ЭЛЕКТРОСЛАБЫЕ РАСПАДЫ МЕЗОНОВ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МОДЕЛИ СОСТАВНЫХ КВАРКОВ

А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий[1]

В рамках мгновенной формы релятивистской квантовой механики получено релятивистское выражение для констант лептонных распадов псевдоскалярных мезонов. Данное выражение хорошо описывает экспериментальные значения констант.

Релятивистское описание составных систем всегда представляло собой актуальную задачу ядерной физики и физики частиц. Особенно актуальной эта проблема стала в связи с развитием кварковой физики, в которой релятивистские свойства легких кварков играют принципиальную роль.

Эффективным инструментом для решения этой задачи является так называемая релятивистская квантовая механика с фиксированным числом частиц (РКМ), которая базируется на прямой реализации алгебры Пуанкаре на множестве динамических наблюдаемых составной системы [1] – [6].

В настоящей работе одна из возможных формулировок РКМ – мгновенная форма – используется для вычисления констант слабого распада псевдоскалярных мезонов. Интерес к такого рода вычислениям вызван, во-первых, тем, что они являются важным тестом для любой модели адронной структуры [7], и,во-вторых, важностью исследования релятивистских эффектов в этих процессах. Известно, [8], что в рамках нерелятивистских составных моделей не удается описать константы лептонных распадов пиона и каона при разумных значениях параметров модели.

Используемая в работе формулировка РКМ отличается от применяемых в настоящее время в расчетах других авторов. Во-первых, мы работаем в рамках мгновенной формы динамики, в отличие от динамики на световом фронте, используемой в других работах. Во-вторых, для построения оператора тока мы используем специальную процедуру, восходящую к общему методу параметризации матричных элементов локальных операторов [12].

Перечислим основные положения релятивистской квантовой механики с фиксированным числом частиц (см., например, [9]).

1. Гильбертово пространство состояний составной частицы $\mathcal{H}$ является прямым произведением одночастичных гильбертовых пространств.

2. Существует унитарное представление универсальной накрывающей группы Пуанкаре на $\mathcal{H}$.

[1]Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ

3. Оператор взаимодействия включается в алгебру генераторов группы Пуанкаре путем добавления его к оператору квадрата массы. В случае двухчастичной системы это включение осуществляется следующим образом:

$$\hat{U} = \frac{1}{4}\,\hat{M}_I^2 + \frac{(M_1^2 - M_2^2)^2}{4\,\hat{M}_I^2} - \frac{1}{4}\,\hat{M}_0^2 - \frac{(M_1^2 - M_2^2)^2}{4\,\hat{M}_0^2}\,. \tag{1}$$

Здесь $\hat{M}_0$ – оператор массы системы из двух невзаимодействующих частиц, $\hat{M}_I$ – оператор массы системы со взаимодействием, M_1 , M_2 – массы частиц, $\hat{U}$ – оператор взаимодействия. В мгновенной форме динамики оператор $\hat{U}$ должен удовлетворять условиям, которые обеспечивают сохранение коммутационных соотношений алгебры Пуанкаре.

$$\left[\hat{\vec{P}},\,\hat{U}\right] = \left[\hat{\vec{J}},\,\hat{U}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial\vec{P}},\,\hat{U}\right] = 0\,. \tag{2}$$

4. Волновая функция составной системы является собственной функцией полного коммутирующего набора операторов, в котором содержится оператор $\hat{M}_I^2$. Для мгновенной формы динамики полный коммутирующий набор включает следующие операторы:

$$\hat{M}_I^2\,,\quad \hat{J}^2\quad \hat{J}_3\,,\quad \hat{\vec{P}} \tag{3}$$

5. Совокупность несодержащих взаимодействие генераторов группы Пуанкаре образует подгруппу, которая называется кинематической подгруппой. В мгновенной форме динамики кинематической подгруппой является группа движения эвклидова пространства:$\hat{\vec{J}}$, $\hat{\vec{P}}$. $\hat{\vec{J}}$ – генераторы вращений, $\hat{\vec{P}}$ - генераторы пространственных трансляций. Таким образом, три из четырех оператора в (3) совпадают с соответствующими операторами системы невзаимодействующих частиц.

Для диагонализации полного набора (3) можно использовать базис с отделенным движением центра масс [9],[10]:

$$|\,\vec{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J > \tag{4}$$

Здесь $P = (p_1 + p_2)$ – полный импульс системы, $P^2 = s$, $\sqrt{s}$ – инвариантная масса системы невзаимодействующих частиц, J – полный угловой момент. l – орбитальный момент, S – полный спин, m_J - проекция полного момента. Величины l,S строятся как инвариантные параметры вырождения.

Операторы из кинематической подгруппы в (3) являются диагональными в базисе (4). Таким образом, проблема вычисления волновой функции свелась к задаче диагонализации оператора $\hat{M}_I^2$.

Задача на собственные значения для этого оператора имеет форму нерелятивистского уравнения Шредингера.

Волновая функция для псевдоскалярных мезонов имеет вид:

$$\begin{gathered} <\vec{P}\,',\, \sqrt{s'},\, J',\, l',\, S',\, m'_J|\, P_\pi> = \\ = N_c\,\delta(\vec{P}\,' - \vec{P})\delta_{JJ'}\delta_{m_J m'_J}\delta_{ll'}\delta_{SS'}\,\varphi(k)\,, \\ k = \sqrt{\frac{s^2 - 2s(M_1^2 + M_2^2) + (M_1^2 - M_2^2)^2}{4s}}\,. \end{gathered} \tag{5}$$

Применим данный формализм для вычисления постоянной лептонного распада псевдоскалярных мезонов.

Постоянная лептонного распада определяется матричным элементом электрослабого тока [7]:

$$< 0|j^{\mu}|\, p_c\; >= i f_c(Q^2) {p_c}^{\,\mu} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,. \tag{6}$$

p_c – 4-импульс мезона.

Разложим левую часть (6) по базису (3):

$$\int \frac{N_c}{N_{C-G}}\, d\sqrt{s}\; < 0|j^{\mu}|\vec{p}_c\,, \sqrt{s} > \varphi(s) =$$

$$= i f_c(Q^2) {p_c}^{\,\mu} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,. \tag{7}$$

N_{C-G} - нормировочная константа векторов (3).

По аналогии с электромагнитным током [9] подинтегральное выражение в (7) может быть разделено на ковариантную часть, которая является классической функцией и инвариантную часть, которая представляет собой обобщенную функцию.

$$\frac{N_c}{N_{C-G}}\; < 0|j^{\mu}|\vec{p}_c\,, \sqrt{s} >= iG(s) B^{\mu} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,. \tag{8}$$

Заметим, что все неинвариантные множители, например, нормировочная константа волновой функции (5) включены в вектор B_{μ}. Инвариантный формфактор $G(s)$ в общем случае является обобщенной функцией.

Если рассматривать равенство (7) как равенство функционалов на пространстве обобщенных функций, получим явный вид вектора B_{μ}:

$$B^{\mu} = {p_c}^{\,\mu}\,. \tag{9}$$

Из равенств (7)-(9) получаем интегральное представление для постоянной лептонного распада:

$$\int d\sqrt{s}\, G(s)\varphi(s) = f_c(Q^2)\,. \tag{10}$$

Формфактор $G(s)$ описывает вклады четырех-фермионного взаимодействия и электрослабых поправок. В данной работе мы ограничимся рассмотрением 4-фермионного взаимодействия, т.е. в качестве $G(s)$ мы возьмем формфактор, параметризующий распад свободной двухкварковой системы:

$$< 0|j_0^{\mu}|\vec{P}\,, \sqrt{s} >= iG_0(s) P^{\mu} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,. \tag{11}$$

Для построения матричного элемента (11) использовался общий метод параметризации матричных элементов локальных операторов [12]. Это возможно, т.к. матричный элемент в (11) является диагональным по спину ($S = 0$ в левой и правой частях матричного элемента).

Представление (11) вполне аналогично представлению (6), но постоянная f_c заменена формфактором, зависящим от инвариантной переменной.

Для вычисления $G_0(s)$ разложим (11) по одночастичному базису:

$$|\vec{p}_1\,, m_1\,; \vec{p}_2\,, m_2 > \tag{12}$$

$\vec{p}_1\, \vec{p}_2$ – 3 – импульсы частиц, $m_1\, m_2$ – проекции спинов частиц. Равенство (11) приводится к виду:

$$iG_0(s) P^{\mu} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} = \sum_{m_1\,, m_2\,, n_c} \int \frac{d\vec{p}_1}{2p_{10}}\, \frac{d\vec{p}_2}{2p_{20}}\; < 0|j_0^{\mu}|\vec{p}_1\,, m_1\,; \vec{p}_2\,, m_2 > \cdot$$

$$\cdot < \vec{p}_1\,, m_1\,; \vec{p}_2\,, m_2 | \vec{P}\,, \sqrt{s} > \ . \tag{13}$$

$n_c = 1, 2, 3$ – параметр суммирования по цвету. Выражение для коэффициентов Клебша-Гордана является известным [11]. Матричный элемент тока в базисе (12) выражается через общепринятое выражение матричного элемента тока лептонного распада:

$$< 0|\vec{p}_1\,, m_1\,; \vec{p}_2\,, m_2 >= \frac{1}{2\pi^3}\,\bar{v}(\vec{p}_2\,, m_2)\gamma^\mu(1+\gamma^5)u(\vec{p}_1\,, m_1) \tag{14}$$

Интегрирование в (13) производим в системе, где $\vec{P} = 0$. Для $G_0(s)$ получаем следующее выражение:

$$G_0(s) = \frac{n_c}{2\sqrt{2}\,\pi\,P_0}\sqrt{(p_{10}+M_1)(p_{20}+M_2)}\,\left[1 - \frac{\tilde{p}}{(p_{10}+M_1)(p_{20}+M_2)}\right]\ . \tag{15}$$

Здесь $n_c = 3$ – число цветов кварков,

$$\tilde{p} = \frac{1}{2\sqrt{s}}[s^2 - 2s(M_1^2 + M_2^2) + (M_1^2 - M_2^2)^2]^{1/2}$$

$$p_{i0} = \sqrt{\tilde{p} + M_i^2}\,, \quad i = 1\,,\,2$$

Выражение для распадной постоянной (10) может быть переписано в терминах $G_0(s)$:

$$\int d\sqrt{s}\,G_0(s)\varphi(s) = f_c(Q^2)\,. \tag{16}$$

Для постоянной лептонного распада пиона ($M_1 = M_2 = M$) равенство (16) дает выражение:

$$f_\pi = \frac{2M\,n_c}{2\sqrt{2}\,\pi}\int d\sqrt{s}\frac{1}{\sqrt{s}}\,\varphi(s)\,. \tag{17}$$

Волновая функция имеет следующий вид [9]:

$$\varphi(s(k)) = (4(k^2 + M^2))^{1/4}\,k\,u(k)$$

и нормирована условием:

$$n_c\int u^2(k)\,k^2\,dk = 1\,. \tag{18}$$

Релятивистская формула для постоянной лептонного распада (16), (17) отличается от соответствующих выражений в других подходах. Нерелятивистский предел выражения (17) дает стандартное выражение распадной константы через значение волновой функции в нуле. Приравнивая выражение (17) экспериментальному значению распадной константы пиона $f_\pi = 131.7\pm0.2$ MeV, получаем равенство, ограничивающее значения параметров модели. Например, в модели гармонического осциллятора:

$$u(k) = \left(\frac{4}{b^3\,\sqrt{\pi}\,n_c}\right)^{1/2}\,\exp(-k^2/2b^2)\,. \tag{19}$$

параметрами модели являются масса кварка M и эффективный параметр конфайнмента b. Равенство (17) при условии равенства распадной константы экспериментальному значению неявно задает функцию $b(M)$, определяющую значения параметров модели, при которых данная модель описывает эксперимент. Вид этой функции представлен на рисунке. Видно, что в модели гармонического осциллятора в нашем подходе константа лептонного распада пиона описывается при разумных значениях масс кварков и параметра конфайнмента.

Аналогичные выводы можно сделать и в случае каона.

Таким образом, релятивистское описание лептонного распада псевдоскалярных мезонов в нашем подходе приводит к хорошему описанию констант лептонных распадов.

Работа выполнена при поддержке Государственного Комитета по Высшему Образованию РФ (Грант 94-6.7-2015).

Рис. 1. Функция $b(M)$, полученная из равенства (17) при $f_\pi = 131.7$ MeV.

Литература

[1] P.A.M. Dirac, Rev.Mod.Phys. 21 (1949) 392, ; русский перевод в кн.: П.А.М. Дирак, К созданию квантовой теории поля. М.: Наука, 1990, С.284-302.

[2] М.В. Терентьев/ ЯФ, 24 (1976) 207.

[3] С.Н. Соколов, А.Н. Шатний/ ТМФ, 37 (1978) 291.

[4] B.D. Keister, W.N. Polyzou, Advances in Nucl.Phys. 20 (1991) 225.

[5] F.M. Lev, Revista Nuovo Cim., 16 (1993) 1.

[6] S. Brodsky, F. Schlumpf, preprint SLAC-PUB-6729, 1994.

[7] W. Jaus, Phys.Rev. 44 (1991) 2851.

[8] C.R. Münz, J. Resag, B.C. Metsch, H.R. Petry, preprint Universität Bonn TK-93-14

[9] Е.В. Баландина, А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий/ ТМФ, 103 (1995) 41.

[10] A.F. Krutov, V.E. Troitsky, J.Phys.G., 19 (1993) L127.

[11] В.П. Кожевников, В.Е. Троицкий, С.В. Трубников, Ю.М. Широков/ ТМФ, 10 (1972) 47.

[12] А.А. Чешков, Ю.М. Широков/ ЖЭТФ, 44 (1963) 1982.

Поступила в редакцию
1.11.1995