ФИЗИКА

СТАЦИОНАРНЫЕ СЖАТЫЕ СОСТОЯНИЯ В ПОЛЯРИТОННОЙ МОДЕЛИ

Е.К.Башкиров

Найдены начальные условия, соответствующие стационарной эволюции фотонной и фононной подсистем в поляритонной модели ионного кристалла. С их помощью установлена возможность генерации стационарных сжатых состояний для электромагнитного поля и поля оптических фононов. Проведена оценка факторов сжатия для рассматриваемых бозонных полей.

В последнее время особое внимание в квантовой оптике уделяется теоретическому и экспериментальному исследованию так называемых сжатых состояний электромагнитного поля. Впервые такие состояния были введены в работах Д.Столера [1] как обобщенные состояния, минимизирующие соотношение неопределенностей. Позднее их свойства с различных точек зрения исследовались многими авторами, которые использовали для них различные названия: двухфотонные когерентные состояния (H.P.Yuen [2]), новые когерентные состояния (E.Y.C. Lu [3]), коррелированные когерентные состояния (В.И. Манько [4]) и др. Термин сжатые состояния, впервые использованный в работе [5], применяется теперь к широкому классу состояний электромагнитного и других бозонных полей, имеющих квантовые флуктуации ниже определенного значения, например, вакуумного. Экспериментально сжатие света впервые было реализованно в 1985 г. (R.E. Slusher et al [6]). Позднее для генерации сжатых состояний электромагнитного поля использовались различные нелинейные оптические процессы: четырехволновое смешение, параметрическое усиление, резонансная флуоресценция и др. [7]. В настоящее время имеется большое число работ, в которых обсуждаются различные аспекты сжатых состояний, возможные источники сжатия и применения сжатых состояний в системах оптической обработки и передачи информации с предельно низким уровнем шума, а также для сверхточных оптических измерений, в частности, регистрации гравитационных волн (см. обзор [8]).

Рассматриваемые сжатые состояния можно назвать динамическими сжатыми состояниями. Вместе с тем в наших работах [9]-[12] были введены стационарные сжатые состояния для бозонных полей как состояния с независящими от времени дисперсиями квадратурных компонент. Нами была также исследована возможность стационарного сжатия для ряда нелинейных квантовооптических моделей с двухфотонными взаимодействиями, а также для модели квантового кристалла, взаимодействующего с квантовым электромагнитным полем через экситонные возбуждения (экситон-фотонная модель).

Представляет интерес исследовать стационарные сжатые состояния в моделях, включающих различные типы бозонных полей. Одной из наиболее простых моделей такого типа является поляритонная модель ионного кристалла, описывающая взаимодействие оптических фононов с поперечным квантовым электромагнитным полем. Рассмотрим ионный кристалл без учета дисперсии оптических фононов, помещенный в идеальный резонатор. Гамильтониан такой системы можно выбрать в виде [13]

$$H = \omega_{phot}\, a^+ a + \omega_{phon}\, b^+ b + f^* a^+\, b + f\, a\, b^+ + g^* a^+\, b^+ + g\, a\, b. \tag{1}$$

Здесь ω_{phot} и ω_{phon} -частоты моды квантового электромагнитного поля и оптических фононов в кристалле, $a^+(a)$ и $b^+(b)$ - операторы рождения (уничтожения) фотонов и фононов соответственно, f и g - константы взаимодействия (обычно $|f| = |g|$).

Гамильтониан (1) может быть диагонализован при помощи канонического преобразования Боголюбова вида

$$\begin{aligned} a &= u_1\, A + u_2\, B^+ + u_3\, A^+ + u_4\, B, \\ b &= v_1\, A + v_2\, B^+ + v_3\, A^+ + v_4\, B. \end{aligned} \tag{2}$$

где $A^+(A)$ и $B^+(B)$ - бозе-операторы рождения (уничтожения) двух поляритонных мод кристалла, представляющих собой смесь фотонов и оптических фононов.

Комплексные параметры канонического преобразования (2) должны удовлетворять следующим соотношениям

$$\begin{array}{cc} \omega_{phot}\, u_1 + f\, v_3^* + g\, v_1 = \Omega_A\, u_1, & \omega_{phot}\, u_3 + f\, v_1^* + g\, v_3 = -\Omega_A\, u_3, \\ \omega_{phot}\, u_4 + f\, v_2^* + g\, v_4^* = \Omega_B\, u_4, & \omega_{phon}\, u_2 + f\, v_4^* + g\, v_4 = -\Omega_B\, u_2, \\ \omega_{phon}\, v_1 + f\, u_3^* + g^* u_1 = \Omega_A\, v_1, & \omega_{phon}\, v_3 + f\, u_1^* + g^* u_3 = -\Omega_A\, v_3, \\ \omega_{phon}\, v_4 + f\, u_2^* + g^* u_4 = \Omega_A\, v_4, & \omega_{phon}\, v_2 + f\, u_4^* + g^* u_2 = -\Omega_A\, v_2, \\ |u_1|^2 - |u_2|^2 - |u_3|^2 + |u_4|^2 = 1, & |v_1|^2 - |v_2|^2 - |v_3|^2 + |v_4|^2 = 1, \\ u_1\, v_3 - u_2\, v_4 - u_3\, v_1 + u_4\, v_2 = 0, & u_1\, v_1^* - u_2\, v_2^* - u_3\, v_3^* + u_4\, v_4^* = 0. \end{array} \tag{3}$$

Здесь

$$\Omega^2_{A,B} = \frac{1}{2}\Big\{\omega^2_{phot} + \omega^2_{phon} + 2\,(|f|^2 - |g|^2) \pm$$
$$\pm\sqrt{(\omega^2_{phot} - \omega^2_{phon})^2 + 4\,|f|^2\,(\omega_{phot} + \omega_{phon})^2 - 4\,|g|^2\,(\omega_{phot} - \omega_{phon})^2}\Big\}.$$

- частоты поляритонных бозе-полей.

Отметим, что в формулах (3) фазы любых двух параметров преобразования Боголюбова можно выбрать произвольным образом. Для упрощения последующих вычислений удобно положить

$$\begin{array}{c} u_1 = |u_1|, \quad u_2 = |u_2|\, e^{\,i\,(\psi+\varphi)}, \quad u_3 = |u_3|\, e^{\,i\,(\psi+\varphi+\pi)}, \quad u_4 = |u_4|, \\ v_1 = |v_1|\, e^{-i\,\varphi}, \quad v_2 = |v_2|\, e^{\,i\,\psi}, \quad v_3 = |v_3|\, e^{\,i\,\psi}, \quad v_4 = |v_4|\, e^{-\,i\,(\varphi+\pi)}; \end{array} \tag{4}$$

где

$$f = |f|\, e^{\,i\,\varphi}, \qquad g = |g|\, e^{\,i\,\psi}.$$

Для исследования сжатия в фотонной и фононной модах рассмотрим ряд вспомогательных соотношений. Определим стандартным образом операторы квадратурных компонент для исходных и вспомогательных (поляритонных) полей

$$X_1 = \frac{1}{2}(a + a^+), \quad X_2 = \frac{1}{2i}(a - a^+), \quad X_3 = \frac{1}{2}(b + b^+), \quad X_4 = \frac{1}{2i}(b - b^+), \tag{5}$$

$$Y_1 = \frac{1}{2}(A + A^+), \quad Y_2 = \frac{1}{2i}(A - A^+), \quad Y_3 = \frac{1}{2}(B + B^+), \quad Y_4 = \frac{1}{2i}(B - B^+).$$

Введем следующие операторные столбцы:

$$X = \{X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4\}, \qquad Y = \{Y_1,\, Y_2,\, Y_3,\, Y_4\}, \tag{6}$$

связанные соотношением

$$Y = S_1\, X, \qquad X = S_1^{-1}\, Y, \tag{7}$$

где матрица прямого преобразования S_1 равна

$$S_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(u_1 + u_3) & \mathrm{Re}(u_3 - u_1) & \mathrm{Re}(u_2 + u_4) & \mathrm{Re}(u_2 - u_4) \\ \mathrm{Im}(u_1 + u_3) & \mathrm{Re}(u_1 - u_3) & \mathrm{Im}(u_2 + u_4) & -\mathrm{Re}(u_2 - u_4) \\ \mathrm{Re}(v_1 + v_3) & \mathrm{Im}(v_3 - v_1) & \mathrm{Re}(v_2 + v_4) & \mathrm{Im}(v_2 - v_4) \\ \mathrm{Im}(v_1 + v_3) & \mathrm{Re}(v_1 - v_3) & \mathrm{Im}(v_2 + v_4) & -\mathrm{Re}(v_2 - v_4) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Введем операторы флуктуаций обычным образом

$$\Delta X_i = X_i - < X_i > . \tag{9}$$

Здесь $< ... >$ означает усреднение по начальному состоянию.

Определим также следующие операторные столбцы:

$$\Delta X^2 = \Big\{ \Delta X_1^2, \quad \Delta X_2^2, \quad \Delta X_3^2, \quad \Delta X_4^2, \tag{10}$$

$$\Delta X_1 \Delta X_2 + \Delta X_2 \Delta X_1, \quad \Delta X_1 \Delta X_3 + \Delta X_3 \Delta X_1, \quad \Delta X_1 \Delta X_4 + \Delta X_4 \Delta X_1,$$

$$\Delta X_2 \Delta X_3 + \Delta X_3 \Delta X_2, \quad \Delta X_2 \Delta X_4 + \Delta X_4 \Delta X_2, \quad \Delta X_3 \Delta X_4 + \Delta X_4 \Delta X_3 \Big\},$$

$$\Delta Y^2 = \Big\{ \Delta Y_1^2, \quad \Delta Y_2^2, \quad \Delta Y_3^2, \quad \Delta Y_4^2, \tag{11}$$

$$\Delta Y_1 \Delta Y_2 + \Delta Y_2 \Delta Y_1, \quad \Delta Y_1 \Delta Y_3 + \Delta Y_3 \Delta Y_1, \quad \Delta Y_1 \Delta Y_4 + \Delta Y_4 \Delta Y_1,$$

$$\Delta Y_2 \Delta Y_3 + \Delta Y_3 \Delta Y_2, \quad \Delta Y_2 \Delta Y_4 + \Delta Y_4 \Delta Y_2, \quad \Delta Y_3 \Delta Y_4 + \Delta Y_4 \Delta Y_3 \Big\}.$$

Используя выражения (7), (8) и (9), можно получить соотношения, связывающие операторы моментов второго порядка (10), (11)

$$\Delta Y^2 = S_2\, \Delta X^2, \qquad \Delta X^2 = S_2^{-1}\, \Delta Y^2. \tag{12}$$

Явный вид матриц преобразований для моментов второго порядка не приведен здесь из-за их громоздкого вида.

Для нахождения условий стационарной эволюции дисперсий квадратурных компонент нет необходимости определять явные выражения для временных зависимостей моментов второго порядка исходных бозе-полей $\Delta X^2(t)$. Действительно, операторы флуктуаций квадратурных компонент вспомогательных (поляритонных) полей эволюционируют как координаты и импульсы независимых гармонических осцилляторов

$$\Delta Y_1(t) = \Delta Y_1(t_0)\, \cos\Omega_A\,(t - t_0) + \Delta Y_2(t_0)\, \sin\Omega_A\,(t - t_0),$$

$$\Delta Y_2(t) = -\,\Delta Y_1(t_0)\,\sin\Omega_A\,(t-t_0) + \Delta Y_2(t_0)\,\cos\Omega_A\,(t-t_0), \tag{13}$$
$$\Delta Y_3(t) = \Delta Y_3(t_0)\,\cos\Omega_B\,(t-t_0) + \Delta Y_4(t_0)\,\sin\Omega_B\,(t-t_0),$$
$$\Delta Y_4(t) = -\,\Delta Y_3(t_0)\,\sin\Omega_B\,(t-t_0) + \Delta Y_4(t_0)\,\cos\Omega_B\,(t-t_0).$$

Используя выражения (13), нетрудно найти временные зависимости средних значений операторов моментов второго порядка $<\Delta Y^2(t)>$. Приравнивая нулю коэффициенты при всех временных функциях в этих выражениях, получим условия стационарной эволюции

$$<\Delta Y_2^2(t_0)>=<\Delta Y_1^2(t_0)>, \quad <\Delta Y_4^2(t_0)>=<\Delta Y_3^2(t_0)>, \tag{14}$$
$$<\Delta Y_i(t_0)\,\Delta Y_j(t_0) + \Delta Y_j(t_0)\,\Delta Y_i(t_0)> = 0 \quad (i \neq j;\ i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Наконец, используя преобразования (12), можно найти начальные условия, соответствующие стационарной эволюции средних значений операторов моментов второго порядка для исходных полей. Указанные условия, записанные для величин

$$<\Delta X_i^2(t)> \text{и} <\Delta X_i(t_0)\,\Delta X_j(t_0) + \Delta X_j(t_0)\,\Delta X_i(t_0)>$$
$$(i \neq j;\ i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

имеют весьма громоздкий вид. Поэтому мы представим здесь только соотношения для начальных дисперсий квадратурных компонент

$$<\Delta X_2^2(t_0)>= R_{phon} <\Delta X_1^2(t_0)>, \quad <\Delta X_4^2(t_0)>= R_{phot} <\Delta X_3^2(t_0)>. \tag{15}$$

Привести в рамках данной статьи явные выражения для параметров сжатия в фотонной и фононной модах R_{phot} и R_{phon} для произвольных начальных состояний бозонных полей не представляется возможным. Ограничимся здесь рассмотрением простого частного случая, когда начальные значения соответствующих дисперсий квадратурных компонент фотонного и фононного полей совпадают, т.е.

$$<\Delta X_1^2(t_0)>=<\Delta X_3^2(t_0)>, \qquad <\Delta X_2^2(t_0)>=<\Delta X_4^2(t_0)>.$$

В рассматриваемом случае параметры сжатия принимают вид

$$R_{phot,phon} = \frac{1 + P_{phot,phon}}{1 - P_{phot,phon}}, \tag{16}$$

где

$$P_{phot} = 2\,\frac{\mathrm{Re}\,u_1\,\mathrm{Re}\,u_3 + \mathrm{Re}\,u_2\,\mathrm{Re}\,u_4 - \mathrm{Im}\,u_1\,\mathrm{Im}\,u_3 - \mathrm{Im}\,u_2\,\mathrm{Im}\,u_4}{|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2 + |u_4|^2},$$
$$P_{phon} = 2\,\frac{\mathrm{Re}\,v_1\,\mathrm{Re}\,v_3 + \mathrm{Re}\,v_2\,\mathrm{Re}\,v_4 - \mathrm{Im}\,v_1\,\mathrm{Im}\,v_3 - \mathrm{Im}\,v_2\,\mathrm{Im}\,v_4}{|v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 + |v_4|^2}. \tag{17}$$

Проведем оценку величины стационарного фактора сжатия для реалистичной поляритонной модели с $|f| = |g|$, $\omega_{phot} \approx \omega_{phon} = \omega$ и $|f| << \omega$. В данном случае частоты поляритонных мод в первом порядке по малому параметру $|f|/\omega$ можно представить как

$$\Omega_{A,B} = \omega\,(1 \pm |f|/\omega). \tag{18}$$

Из уравнений (3)-(18) для факторов сжатия фотонной и фононной мод тогда имеем

$$R_{phot} = R_{phon} = 1 + \frac{|f|^2}{\omega^2}\,\cos(\psi + \varphi). \tag{19}$$

Из формулы (19) видно, что при определенном выборе фаз констант взаимодействия в гамильтониане (1) оба параметра сжатия отличны от единицы, что означает возможность стационарного сжатия как для фотонной, так и для фононной мод. Интересно отметить, что в работе [11] для более простой двухбозонной модели кристалла (экситон-фотонной) нами строго была доказана невозможность генерации стационарных сжатых состояний. Можно отметить также, что в рассматриваемом случае факторы сжатия фотонной и фононной мод отличаются от единицы на величину второго порядка малости по взаимодействию. Это означает, что реализация стационарных сжатых состояний в таких системах маловероятна. Интересной представляется сильная зависимость степени сжатия от фаз φ и ψ констант взаимодействия f и g соответственно. Таким образом, гамильтонианы типа (1) с константами взаимодействия, равными по модулю, но отличающимися по фазе, не эквивалентны при рассмотрении фазово-чувствительных эффектов, таких как, например, сжатие. В настоящей работе мы не касались вопроса о явной параметризации константами гамильтониана волновых функций, реализующих в указанной модели стационарное сжатие.

Работа выполнена при поддержке Международного Научного Фонда и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант J64100).

Литература

[1] D.Stoler, Phys. Rev. D **1** (1970) 3217; **4** (1970) 1925.

[2] H.Y.Yuen, Phys. Rev. A **13** (1976) 2226.

[3] E.Y.C. Lu, Lett. Nuovo. Cim. **2** (1971) 1241.

[4] V.V.Dodonov, E.V.Kurmyshev, V.I.Man'ko, Phys. Lett. A **79** (1980) 150.

[5] J.N.Hollenhorst, Phys. Rev. D **19** (1979) 1669.

[6] R.E.Slusher et al, Phys.Rev. Lett. **55** (1985) 2409.

[7] С.Я.Килин. Квантовая оптика: поля и их детектирование. Минск: Наука и техника, 1990, 178с.

[8] Kh.Zaheer, M.S.Zubairy, Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics **28** (1990) 143.

[9] Е.К.Башкиров, А.А.Бакасов, В.Хмельовски. Препринт ОИЯИ Р17-89-777. Дубна, 1989,

[10] A.A.Bakasov, E.K.Bashkirov, V.Chmeliovski, Journ. Physique I **1** (1991) 12.

[11] Е.К.Башкиров. Оптика и спектроскопия **74** (1993) 922.

[12] E.K.Bashkirov, O.I.Kurganova, In: Computer Simulation in Nonlinear Optics, SPIE, **2098** (1994) 124.

[13] А.С.Давыдов. Теория твердого тела. М.: Наука, 1976, 640с.

Поступила в редакцию
27.10.95