ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОРЯДКА $\mathbf{n > 2}$

Л.М. Беркович, С.Ю. Попов [1]

В данной статье излагаются три предложенные С.Ли, но малоизвестные стратегии интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) n го порядка ($n \geq 3$), допускающих r параметрическую группу Ли точечных симметрий. Показано, как структура соответствующей группы Ли связана с выбором стратегии интегрирования.

1 Введение

С появлением ОДУ в математических теориях и приложениях сразу возникла проблема их аналитического интегрирования. Многие математики XVIII – XIX веков занимались поиском конструктивных методов точных решений, но примерно до середины прошлого века, когда выдающийся норвежский математик Софус Ли провел глубокое исследование процедуры интегрирования, основанной на инвариантности дифференциального уравнения относительно некоторой непрерывной группы преобразований, их деятельность относилась скорее к сфере искусства, нежели науки. Открытие Ли сразу же унифицировало и значительно расширило имеющиеся методы интегрирования. Однако развитие качественных методов в XX веке, а также появление ЭВМ и реализация на них достаточно трудоемких алгоритмов - все это привело к отходу от классической постановки задачи. Тем не менее в последнее время возрождается интерес к методам ДУ, существенно связанным с общей алгеброй.

В данной статье излагаются три предложенные Ли [1,2] , но малоизвестные стратегии интегрирования ОДУ-n ($n > 2$)

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1.1}$$

которые можно найти с бо́льшими или меньшими подробностями в [3],[6],[7]. При этом проведены более полные доказательства некоторых положений и исправлены неточности в выкладках и рассуждениях, приведенных в [6]. Эти стратегии являются развитием основного наблюдения С.Ли о том, что знание достаточно большой группы симметрий ОДУ зачастую позволяет существенно понизить его порядок, а иногда проинтегрировать его в квадратурах, и основаны на групповом анализе

[1] Беркович Лев Мейлихович, Попов Сергей Юрьевич. Кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета

структуры алгебры Ли инфинитезимальных операторов (векторных полей, генераторов), допускаемых ОДУ. Фундаментальное наблюдение, заключающееся в том, что почти вся информация о группе Ли содержится в ее алгебре Ли, позволяет переформулировать результаты в терминах многопараметрической группы точечных преобразований, допускаемой ОДУ. Эти результаты уже вошли во многие классические учебники по групповому анализу (см.,например, [3],[5–7]).К сожалению, в отличие от случая $n = 2$, который детально разобран (см.,например, [8]), данные стратегии не носят общего характера и применимы лишь к ОДУ, допускающим алгебру Ли инфинитезимальных операторов с ограничениями на ее структуру. Конкретнее, уравнения 1–го порядка с известной однопараметрической группой симметрий может быть решено в квадратурах. В случае групп симметрий высших размерностей ситуация более тонкая: вообще, говоря, невозможно понизить порядок ОДУ-n ($n > 2$), инвариантного относительно r-параметрической группы симметрий, на r единиц, пользуясь только квадратурами.

Построение статьи следующее:

Во 2-м параграфе напоминаются основы группового анализа дифференциальных уравнений, более подробное изложение которых при желании можно найти в [4-8];

В 3-м параграфе излагается стратегия интегрирования, основанная на возможности найти в r-мерной ($r > 1$) алгебре Ли инфинитезимальных операторов, допускаемой ОДУ, подалгебру с одномерным идеалом;

В 4-м параграфе предлагается стратегия интегрирования, основанная на существовании в n-мерной алгебре Ли симметрий ОДУ ($n - 1$)-мерного идеала;

В 5-м параграфе описана возможность использования дифференциальных инвариантов для понижения порядка ОДУ.

2 Предварительные сведения

Напомним известные понятия из группового анализа дифференциальных уравнений, которые более подробно излагаются в цитированной выше литературе.

Рассматривается локальная однопараметрическая группа G преобразований плоскости (x, y) :

$$\widetilde{x} = \varphi(x, y, \varepsilon) \tag{2.1}$$

$$\widetilde{y} = \psi(x, y, \varepsilon), \tag{2.2}$$

с которой связан инфинитезимальный оператор

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.3}$$

где

$$\xi(x, y) = \frac{\partial\varphi(x, y, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \tag{2.4}$$

$$\eta(x, y) = \frac{\partial\psi(x, y, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \tag{2.5}$$

являются координатами касательного вектора к G-орбите точки (x, y) в ней самой.

Очевидно, что каждое преобразование (2.1)-(2.2) переменных (x, y) индуцирует преобразование производных произвольного порядка зависимой переменной y по независимой переменной x. Действительно, производная 1-го порядка преобразуется по правилу :

$$\widetilde{y}' = \frac{d\widetilde{y}}{d\widetilde{x}} = \frac{\psi'_x + y'\psi'_y}{\varphi'_x + y'\varphi'_y} \equiv \psi_1(x, y, y', \varepsilon). \tag{2.6}$$

Индуктивно рассуждая, приходим к формулам :

$$\widetilde{y}^{(k)} = \frac{d\widetilde{y}^{(k-1)}}{d\widetilde{x}} = \frac{(\psi_{k-1})'_x + y'(\psi_{k-1})'_y + \ldots + y^{(k)}(\psi_{k-1})'_{y^{(k-1)}}}{\varphi'_x + y'\varphi'_y} \equiv \psi_k(x, y, y', \ldots, y^{(k)}, \varepsilon),$$

$$k = \overline{2, n}. \tag{2.7}$$

При добавлении к формулам (2.1),(2.2) формул (2.6),(2.7) получаем n-е продолжение локальной однопараметрической группы G, обозначаемое $G^{(n)}$ и действующее в пространстве переменных $(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$.

Очевидно, что касательный вектор к $G^{(n)}$-орбите точки $(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ имеет координаты, вычисляемые по формулам :

$$\xi(x, y) = \frac{\partial\varphi(x, y, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$$

$$\eta(x, y) = \frac{\partial\psi(x, y, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$$

$$\eta^{(i)}(x, y, \ldots, y^{(i)}) = \frac{\partial\psi_i(x, y, \ldots, y^{(i)}, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0}, \ i = \overline{1, n}. \tag{2.8}$$

При этом справедливы следующие соотношения :

$$\eta^{(i)} = \frac{d\eta^{(i-1)}}{dx} - y^{(i)}\frac{d\xi}{dx}, \ i = \overline{1, n}. \tag{2.9}$$

$$\eta^{(i)} = \frac{d^i}{dx^i}(\eta - y'\xi) - y^{(i+1)}\xi, \ i = \overline{1, n}. \tag{2.9^1}$$

Определение 1. Дифференциальный оператор

$$X^{(n)} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x, y, y')\frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + \eta^{(n)}(x, y, y', \cdots, y^{(n)})\frac{\partial}{\partial y^{(n)}} \tag{2.10}$$

называется n-м продолжением инфинитезимального оператора (2.3)

Определение 2. Говорят, что ОДУ-n

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2.11}$$

допускает локальную однопараметрическую группу точечных преобразований G, если гиперповерхность, определяемая уравнением (2.11), инвариантна относительно действия продолжения $G^{(n)}$. При этом будем говорить, что (2.11) допускает инфинитезимальный оператор, связанный с G, а сам оператор будем называть симметрией уравнения (2.11).

Множество симметрий ОДУ-n образует алгебру Ли, т.е. является линейным пространством с операцией коммутирования дифференциальных операторов.

Всюду в дальнейшем ОДУ-n (2.11) допускает r-мерную алгебру Ли симметрий с базисом $X_i, i = \overline{1, r}, \ r > 1$. Как показал Ли, $r \leq n + 4$ (граница достигается, например, для уравнения $y^{(n)} = 0$). Мы предполагаем, что алгебра Ли симметрий (2.11) заранее нам известна, так как, вообще говоря, отыскание симметрий (2.11) - отдельная, зачастую очень сложная задача, связанная с решением определяющего уравнения Ли. При этом надо отметить, что нередки случаи, когда точечные симметрии можно найти, исходя из вида уравнения или из свойств естественного процесса, моделью которого данное уравнение является.

Пусть

$$A=\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+\cdots+\omega(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} \tag{2.12}$$

– оператор полного дифференцирования по x в силу (2.11).

Следующее предложение дает критерий принадлежности инфинитезимального оператора алгебре Ли симметрий уравнения (2.11):

Предложение 1. *Уравнение (2.11) допускает инфинитезимальный оператор*

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

тогда и только тогда, когда $[X^{(n-1)},A]=-(A(\xi(x,y)))A$.

Доказательство. Пусть $\varphi_i(x,y,y',...,y^{(n-1)}),\ i=\overline{1,n}$ – полный набор функционально независимых первых интегралов (2.11); тогда, в силу определения оператора A, $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – функционально независимые решения уравнения

$$A\varphi=0. \tag{2.13}$$

Уравнение (2.11) допускает инфинитезимальный оператор X тогда и только тогда, когда $X^{(n-1)}\varphi_i$ является первым интегралом (2.11), $i=\overline{1,n}$. Действительно, утверждение "X – симметрия (2.11)" эквивалентно тому, что локальная однопараметрическая группа точечных преобразований $\widetilde{x}=\exp\{\varepsilon X\}x; \widetilde{y}=\exp\{\varepsilon X\}y$ переводит решение (2.11) в решение (2.11). Это в свою очередь эквивалентно тому, что если $y=y(x)$ – произвольное решение (2.11), а $\varphi(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ – произвольный первый интеграл (2.11), то

$$X^{(n-1)}\varphi|_{y=y(x)}=\frac{\partial\varphi(\widetilde{x}(x,y,\varepsilon),\widetilde{y}(x,y,\varepsilon),\ldots,\widetilde{y}^{(n-1)}(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)},\varepsilon))}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0}=const.,$$

т.е. $X^{(n-1)}\varphi$ – первый интеграл (2.11).

Используя это, получаем, что множество решений (2.13) и

$$[X^{(n-1)},A]\varphi=0, \tag{2.14}$$

в силу равенства $[X^{(n-1)},A]\varphi_i=-A(X^{(n-1)}\varphi_i),\ i=\overline{1,n}$, совпадают тогда и только тогда, когда X является симметрией (2.11). С другой стороны, уравнения (2.13) и (2.14) эквивалентны тогда и только тогда, когда $[X^{(n-1)},A]=\lambda(x,y,y',...,y^{(n-1)})A$. Найдем λ, сравнив первые координаты операторов A и $[X^{(n-1)},A]$:

$$[X^{(n-1)},A]=(-A(\xi(x,y)))\frac{\partial}{\partial x}+\ldots;\ A=\frac{\partial}{\partial x}+\ldots$$

Итак, $\lambda=-A(\xi(x,y))$, а X является симметрией (2.11) тогда и только тогда, когда $[X^{(n-1)},A]=-A(\xi(x,y))A$. •

3 Первая стратегия интегрирования: нормальные формы генераторов в пространстве переменных

Напомним, что (2.11), по нашему предположению, допускает r-мерную алгебру Ли инфинитезимальных операторов, где $r\geq 2$. Возьмем некоторый инфинитезимальный оператор из алгебры Ли симметрий уравнения (2.11), скажем, X_1, и приведем его к нормальной форме, т.е. перейдем к новым переменным $\mathfrak{t}$ (независимая) и s (зависимая), определяемым системой $X_1 t = 0,\ X_1 s = 1$, в которых (2.11) примет вид:

$$s^{(n)} = \Omega(t, s', \ldots, s^{(n-1)}), \tag{3.1}$$

а векторные поля $X_1,\ X_i,\ (i = \overline{2, r})$, будут соответственно:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial s},$$

$$X_i^{(n-1)} = \overline{\xi}_i(t, s)\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\eta}_i(t, s)\frac{\partial}{\partial s} + \overline{\eta}_i^{(1)}(t, s, s')\frac{\partial}{\partial s'} + \ldots + \overline{\eta}_i^{(n-1)}(t, s, s', \ldots, s^{(n-1)})\frac{\partial}{\partial s^{(n-1)}}.$$

Уравнение (3.1) фактически является уравнением (n-1)-го порядка (достаточно за новую зависимую переменную принять s').

Естественно возникает вопрос: каковы условия, при которых симметрии

$$Y_i = X_i^{(n-1)} - \overline{\eta}(t, s)\frac{\partial}{\partial s} \tag{3.2}$$

будут являться симметриями (3.1) относительно переменных (t, s')?

Ответ на него дает

Теорема 1. *Для того, чтобы уравнение (3.1) допускало $r - 1$ симметрию $Y_i = X_i^{(n-1)} - \overline{\eta}(t, s)\frac{\partial}{\partial s}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$[X_1, X_i] = \lambda_i X_1,\ \lambda_i = const. \tag{3.3}$$

Доказательство.

$$A = \frac{\partial}{\partial t} + s'\frac{\partial}{\partial s} + \ldots + \Omega(t, s', \ldots, s^{(n-1)})\frac{\partial}{\partial s^{(n-1)}}$$

– оператор полного дифференцирования в силу (3.1), рассматриваемого как ОДУ-n, в свою очередь

$$\overline{A} = A - s'\frac{\partial}{\partial s} \tag{3.4}$$

есть оператор полного дифференцирования в силу (3.1), рассматриваемого как ОДУ–$(n-1)$ относительно s' как зависимой переменной. Используя предложение 1, получаем $[X_i^{(n-1)}, A] = -(A\overline{\xi}_i)A$, или, используя (3.3), (3.4),

$$[Y_i + \overline{\eta}_i(t, s)\frac{\partial}{\partial s}, \overline{A} + s'\frac{\partial}{\partial s}] = [Y_i, \overline{A}] + (\overline{\eta}_i^{(1)} - \overline{A}(\overline{\eta}_i))X_1 + s'[X_i^{(n-1)}, X_1] = -(A(\overline{\xi}_i))(\overline{A} + s'\frac{\partial}{\partial s}),$$

откуда

$$[Y_i, \overline{A}] = -(\overline{\eta}_i^{(1)} - \overline{A}(\overline{\eta}_i) + (A(\overline{\xi}_i))s')X_1 - s'[X_i^{(n-1)}, X_1] - (A(\overline{\xi}_i))\bar{A} \tag{3.5}$$

В силу предложения 1, Y_i – симметрия (3.1) тогда и только тогда, когда

$$[Y_i, \overline{A}] = -(\overline{A}(\overline{\xi}_i))\overline{A}, \tag{3.6}$$

что выполняется в том и только том случае, когда

$$[X_i^{(n-1)}, X_1] = \tau_i X_1 + \mu_i \bar{A}, \tag{3.7}$$

где τ_i и μ_i – некоторые функции. Используя (3.5), (3.6), (3.7), получаем

$$(-\overline{A}(\overline{\xi}_i) + s'\mu_i + A(\overline{\xi}_i))\overline{A} + (\overline{\eta}_i^{(1)} - \overline{A}(\overline{\eta}_i) + A(\overline{\xi}_i)s' + s'\tau_i)X_1 = 0. \tag{3.8}$$

Тогда

$$-\overline{A}(\overline{\xi}_i) + s'\mu_i + A(\overline{\xi}_i) = 0, \tag{3.9}$$

$$\overline{\eta}_i^{(1)} - \overline{A}(\overline{\eta}_i) + A(\overline{\xi}_i)s' + s'\tau_i = 0. \tag{3.10}$$

Учитывая, что $\overline{\eta}_i^{(1)} = A(\overline{\eta}_i) - s'A(\overline{\xi}_i)$, получаем:

$$\tau_i = -\frac{\partial\overline{\eta}_i}{\partial s};\ \mu_i = -\frac{\partial\overline{\xi}_i}{\partial s} \tag{3.11}$$

Подставляя (3.11) в (3.7) и сравнивая покоординатно с разложением

$$[X_i^{(n-1)}, \frac{\partial}{\partial s}] = -\frac{\partial\overline{\xi}_i(t,s)}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial\overline{\eta}_i(t,s)}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial\overline{\eta}_i^{(1)}(t,s,s')}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s'} - \ldots -$$

$$-\frac{\partial\overline{\eta}_i^{(n-1)}(t,s,...,s^{(n-1)})}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s^{(n-1)}},$$

получаем систему равенств, из которых нетривиальными являются

$$\frac{\partial\overline{\eta}_i^{(k)}(t,s,\ldots,s^{(k)})}{\partial s} = \frac{\partial\overline{\xi}_i(t,s)}{\partial s}s^{(k+1)},\ i = \overline{2,r},\ k = \overline{1,n-2}, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial\overline{\eta}_i^{(n-1)}(t,s,\ldots,s^{(n-1)})}{\partial s} = \frac{\partial\overline{\xi}_i(t,s)}{\partial s}\Omega(t,s',\ldots,s^{(n-1)}). \tag{3.13}$$

Очевидно, что (3.12) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial\overline{\xi}_i}{\partial s} = \frac{\partial\overline{\eta}_i^{(1)}}{\partial s} = \ldots = \frac{\partial\overline{\eta}_i^{(n-1)}}{\partial s} = 0,\ i = \overline{2,r}. \tag{3.14}$$

В силу (3.14) и определения $\overline{\eta}_i^{(1)}$, получаем

$$\frac{\partial\overline{\eta}_i^{(1)}(t,s,s')}{\partial s} = \frac{\partial^2\overline{\eta}_i(t,s)}{\partial s\partial t} + \frac{\partial^2\overline{\eta}_i(t,s)}{\partial s^2}s' = 0.$$

Это в свою очередь эквивалентно тому, что

$$\frac{\partial\overline{\eta}_i(t,s)}{\partial s} = const.$$

Итак, $\mu_i = 0,\ \tau_i = \lambda_i = const$, т.е., используя (3.7), получили $[X_i, X_1] = \lambda_i X_1$. •

На основании доказанного предлагается следующая стратегия интегрирования: на первом шаге выбрать X_1 (как линейную комбинацию базисных элементов) такой, что для него можно найти максимально возможное число симметрий X_a, удовлетворяющих условию (3.2); затем переходим к новым переменным, в которых X_1 имеет нормальную форму, а уравнение становится ОДУ на единицу меньшего порядка при выборе производной зависимой переменной в качестве новой зависимой переменной; при этом оно "наследует" симметрии Y_a, определяемые (3.1); повторяем процедуру для симметрий Y_a.

Пример 1. $4y^2y''' = 18yy'y'' - 15y'^3$.

Так же, как и остальные примеры, встречающиеся в настоящей работе, этот пример носит иллюстративный характер и может быть решен другими известными методами.

Данное уравнение допускает 3-х мерную алгебру Ли с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x};\; X_2^{(2)} = x\frac{\partial}{\partial x} - y'\frac{\partial}{\partial y'} - 2y''\frac{\partial}{\partial y''};$$

$$X_3^{(2)} = y\frac{\partial}{\partial y} + y'\frac{\partial}{\partial y'} + y''\frac{\partial}{\partial y''}.$$

При этом $[X_1, X_2] = X_1,\; [X_1, X_3] = 0.$

Следует отметить, что при коммутировании трансляций и масштабных преобразований получаются только трансляции, так что любая алгебра Ли, состоящая из таких преобразований, разрешима.

Приведем X_1 к нормальной форме с помощью преобразования годографа: $t = y; s = x.$

Преобразованное уравнение:

$$s''' = \frac{3s''^2}{s'} + \frac{18ts's'' + 15s'^2}{4t^2 s'}.$$

Его симметрии:

$$Y_2 = s'\frac{\partial}{\partial s'} + s''\frac{\partial}{\partial s''};\; Y_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - s''\frac{\partial}{\partial s''};\; [Y_2, Y_3] = 0$$

Приводя Y_2 к нормальной форме заменой $v = \log t; u = \log s'$, получаем уравнение

$$u'' = 2u'^2 + \frac{11}{2}u' + \frac{9}{2}$$

с разделяющимися переменными, интегрируя которое и возвращаясь к исходным координатам, получаем общее решение уравнения в квадратурах:

$$x = c_2 \int \frac{dy}{y^{\frac{11}{8}}(\cos(\frac{\sqrt{23}}{4}\log c_1 y))^{1/2}} + c_3.$$

4 Вторая стратегия интегрирования: нормальная форма генераторов в пространстве первых интегралов

Пусть выполняются условия:

a) $r = n$;

b) базисные симметрии алгебры Ли инфинитезимальных операторов, допускаемых (2.11), - $X_i, i = \overline{1,n}$ - транзитивны в пространстве первых интегралов, т.е. тождество $\rho_1 X_1^{(n-1)} + \ldots + \rho_n X_n^{(n-1)} + \nu A \equiv 0$ выполняется тогда и только тогда, когда функции $\rho_i(x, y, \ldots, y^{(n-1)}),\; i = \overline{1,n},\; \nu(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$ тождественно нулевые.

Выясним условия существования решения системы:

$$X_1^{(n-1)}\varphi = (\xi_1\frac{\partial}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial}{\partial y} + \ldots + \eta_1^{(n-1)}\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}})\varphi = 0 \quad (4.1)$$

$$X_i^{(n-1)}\varphi = (\xi_i\frac{\partial}{\partial x} + \eta_i\frac{\partial}{\partial y} + \ldots + \eta_i^{(n-1)}\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}})\varphi = 0 \quad (4.2)$$

$$A\varphi = (\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + \ldots + \omega\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}})\varphi = 0 \tag{4.3}$$

Как известно, система однородных ДУ в частных производных первого порядка (4.2)–(4.3) нетривиально разрешима, если и только если коммутаторы между $X_i^{(n-1)}$, $i = \overline{2,r}$ и A являются линейной комбинацией (с коэффициентами, являющимися, вообще говоря, функциями) этих же операторов. В силу предложения 1 ,$[X_i^{(n-1)}, A] = (-A\xi_i)A$. Соотношение $[X_i, X_j] = C_{ij}^1 X_1 + C_{ij}^k X_k$, $i,j,k = \overline{2,n}$ не противоречит условию разрешимости (см. условие b) тогда и только тогда, когда

$$C_{ij}^1 = 0, \quad i,j = \overline{2,n}. \tag{4.4}$$

Таким образом, система (4.2)–(4.3) нетривиально разрешима тогда и только тогда, когда $X_i, i = \overline{2,n}$ порождают $(n-1)$-мерную подалгебру в исходной алгебре Ли.

Пусть теперь φ есть общее решение системы (4.2)–(4.3) и уравнения (4.1), тогда необходимо должно выполняться следующее соотношение:

$$[X_1^{(n-1)}, X_i^{(n-1)}]\varphi = X_1^{(n-1)}(X_i^{(n-1)}\varphi) - X_i^{(n-1)}(X_1^{(n-1)}\varphi) = X_1^{(n-1)}(0) - X_i^{(n-1)}(1) = 0 \tag{4.5}$$

С другой стороны,

$$[X_1^{(n-1)}, X_i^{(n-1)}]\varphi = C_{1i}^1 X_1^{(n-1)}(\varphi) + C_{1i}^k X_k^{(n-1)}(\varphi) = C_{1i}^1, i,k = \overline{2,n}. \tag{4.6}$$

(4.5) и (4.6) не противоречат друг другу тогда и только тогда, когда

$$C_{1i}^1 = 0, \ i = \overline{2,n}. \tag{4.7}$$

Объединяя условия (4.4) и (4.7), получаем: необходимым условием существования решения (4.1)–(4.3) является то, что X_i, $i = \overline{2,n}$ порождают $(n-1)$-мерный идеал в алгебре Ли. Это же условие является достаточным. Действительно, система (4.2)–(4.3) в данных условиях, по доказанному выше, нетривиально разрешима. Пусть $u \neq const$ – решение (4.2)–(4.3) (при этом все остальные решения функционально зависят от него). В силу условия (4.7),

$$[X_1^{(n-1)}, X_i^{(n-1)}]u = X_1^{(n-1)}(X_i^{(n-1)}u) - X_i^{(n-1)}(X_1^{(n-1)}u) = -X_i^{(n-1)}(X_1^{(n-1)}u) = 0,$$

$$i = \overline{2,n},$$

т.е. $X_1^{(n-1)}u$ – ненулевое (в силу условия b) решение (4.2)–(4.3). Следовательно, $X_1^{(n-1)}u = f(u)$. Очевидно, что функция $\int \frac{du}{f(u)}$ – решение системы (4.1), (4.2), (4.3).

Пусть система (4.1)–(4.3) имеет решение. Рассмотрим ее как алгебраическую систему линейных уравнений относительно неизвестных $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-1)}}$ с определителем

$$\mathbf{\Delta} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1^{(1)} & \ldots & \eta_1^{(n-1)} \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2^{(1)} & \ldots & \eta_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & \eta_n & \eta_n^{(1)} & \ldots & \eta_n^{(n-1)} \\ 1 & y' & y'' & \ldots & \omega \end{vmatrix} \neq 0.$$

По правилу Крамера, решение системы (4.1)–(4.3) имеет вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\mathbf{\Delta}^{-1}\begin{vmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_1^{(1)} & \dots & \eta_1^{(n-1)} \\ 0 & \eta_2 & \eta_2^{(1)} & \dots & \eta_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \eta_n & \eta_n^{(1)} & \dots & \eta_n^{(n-1)} \\ 0 & y' & y'' & \dots & \omega \end{vmatrix};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\mathbf{\Delta}^{-1}\begin{vmatrix} \xi_1 & 1 & \eta_1^{(1)} & \dots & \eta_1^{(n-1)} \\ \xi_2 & 0 & \eta_2^{(1)} & \dots & \eta_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & 0 & \eta_n^{(1)} & \dots & \eta_n^{(n-1)} \\ 1 & 0 & y'' & \dots & \omega \end{vmatrix};$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-1)}}=\mathbf{\Delta}^{-1}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1^{(1)} & \dots & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & \eta_n & \eta_n^{(1)} & \dots & 0 \\ 1 & y' & y'' & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Дифференциальная форма

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-1)}}dy^{(n-1)}$$

является полным дифференциалом решения системы (4.1)–(4.3).

После очевидных преобразований получаем:

$$d\varphi=\mathbf{\Delta}^{-1}\begin{vmatrix} dx & dy & dy' & \dots & dy^{(n-1)} \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2^{(1)} & \dots & \eta_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & \eta_n & \eta_n^{(1)} & \dots & \eta_n^{(n-1)} \\ 1 & y' & y'' & \dots & \omega \end{vmatrix}.$$

В результате приходим к следующей теореме:

Теорема 2. *Пусть $X_i, i=\overline{1,n}$ транзитивны в пространстве первых интегралов и $X_i, i=\overline{2,n}$ порождают $(n-1)$- мерный идеал в исходной алгебре Ли, тогда* *система* $X_1^{(n-1)}\varphi = 1;\ X_i^{(n-1)}\varphi = 0,\ i = \overline{2,n}; A\varphi = 0$ *имеет решение*

$$\varphi = \int \frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dy' & \dots & dy^{(n-1)} \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2^{(1)} & \dots & \eta_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & \eta_n & \eta_n^{(1)} & \dots & \eta_n^{(n-1)} \\ 1 & y' & y'' & \dots & \omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1^{(1)} & \dots & \eta_1^{(n-1)} \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2^{(1)} & \dots & \eta_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n & \eta_n & \eta_n^{(1)} & \dots & \eta_n^{(n-1)} \\ 1 & y' & y'' & \dots & \omega \end{vmatrix}}. \tag{4.8}$$

Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда существует первый интеграл (2.11) $\varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ – решение системы (4.1)–(4.3) –, определяемый (4.8). Выражая $y^{(n-1)} = y^{(n-1)}(\varphi; x, y, y', \dots, y^{(n-2)})$, переходим к новым координатам: $\varphi, x, y, y', \dots, y^{(n-2)}$, в которых

$$y^{(n-1)} = y^{(n-1)}(\varphi; x, y, y', \dots, y^{(n-2)}) \tag{4.9}$$

$$X_i^{(n-2)} = \xi_i \frac{\partial}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial}{\partial y} + \dots + \eta_i^{(n-2)} \frac{\partial}{\partial y^{(n-2)}},\ i = \overline{2,n} \tag{4.10}$$

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + \dots + y^{(n-1)}(\varphi; x, y, y', \dots, y^{(n-2)}) \frac{\partial}{\partial y^{(n-2)}}. \tag{4.11}$$

(4.9)–(4.11) – в точности то, что мы хотели получить: уравнение (2.11) сведено к ОДУ-$(n-1)$, допускающему $n-1$ симметрию.

Очевидным следствием изложенного выше является следующая

Теорема 2'. *Если (2.11) допускает n-мерную алгебру Ли генераторов, в которой можно выбрать базис $X_1, \dots, X_n$ таким образом, что $X_1, \dots, X_i$ порождают i-мерный идеал в алгебре Ли, $i = \overline{1,n}$, и при этом X_m транзитивны в пространстве первых интегралов, то (2.11) интегрируется в квадратурах.*

Данная теорема является аналогом теоремы, принадлежащей С. Ли:

Теорема Ли . *Если (2.11) допускает n-параметрическую группу точечных преобразований, которая действует транзитивно в пространстве первых интегралов и разрешима, то (2.11) интегрируется в квадратурах .*

Пример 2. $2y'y''' = 3y''^2$.

Данное уравнение допускает 3-х мерную подалгебру Ли с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y};\ X_2^{(2)} = x\frac{\partial}{\partial x} - y'\frac{\partial}{\partial y'} - 2y''\frac{\partial}{\partial y''}; X_3 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

При этом $[X_1, X_2] = 0,\ [X_1, X_3] = 0,\ [X_2, X_3] = -X_3$.
Надо отметить, что данное уравнение эквивалентно уравнению $\{y, x\} = 0$, где

$$\{y, x\} = 1/2\frac{y'''}{y'} - 3/4\frac{y''^2}{y'^2}$$

– производная Шварца.

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & -y' & -2y'' \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & y' & y'' & \frac{3y''^2}{2y'} \end{vmatrix} = y''^2/2 \neq 0,$$

$$\varphi_1 = \int \frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dy' & dy'' \\ x & 0 & -y' & -2y'' \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & y' & y'' & \frac{3y''^2}{2y'} \end{vmatrix}}{\boldsymbol{\Delta}} = y - \frac{2y'^2}{y''}.$$

Получили уравнение: $y'' = \frac{2y'^2}{y-\varphi_1}$, допускающего генераторы:

$$X_2^{(1)} = x\frac{\partial}{\partial x} - y'\frac{\partial}{\partial y'};$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x};$$

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + \frac{2y'^2}{y-\varphi_1}\frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\boldsymbol{\Delta_1} = \begin{vmatrix} x & 0 & -y' \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & y' & \frac{2y'^2}{y-\varphi_1} \end{vmatrix} = -y'^2.$$

$$\varphi_2 = \int \frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dy' \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & y' & \frac{2y'^2}{y-\varphi_1} \end{vmatrix}}{\boldsymbol{\Delta_1}} = \log\frac{(y-\varphi_1)^2}{y'}$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными :

$$y' = \frac{(y-\varphi_1)^2}{\exp\varphi_2},$$

интегрируя которое, получаем общее решение уравнения, содержащегося в примере 2 :

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

5 Третья стратегия интегрирования: дифференциальные инварианты

Определение 3. Функция

$$\psi(x, y, y', ..., y^{(k)}), \quad \frac{\partial\psi}{\partial y^{(k)}} \not\equiv 0$$

называется дифференциальным инвариантом k–го порядка (ДИ-k) алгебры Ли генераторов с базисом $X_1, \dots, X_r$, если

$$X_i^{(k)}\psi = (\xi_i(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_i(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \dots + \eta_i^{(k)}(x,y,y',\dots,y^{(k)})\frac{\partial}{\partial y^{(k)}})\psi = 0, \ i = \overline{1,r}. \tag{5.1}$$

Рассматривая (5.1) как систему ДУ относительно ψ , получаем, что в силу выполнения условий разрешимости этой системы, существует ее нетривиальное решение тогда и только тогда, когда m – ранг матрицы коэффициентов – меньше, чем число неизвестных – $\frac{\partial \psi}{\partial x}; \frac{\partial \psi}{\partial y}; \dots; \frac{\partial \psi}{\partial y^{(k)}}$ – т.е. меньше, чем $k+2$. Число функционально независимых решений системы (5.1) равно $k+2-m$. При увеличении порядка продолжения на 1 ранг матрицы увеличивается не более, чем на 1; следовательно, число функционально независимых решений в лучшем случае увеличится на единицу: достаточно к списку решений системы, соответствующей k–му продолжению, добавить, если он существует, какой-либо ДИ-$(k+1)$. Таким образом, существует полный список функционально независимых ДИ алгебры Ли генераторов $X_i, i = \overline{1,r}$ такой, что в нем встречается не более одного ДИ произвольного порядка. Следующая теорема дает рекомендацию, как найти такой список .

Теорема 3. *Пусть $\psi(x,y,y',...,y^{(l)}),\ \varphi(x,y,y',...,y^{(s)})$ – ДИ наименьшего порядка алгебры Ли генераторов $X_i,\ i = \overline{1,r},\ \ l \le s$, тогда*
a) $s \le r$;
b)

$$\psi, \varphi, \frac{d\varphi}{d\psi}, \dots, \frac{d^n\varphi}{d\psi^n}, \dots$$

есть полный список функционально независимых ДИ данной алгебры Ли .

Доказательство. а) система уравнений для нахождения ДИ-r :

$$X_i^{(r)}\psi = (\xi_i\frac{\partial}{\partial x} + \dots + \eta_i^{(r)}\frac{\partial}{\partial y^{(r)}})\psi = 0, i = \overline{1,r}$$

Ранг ее $m \le r$, следовательно, число функционально независимых решений: $r+2-m \ge 2$, т.е. s действительно не превосходит r ;
b) для доказательства второго заключения утверждения достаточно убедиться в том, что если $\rho(x,y,y',\dots,y^{(k-1)})$ – ДИ-$(k-1)$, то $\frac{d\rho}{d\psi}$ – ДИ-k .
Выясним вначале, чему равен коммутатор между

$$X_i^{(k)} \text{ и } \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + \dots + y^{(k+1)}\frac{\partial}{\partial y^{(k)}}$$

В силу очевидного соотношения

$$[\frac{\partial}{\partial y^{(p)}}, \frac{d}{dx}] = \frac{\partial}{\partial y^{(p-1)}}, \ p = \overline{1,k},$$

получаем:

$$[X_i^{(k)}, \frac{d}{dx}] = [\xi_i\frac{\partial}{\partial x}, \frac{d}{dx}] + [\eta_i\frac{\partial}{\partial y}, \frac{d}{dx}] + \dots + [\eta_i^{(k)}\frac{\partial}{\partial y^{(k)}}, \frac{d}{dx}] =$$

$$= -\frac{d\xi_i}{dx}\frac{\partial}{\partial x} - (\frac{d\eta_i}{dx} - \eta_i^{(1)})\frac{\partial}{\partial y} - \dots - (\frac{d\eta_i^{(k-1)}}{dx} - \eta_i^{(k)})\frac{\partial}{\partial y^{(k-1)}} - (\eta_i^{(k+1)} + y^{(k+1)}\frac{d\xi_i}{dx})\frac{\partial}{\partial y^{(k)}} =$$

$$= -\frac{d\xi_i}{dx}(\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + ... + y^{(k+1)}\frac{\partial}{\partial y^{(k)}}) - \eta_i^{(k+1)}\frac{\partial}{\partial y^{(k)}} = -\frac{d\xi_i}{dx}\frac{d}{dx} - \eta_i^{(k+1)}\frac{\partial}{\partial y^{(k)}}.$$

Тогда:

$$X_i^{(k)}\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}X_i^{(k)} - \frac{d\xi_i}{dx}\frac{d}{dx} - \eta_i^{(k+1)}\frac{\partial}{\partial y^{(k)}}.$$

Итак, в силу того, что ψ, ρ – ДИ порядка, меньшего k, а также в силу доказанного выше :

$$X_i^{(k)}\frac{d\rho}{d\psi} = X_i^{(k)}\frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{d\psi}{dx}} = (\frac{d\psi}{dx})^{-2}[\frac{d\psi}{dx}((X_i^{(k)}\frac{d}{dx})\rho) - \frac{d\rho}{dx}((X_i^{(k)}\frac{d}{dx})\psi)] = (\frac{d\psi}{dx})^{-2}\times$$

$$\times[\frac{d\psi}{dx}(\frac{d}{dx}X_i^{(k)}\rho - \frac{d\xi_i}{dx}\frac{d\rho}{dx} - \eta_i^{(k+1)}\frac{\partial\rho}{\partial y^{(k)}}) - \frac{d\rho}{dx}(\frac{d}{dx}X_i^{(k)}\psi - \frac{d\xi_i}{dx}\frac{d\psi}{dx} - \eta_i^{(k+1)}\frac{\partial\psi}{\partial y^{(k)}})] = 0.$$

для всех $i = \overline{1, r}$. •

Пусть теперь X_i, $i = \overline{1, r}$ порождают алгебру Ли инфинитезимальных операторов уравнения (2.11), тогда

$$\psi, \varphi, \frac{d\varphi}{d\psi}, \ldots, \frac{d^{(n-s)}\varphi}{d\psi^{(n-s)}}$$

есть полный список функционально независимых ДИ этой алгебры Ли до n-го порядка включительно. Начиная с $y^{(n)}$, выражаем все производные y до s-го порядка включительно в терминах ДИ и подставляем в уравнение (2.11). Получаем ОДУ-$(n-i)$:

$$H(\psi, \varphi, \varphi', \ldots, \frac{d^{(n-i)}\varphi}{d\psi^{(n-i)}}) = 0, \tag{5.2}$$

правая часть которого явно не зависит от x, y и производных y, так как она инвариантна относительно действия группы Ли, допускаемой (2.11), а других ДИ, функционально не зависящих от уже найденных, нет.

Итак, получили ОДУ, групповой анализ которого, вообще говоря, затруднен, так как оно "не наследует" никакой информации от уравнения (2.11). Если удастся найти решение (5.2) $\varphi = f(\psi)$, то уравнение

$$\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(s)}) = f(\psi(x, y, \ldots, y^{(l)})) \tag{5.3}$$

является ОДУ-s, сохраняющим симметрии уравнения (2.11), причем, в силу теоремы 3, $s \leq r$. Для его интегрирования можно попытаться применить известные стратегии .

Пример 3. $yy'y''' = y'^2y'' + yy''^2$.

Это уравнение допускает двумерную подалгебру Ли с базисом $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$; $X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$.

Наличие в алгебре Ли оператора X_1 означает то, что все ДИ не зависят от x .

Очевидно, что нетривиального ДИ-0 не существует.

В качестве ДИ-1 и ДИ-2 достаточно взять какие-либо нетривиальные решения уравнений

$$X_2^{(1)}\psi(y, y') = -y\frac{\partial\psi(y, y')}{\partial y} - 2y'\frac{\partial\psi(y, y')}{\partial y'} = 0,$$

$$X_2^{(2)}\varphi(y, y', y'') = -y\frac{\partial\varphi(y, y', y'')}{\partial y} - 2y'\frac{\partial\varphi(y, y', y'')}{\partial y'} - 3y''\frac{\partial\varphi(y, y', y'')}{\partial y''} = 0,$$

например, $\psi = \frac{y'}{y^2}, \varphi = \frac{y''}{y^3}$. Тогда ДИ-3 :

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \varphi' = \frac{y'''y - 3y''y'}{y(yy'' - 2y'^2)}.$$

Выражая y''', y'', y' через ψ, φ, φ' и подставляя в исходное уравнение, приходим к уравнению

$$\varphi' = \frac{\varphi}{\psi},$$

следовательно, $\varphi = C\psi$, или $y'' = Cyy'$ – ОДУ-2, допускающее двумерную алгебру Ли. Интегрируя его, получаем решение в квадратурах :

$$x = \int \frac{2dy}{Cy^2 + a} + b.$$

В заключение заметим, что проблема интегрируемости ОДУ не охватывается полностью теорией групп Ли и алгебр Ли.

Другой подход к интегрированию ОДУ-n, использующий как локальные, так и нелокальные симметрии, предложен в [9].

Краткое изложение результатов работы см. в [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты 96-01-01997 и 96-01-00038).

Литература

[1] S.Lie. Klassification und Integration von gewöhnlichen Differential gleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten.// Math. Annalen. 1888. V.32. P.213–281; см. также Gesmmlte Abhundungen, vol. 5, B.G.Teubner, Leipzig, 1924. P.240–310.

[2] S.Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit Bekannten Infinitesimalen Transformationen. B.G.Teubner, Leipzig, 1891.

[3] Н.Г.Чеботарев. Теория групп Ли.–ГИТТЛ, 1940.

[4] Л.С.Понтрягин. Непрерывные группы.–ГИТТЛ, 1954.

[5] Л.В.Овсянников. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[6] H.Stephani H. Differential Equations. Their solutions using symmetries. (Edited Malcolm Maccallum)–Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.

[7] П.Олвер. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

[8] Н.Х.Ибрагимов. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике. // Успехи Мат. Наук. 1992. Т.47. N4. С.83–144.

[9] Л.М.Беркович. Метод точной линеаризации обыкновенных дифференциальных уравнений n–го порядка. *Вестник СамГУ*, спецвыпуск. Самара, 1995. С.6–14.

[10] Л.М.Беркович, С.Ю.Попов. *Междунар. семинар. Дифференц. уравн. и их приложения.* г. Самара, 25–29 июня 1996. Тезисы докл. Ч.1. С.7.

Поступила в редакцию
1.11.1996

GROUP ANALYSIS OF THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE ORDER GREATER THEN TWO

L.M. Berkovich, S.Y. Popov[1]

This paper deals with three strategies of integration of nth order ordinary differential equation, which admits r parameter Lie group of point symmetries. These strategies were proposed by Lie, but at present they are not well known. It is shown how the structure of Lie group of point symmetries is connected with the integrability conditions of a differential equation.

[1]Berkovich Lev M., Popov Sergej Yu., Dept. of Mechanics and Mathematics, Samara State University