции $x^*(t)$, а затем интегрируя по частям, получим

$$\int_0^1 \left(x^*(t)t^{1/p}\ln^{-\alpha} e/t\right)^b \frac{dt}{t} \ge [x^*(s)]^b \int_0^s \left(t^{1/p}\ln^{-\beta} e/t\right)^b \frac{dt}{t} \ge C\left(x^*(s)s^{1/p}\ln^{-\beta} e/s\right)^b,$$

где C – некоторая постоянная, зависящая только от p,b и β (в дальнейшем через C будут обозначаться и другие возникающие постоянные). Возводя в степень $\frac{c-b}{b} > 0$, получаем

$$\|x\|^{c-b}_{p,\alpha,b} \ge C\left(x^*(s)s^{1/p}\ln^{-\beta} e/s\right)^{c-b}.$$

Тогда

$$C\|x\|^{c-b}_{p,\alpha,b}(x^*(s)s^{1/p}\ln^{-\alpha} e/s)^b \frac{1}{s} \ge \left(x^*(s)s^{1/p}\ln^{-\beta} e/s\right)^c \frac{1}{s}.$$

Интегрируя по s от 0 до 1, окончательно получаем

$$\|x\|_{p,\beta,c} \le C\|x\|_{p,\alpha,b}. \qquad (1)$$

Итак, $x \in L_{p,\beta,c}$.

Если $b = c$, то (1) следует из свойств показательной и логарифмической функций.

Пусть теперь $L_{p,\alpha,b} \subset L_{p,\beta,c}$, $b \le c$. Рассмотрим характеристическую функцию $\chi_{(0,s)}$ интервала (0,s) $(0 < s \le 1)$. Тогда, ввиду вложения выполнено:

$$\|\chi_{(0,s)}\|_{p,\beta,c} \le C\|\chi_{(0,s)}\|_{p,\alpha,b},$$

то есть

$$s^{1/p}\ln^{-\beta} e/s \leq Cs^{1/p}\ln^{-\alpha} e/s.$$

Следовательно, $\beta \geq \alpha$.

2) Предположим, что $b > c$ и $\beta > \alpha + c^{-1} - b^{-1}$. Обозначим $\gamma = \beta - \alpha$. Очевидно, что $\gamma > c^{-1} - b^{-1}$. Используя неравенство Гельдера, получаем

$$||x||^c_{p,\beta,c} = \int_0^1 \left(x^*(t)t^{1/p}\ln^{-\alpha-\gamma}(e/t)\right)^c \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^1 \left(x^*(t)t^{1/p}\ln^{-\alpha} e/t\right)^b \frac{dt}{t}\right)^{c/b} \left(\int_0^1 \ln^{-k}(e/t)\frac{dt}{t}\right)^{1-c/b}, \tag{2}$$

где $k = \frac{\gamma bc}{b-c}$.

Тогда из (2) следует (1). Если $x \in L_{p,\alpha,b}$, то в силу (1): $x \in L_{p,\beta,c}$.

Пусть $L_{p,\alpha,b} \subset L_{p,\beta,c}$ и $b > c$. Предположим, что $\beta \leq \alpha + c^{-1} - b^{-1}$. Рассмотрим функцию

$$f(t) = \left[t^{1/p}(\ln e/t)^{-\alpha+1/b}(\ln\ln e/t)^{1/c}\right]^{-1}\chi_{(0,s)}(t),$$

где $0 < s < 1$.

Легко показать, что $f \in L_{p,\alpha,b}$. С другой стороны,

$$||f||^c_{p,\beta,c} = \int_0^s \left((\ln e/t)^{\alpha-\beta-1/b}(\ln\ln e/t)^{-1/c}\right)^c \frac{dt}{t} \geq \int_0^s (\ln e/t)^{-1}(\ln\ln e/t)^{-1}\frac{dt}{t} = \infty.$$

Возникает противоречие. Значит, $\beta > \alpha + c^{-1} - b^{-1}$.

Аналогичные рассуждения справедливы и в том случае, если $b = c = \infty$ или $c = \infty$. Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $1 < p \leq q_0 \leq q_1$, $q_0^{-1} + q_1^{-1} \geq p^{-1}$, $p^{-1} + z^{-1} = q_0^{-1} + q_1^{-1}$. *Оператор* B *непрерывен из* $L_{p,q_0} \times L_{p,q_1}$ *в* $L_{p,\alpha,q}$ *тогда и только тогда, когда:*
1) $\alpha \geq 0$ *, если* $q > z$;
2) $\alpha \geq p^{-1} + q^{-1} - q_0^{-1} - q_1^{-1}$ *, если* $q_1 \leq q \leq z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $q > z$. Тогда в силу теоремы О'Нейла:

$$B \ : \ L_{p,q_0} \times L_{p,q_1} \to L_{p,z}. \tag{3}$$

Используя теорему 2 , получаем

$$B \ : \ L_{p,q_0} \times L_{p,q_1} \to L_{p,\alpha,q}, \tag{4}$$

если $\alpha \geq 0$.

Предположим, что справедливо (4). Следовательно, для характеристических функций $\chi_{(0,s)}$, $\chi_{(0,t)}$ $(s < 1, t < 1)$ и некоторого $C > 1$ справедливо:

$$||\chi_{(0,s)} \otimes \chi_{(0,t)}||_{p,\alpha,q} \leq C||\chi_{(0,s)}||_{p,q_0}||\chi_{(0,t)}||_{p.q_1}.$$

Таким образом,

$$(st)^{1/p}\ln^{-\alpha}(e/st) \leq C(st)^{1/p},$$

Значит, $\alpha \geq 0$.

2) Пусть $q_1 \leq q \leq z$. В силу теоремы 3 из [5]

$$B \ : \ L_{p,q_0} \times L_{p,q_1} \to L_{p,\beta,q_1}, \tag{5}$$

где $\beta = p^{-1} - q_0^{-1}$.

Из (3), (5) и теоремы о связи билинейной интерполяции и комплексного метода интерполяции ([11], с.61)

$$B \ : \ [L_{p,q_0}, L_{p,q_0}]_\theta \times [L_{p,q_1}, L_{p,q_1}]_\theta \to [L_{p,z}, L_{p,\beta,q_1}]_\theta.$$

Так как $[L_{p,\alpha_0,q_0}, L_{p,\alpha_1,q_1}]_\theta = L_{p,\alpha,q}$ ([5]), где α и q определяются из равенств

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad \alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1,$$

то

$$B \ : \ L_{p,q_0} \times L_{p,q_1} \to L_{p,\gamma,q},$$

где $q^{-1} = (1-\theta)z^{-1} + \theta q_1^{-1}$, $\gamma = \theta\beta$.

В качестве θ и γ возьмем :

$$\theta = 1 - \frac{q_1^{-1} - q^{-1}}{p^{-1} - q_0^{-1}}, \quad \gamma = p^{-1} + q^{-1} - q_0^{-1} - q_1^{-1}.$$

Следовательно, для $\alpha \geq p^{-1} + q^{-1} - q_0^{-1} - q_1^{-1}$ справедливо (4).

Пусть теперь выполняется (4) и $q_1 \leq q \leq z$, $p = q_0$. Тогда $(st)^{1/p} \ln^{-\alpha}(e/st) \leq C(st)^{1/p}$, откуда $\alpha \geq 0$. Так как в нашем случае $p^{-1} + q^{-1} - q_0^{-1} - q_1^{-1} = 0$, то справедливо $\alpha \geq p^{-1} + q^{-1} - q_0^{-1} - q_1^{-1}$.

Рассмотрим случай: выполняется условие (4) и $q_1 \leq q \leq z$, $p < q_0$. Докажем, что $\alpha \geq p^{-1} + q^{-1} - q_0^{-1} - q_1^{-1}$. Предположим противное, то есть

$$B \ : \ L_{p,q_0} \times L_{p,q_1} \to L_{p,\alpha,q}$$

для некоторого $\alpha < p^{-1} + q^{-1} - q_0^{-1} - q_1^{-1}$.

Выберем $\varepsilon > 0$, для которого $\alpha < p^{-1} + q^{-1} - q_0^{-1} - q_1^{-1} - \varepsilon$. Можно найти такие α_0 и α_1 , что одновременно выполняются следующие соотношения:

$$-q_0^{-1} - \varepsilon/4 < \alpha_0 < -q_0^{-1}, \quad -q_1^{-1} - \varepsilon/4 < \alpha_1 < -q_1^{-1} \tag{6}$$

и $\alpha_i + p^{-1} > 0$ $(i = \overline{0,1})$.

Отметим, $h_{p,\alpha_0}^{-1}(s) = s^{-1/p}\ln^{\alpha_0} e/s \ \in L_{p,q_0}$ и $h_{p,\alpha_1}^{-1} \in L_{p,q_1}$. Ввиду [5] функция $B(h_{p,\alpha_0}^{-1}, h_{p,\alpha_1}^{-1})$ равноизмерима с функцией $h_{p,\alpha_0+\alpha_1+p^{-1}}^{-1}$, которая по предположению принадлежит пространству $L_{p,\alpha,q}$. Значит, $\alpha_0 + \alpha_1 + p^{-1} - \alpha < -q^{-1}$. Тогда

$$\alpha_0 + \alpha_1 + p^{-1} - \alpha > \alpha_0 + \alpha_1 + q_0^{-1} + q_1^{-1} - q^{-1} + \varepsilon$$

и

$$\alpha_0 + \alpha_1 < -q_0^{-1} - q_1^{-1} - \varepsilon.$$

С другой стороны, из (6)

$$\alpha_0 + \alpha_1 > -q_0^{-1} - q_1^{-1} - \varepsilon/2.$$

Следовательно, наше предположение неверно. Итак, $\alpha \geq p^{-1} + q^{-1} - q_0^{-1} - q_1^{-1}$. Теорема 3 доказана.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $q < \frac{q_0 q_1}{q_0 + q_1}$. Напомним, что две неотрицательные функции $x(t)$ и $y(t)$ называются эквивалентными на множестве $T \subset I$ (обозначим: $x \sim y$ $(t \in T)$), если для некоторых $C_1, C_2 > 0$ и всех $t \in T$

$$C_1 x(t) \leq y(t) \leq C_2 x(t).$$

Обозначим
$$\varphi_{p,q,b}(t)=\left(t^{1/p}\ln^{1/q}(e/t)(\ln\ln e/t)^{1/b}\right)^{-1}\chi_{(0,u)}(t),$$
где $q>b$, $0<u<2^{-4}$.

ЛЕММА 1. *При достаточно большом $C>0$*

$$n_\varphi(\tau)\sim N_{p,q,b}(\tau)=\tau^{-p}(\ln e\tau)^{-p/q}(\ln\ln e\tau)^{-p/b}\quad(\tau>C).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $\varphi(t)$ $(0<t<u)$ убывает и непрерывна, то функция $n_\varphi(\tau)$ является обратной к ней, то есть при $0<t<u$

$$n_\varphi(\varphi(t))=t.$$

Кроме того,
$$\ln^{p/q}(e/t)(\ln e\varphi(t))^{-p/q}=\{1/p+o(t)\}^{-p/q}\sim p^{p/q}.$$
Аналогичным образом получаем оценки для $(\ln\ln e/t)^{p/b}(\ln(\ln e\varphi(t)))^{-p/b}$.
Тогда
$$N_{p,q,b}(\varphi(t))\sim t=n_\varphi(\varphi(t))\quad(0<t<u).$$
Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Если $p<b_0<q_0$, $p<b_1<q_1$, то функции $B(\varphi_{p,q_0,b_0},\varphi_{p,q_1,b_1})$ и*

$$\psi=\psi(z)=z^{-1/p}(\ln e/z)^{-q_0^{-1}-q_1^{-1}+p^{-1}}(\ln\ln e/z)^{-b_0^{-1}-b_1^{-1}}\chi_{(0,u^2)}(z)$$

имеют эквивалентные функции распределения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть теперь $x=\varphi_{p,q_0,b_0}$, $y=\varphi_{p,q_1,b_1}$, $w=B(x,y)$ и $T=(0,u)$. Для любых чисел $\tau_0,\ \tau_1,\ \tau$ введем обозначения:

$$a(\tau)=\{(s,t)\in T\times T:x(s)y(t)>\tau\},$$

$$b(\tau_0,\tau_1)=\{(s,t)\in T\times T:x(s)>\tau_0,\ y(t)>\tau_1\}.$$

Тогда непосредственно проверяется, что для $\tau>0$

$$[(T\times T\setminus b(\sqrt{\tau},0))\cap a(\tau)]\subset a(\tau)\subset\{b(\sqrt{\tau},\sqrt{\tau})\cup[(T\times T\setminus b(\sqrt{\tau},0))\cap a(\tau)]\cup$$

$$\cup[(T\times T\setminus b(0,\sqrt{\tau}))\cap a(\tau)]\}.$$

Отсюда, переходя к мерам, получаем :

$$\mu[(T\times T\setminus b(\sqrt{\tau},0))\cap a(\tau)]\le n_w(\tau)\le n_x(\sqrt{\tau})n_y(\sqrt{\tau})+$$

$$+\mu[(T\times T\setminus b(\sqrt{\tau},0))\cap a(\tau)]+\mu[(T\times T\setminus b(0,\sqrt{\tau}))\cap a(\tau)].\tag{7}$$

Далее нас будет интересовать величина

$$\mu[(T\times T\setminus b(\sqrt{\tau},0))\cap a(\tau)]=\mu\{(s,t)\in T\times T: x(s)y(t)>\tau,\ x(s)\le\sqrt{\tau}\}=$$

$$=\int\limits_{\{s:x(s)\le\sqrt{\tau}\}} n_y(\tau(x(s))^{-1})ds.$$

Так как функции $x(s)$, $y(t)$ убывают, а также в силу леммы 1, для достаточно больших $\tau>0$

$$\mu[(T\times T\setminus b(\sqrt{\tau},0))\cap a(\tau)]=\int_{n_x(\sqrt{\tau})}^{u} n_y(\frac{\tau}{x(s)})ds\sim$$

$$\sim\tau^{-p}(\ln e\tau)^{-p/q_1}(\ln\ln e\tau)^{-p/b^1}\int_{\ln e/u}^{\ln e\tau} u^{-p/q_0}(\ln u)^{-p/b_0}du. \tag{8}$$

Для оценки интеграла в (8) докажем, что

$$I_{\alpha,\beta}(A)=\int_a^A z^{-\alpha}(\ln z)^{-\beta}dz\sim A^{-\alpha+1}\ln^{-\beta}A\ \ (0<\alpha<\beta<1). \tag{9}$$

Действительно, в силу убывания $(\ln z)^{-\beta}$.

$$I_{\alpha,\beta}\ge(\ln A)^{-\beta}\int_a^A z^{-\alpha}dz=\frac{A^{-\alpha+1}\ln^{-\beta}A}{1-\alpha}(1-\frac{a^{-\alpha+1}}{A^{-\alpha+1}}).$$

При достаточно больших А $\quad I_{\alpha,\beta}\ge C_1A^{-\alpha+1}\ln^{-\beta}A$.

Для доказательства в другую сторону воспользуемся интегрированием по частям

$$I_{\alpha,\beta}(A)=\frac{1}{1-\alpha}\int_a^A\ln^{-\beta}zd(z^{1-\alpha})\le\frac{1}{1-\alpha}[A^{-\alpha+1}\ln^{-\beta}A+\beta I_{\alpha,\beta+1}(A)].$$

Легко показать, что

$$\lim_{A\to\infty}I_{\alpha,\beta+1}(A)/I_{\alpha,\beta}(A)=0.$$

Следовательно, $I_{\alpha,\beta}(A)\le C_2A^{-\alpha+1}\ln^{-\beta}A$. Итак, (9) доказано. Из (8) и (9) получаем, что

$$\mu[(T\times T\setminus b(\sqrt{\tau},0))\cap a(\tau)]\sim\tau^{-p}(\ln e\tau)^{-p/q_0-p/q_1+1}(\ln\ln e\tau)^{-p/b_0-p/b_1}.$$

По симметрии аналогичное утверждение справедливо и для величины $[(T\times T\setminus b(0,\sqrt{\tau}))\cap a(\tau)]$. Следовательно, в силу (7) при достаточно больших $\tau>0$

$$C_1n_\psi(\tau)\le n_w(\tau)\le C[\tau^{-p}(\ln e\tau)^{-p/q_0-p/q_1}(\ln\ln e\tau)^{-p/b_0-p/b_1}+n_\psi(\tau)]\le C_2n_\psi(\tau).$$

Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $1<p<q_0\le q_1$ и $q<\frac{q_0q_1}{q_0+q_1}$. Оператор B действует из $L_{p,q_0}\times L_{p,q_1}$ в пространство $L_{p,\alpha,q}$ тогда и только тогда, когда*

$$\alpha>p^{-1}+q^{-1}-q_0^{-1}-q_1^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3 из [5]:

$$B \ : \ L_{p,q_0} \times L_{p,q_1} \to L_{p,\beta,q_1}, \quad \beta = p^{-1} - q_0^{-1}.$$

Так как $q < q_1$, то, используя теорему 2, получаем :

$$B \ : \ L_{p,q_0} \times L_{p,q_1} \to L_{p,\alpha,q},$$

где $\alpha > p^{-1} + q^{-1} - q_0^{-1} - q_1^{-1}$.

Пусть теперь B непрерывен из $L_{p,q_0} \times L_{p,q_1}$ в $L_{p,\alpha,q}(I \times I)$. Докажем, что $\alpha > p^{-1} + q^{-1} - q_0^{-1} - q_1^{-1}$.

Предположим противное : B действует из $L_{p,q_0} \times L_{p,q_1}$ в $L_{p,\alpha,q}(I \times I)$ для $\alpha \le p^{-1} + q^{-1} - q_0^{-1} - q_1^{-1}$. Рассмотрим функции φ_{p,q_0,b_0} и φ_{p,q_1,b_1} из леммы 2. Так как $b_0 < q_0$, то $\varphi_{p,q_0,b_0} \in L_{p,q_0}$. Действительно,

$$||\varphi_{p,q_0,b_0}||_{p,q_0}^{q_0} = \int_0^u (\ln e/s)^{-1} (\ln \ln e/s)^{-q_0/b_0} \frac{ds}{s} < \infty.$$

Аналогично, для $b_1 < q_1$ $\varphi_{p,q_1,b_1} \in L_{p,q_1}$. Тогда, используя предположение, получаем $B(\varphi_{p,q_0,b_0}, \varphi_{p,q_1,b_1}) \in L_{p,\alpha,q}$. Так как по условию $q < \frac{q_0 q_1}{q_0+q_1}$, то существуют такие числа b_0 и b_1 , что

$$q < \frac{b_0 b_1}{b_0 + b_1} \qquad (q^{-1} > b_0^{-1} + b_1^{-1}). \tag{10}$$

Из леммы 2 следует, что $n_w(\tau) \ge C n_\psi(\tau)$. Тогда $\psi \in L_{p,\alpha,q}$. С другой стороны,

$$||\psi||_{p,\alpha,q}^q = \int_0^{u^2} (\ln e/z)^{-1} (\ln \ln e/z)^{-q/b_0 - q/b_1} \frac{dz}{z} = \infty,$$

так как из (10) $-b_0^{-1} - b_1^{-1} + q^{-1} > 0$. Следовательно, $\psi \notin L_{p,\alpha,q}$. Наше предположение неверно и теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы видно, что условие $\alpha > p^{-1} + q^{-1} - q_0^{-1} - q_1^{-1}$ достаточно для непрерывности оператора B из $L_{p,q_0} \times L_{p,q_1}$ в $L_{p,\alpha,q}$ и в случае, когда $\frac{q_0 q_1}{q_0+q_1} \le q \le q_1$ (случай $q \ge q_1$ разобран в теореме 3). Вопрос о необходимости в этой ситуации такого условия остается открытым.

3 ..МУЛЬТИПЛИКАТОР.. ПРОСТРАНСТВА........ ЛОРЕНЦА-ЗИГМУНДА

Рассмотрим теперь задачу нахождения максимального среди с.п. E со свойством:

$$B \ : \ L_{p,\alpha,q} \times E \to L_{p,\alpha,q}.$$

Мультипликатором E назовем множество $\Phi(E)$ всех измеримых на I функций $x(s)$, для которых $x \otimes y \in E(I \times I)$ для любых $y \in E(I)$.

Отметим, что для каждого с.п. E

$$\Phi(E) \subset E. \tag{11}$$

Напомним некоторые обозначения. Оператором растяжения будем называть

$$\sigma_\tau y(t) = y(\tau^{-1}t)\chi_{[0,1]}(\tau^{-1}t).$$

Он непрерывен в любом с.п. E [1, с.131]. Поэтому существуют числа

$$\alpha_E = \lim_{\tau\to 0+}\frac{\ln\|\sigma_\tau\|_{E\to E}}{\ln\tau}, \quad \beta_E = \lim_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\|\sigma_\tau\|_{E\to E}}{\ln\tau},$$

которые называют нижним и верхним индексами Бойда пространства E [1, с.134].

ТЕОРЕМА 5. *Если* $1 \le q \le p < \infty, \quad \alpha \le 0$ *,то*

$$\Phi(L_{p,\alpha,q}) = L_{p,\alpha,q}. \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, из (12) сразу же получаем

$$\Phi(L_{p,\alpha,q}) \subset L_{p,\alpha,q}. \tag{13}$$

Для доказательства обратного вложения достаточно показать, что B непрерывен из $L_{p,\alpha,q} \times L_{p,\alpha,q}$ в $L_{p,\alpha,q}(I\times I)$. В [8] показано, что это равносильно существованию $C>0$, для которого при всех $m\in\mathbf{N}, \quad \alpha\in\mathbf{R}^m$

$$\sup\|\sum_{k=1}^m \alpha_k v_k\|_{p,\alpha,q} \le C\sup\|\sum_{k=1}^m \alpha_k\chi_{(\frac{k-1}{m};\frac{k}{m}]}\|_{p,\alpha,q}, \tag{14}$$

где верхняя грань берется по всем наборам дизъюнктных функций v_k, $n_{v_k}(\tau) = \frac{1}{m}n_v(\tau) \ (\tau>0), \quad v\in L_{p,\alpha,q}$ и $\|v\|_{p,\alpha,q} = 1$.

В случае $1\le q<p$ это показано в [4, p.221] (пространства $L_{p,\alpha,q}$ совпадают с $L_{w,q}$, где $w(t) = t^{q/p-1}\ln^{-\alpha q} e/t$).

Если $q=p$, то пространство $L_{p,\alpha,q}$ представляют собой пространства Орлича с полумультипликативной фундаментальной функцией. Следовательно, из теоремы [2, p.58] получаем (12).

ТЕОРЕМА 6. *Пусть* $1<p\le q\le\infty, \ 0\le\alpha<\infty$. *Тогда*

$$\Phi(L_{p,\alpha,q}) = L_p. \tag{15}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что

$$\Phi(L_{p,\alpha,q}) \subset L_p. \tag{16}$$

Покажем сначала, что нижний индекс Бойда пространства $L_{p,\alpha,q}$ $\alpha_E = p^{-1}$. Рассмотрим норму $\sigma_\tau x$ в $L_{p,\alpha,q}$ $(q<\infty)$. Стандартные выкладки показывают, что

$$\|\sigma_\tau x\| \le \tau^{1/p}M_\phi(\tau)\|x\|_{p,\alpha,q}, \tag{17}$$

где $M_\phi(\tau) = \sup\limits_{0<s<1, 0<s\tau<1}\frac{\phi(s\tau)}{\phi(s)}$ – функция растяжения функции $\phi(x) = \ln^{-\alpha} e/x$. С другой стороны,

$$\|\sigma_\tau\| \ge \sup_{0<t\le 1}\frac{\|\sigma_\tau\chi_{(0,t]}\|}{\|\chi_{(0,t]}\|} = \tau^{1/p}M_\phi(\tau). \tag{18}$$

Из (17) и (18): $||\sigma_\tau|| = \tau^{1/p} M_\phi(\tau)$. Тогда

$$\alpha_E = p^{-1}, \tag{19}$$

так как при $\alpha \geq 0$

$$M_\phi(\tau) = \left(\sup_{0<s<1} \frac{\ln(e/s)}{\ln(e/s\tau)}\right)^\alpha = 1.$$

Аналогично рассматривается случай $q = \infty$. Из (19), ввиду теоремы 2 из [8], получаем (16). Кроме того,

$$||x||_p \leq 2||x||_{\Phi(L_{p,\alpha,q})}. \tag{20}$$

Для доказательства вложения

$$L_p \subset \Phi(L_{p,\alpha,q}) \tag{21}$$

достаточно показать, что $B\ :\ L_p \times L_{p,\alpha,q} \to L_{p,\alpha,q}$. Для $\alpha = 0$ это показано в [7]. Рассмотрим случай $\alpha > 0$. Докажем, что для $\beta > 0$

$$L_p \subset \Phi(L_{p,\beta,\infty}). \tag{22}$$

Пусть $x \in L_p,\ \ y \in L_{p,\beta,\infty}$ и $||y||_{p,\beta,\infty} \leq 1$. Тогда для $0 < t \leq 1$

$$y^*(t) \leq t^{-1/p} \ln^{-\beta} e/t. \tag{23}$$

Обозначим

$$\hat{x}(s) = \max\{1, |x(s)|\}.$$

Известно [5], что для $\tau > 1$

$$n_\rho(\tau) \sim \tau^{-p} \ln^{p\beta} e\tau, \tag{24}$$

где $\rho(t) = h_{p,\beta}^{-1}(t) = t^{-1/p} \ln^\beta e/t$. Тогда из (23) и (24):

$$n_{x\otimes y}(\tau) \leq \mu\{(s,t) \in I \times I : \hat{x}(s)\rho(t) > \tau\} = \int_0^1 n_\rho(\tfrac{\tau}{\hat{x}(s)}) ds \sim$$
$$\sim \int_0^1 \tau^{-p} (\hat{x}(s))^p \ln^{p\beta} \tfrac{e\tau}{\hat{x}(s)} ds \sim ||\hat{x}||_p^p \tau^{-p} \ln^{p\beta} e\tau.$$

Таким образом,

$$n_{x\otimes y}(\tau) \leq C||\hat{x}||_p^p n_\rho(\tau). \tag{25}$$

Так как $\rho \in L_{p,\beta,\infty}$, то из (25) $x \otimes y \in L_{p,\beta,\infty}$. Итак, (22) доказано как вложение множеств. Тогда ввиду (20) и теоремы Банаха об обратном операторе, существует $C > 0$, для которого $||x||_{\Phi(L_{p,\beta,\infty})} \leq C||x||_p$, где C зависит только от p, β. Таким образом,

$$B\ :\ L_p \times L_{p,\beta,\infty} \to L_{p,\beta,\infty}.$$

Так как $B\ :\ L_p \times L_p \to L_p$, то, используя теорему о связи билинейной интерполяции и комплексного метода, получаем:

$$B\ :\ L_p \times L_{p,\alpha,q} \to L_{p,\alpha,q},$$

где $\alpha = \theta\beta,\ \ q^{-1} = (1-\theta)p^{-1}$. Найдем числа β и $\theta : \beta = \alpha/\theta,\ \ \theta = 1 - p/q$.

Итак, оператор B непрерывен из $L_p \times L_{p,\alpha,q}$ в $L_{p,\alpha,q}$. Теорема 5 доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю С.В. Асташкину за постоянную помощь и внимание к работе.

Литература

[1] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

[2] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces 2, Function spaces. Berlin:Springer-Verlag, 1979.

[3] Milman M. Some new function spaces and their tensor products //Notes de Mat. 1978. V.20. P.1-128.

[4] Carothers N.Z. Rearrangement invariant subspaces of Lorentz function spaces //Isr. J. Math., 1981, V.40. N.3-4. P.217-228.

[5] Milman M. Tensor products of function spaces//Amer.Math.Soc. 1976. V.82. N4. P.626-628.

[6] O'Neil R. Integral transforms and tensor products in Orlicz spaces and L(p,q) spaces //J. d'Analyse Math. 1968. V.21. P.1-276.

[7] Асташкин С.В. О билинейном мультипликативном операторе //Исследования по теории фукций многих вещественных переменных. Ярославль: Изд. Яросл. гос. ун-та., 1982. С.3-15.

[8] Асташкин С.В. О мультипликаторе симметричного пространства относительно тензорного произведения //Функц.анал. и его прилож. 1996. Т.30. Вып.3.

[9] Bennett C., Rudnick K. On Lorentz-Zygmund spaces. Dissertationes Math. 175, Warszawa, 1976. 67pp.

[10] Sharpley R. Counterexamples for classical operators on Lorentz-Zygmund spaces//Studia Math. 1980. V.68. P.141-158.

[11] Кальдерон А.П. Промежуточные пространства и интерполяция, комплексный метод.- Математика: Сб. переводов, 1965. 9:3. С.56-129.

OPERATOR OF TENSOR PRODUCT ON LORENTZ-ZYGMUND SPACES

J.E. Kim[1]

In this paper we prove for Lorentz Zygmund spaces $L_{p,\alpha,q}$ the analogue of the well known theorem of R.O'Neil . Finally we stady multiplicator of $L_{p,\alpha,q}$ concerning to projective tensor product.

[1]Kim Julia Evgenjevna, Dept. of MATHEMATICS Samara State University