СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ КВАДРАТА УГЛОВОГО ОПЕРАТОРА ГАМИЛЬТОНА В КООРДИНАТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Е.Н. Кожевников, Н.Г. Долматова

Исследованы собственные функции квадрата углового оператора Гамильтона $\vec{\mathcal{L}}$, представленного производными по декартовым компонентам вектора $\vec{L}$, задающего этот оператор. Определены собственные числа $\vec{\mathcal{L}}^2$, показано , что собственными функциями $\vec{\mathcal{L}}^2$ являются бесследовые тензора, построенные на диадных произведениях $\vec{L}$. Доказан ряд свойств собственных функций.

Введение

Традиционными переменными при исследовании уравнения угловой диффузии являются углы Эйлера θ, φ . Однако при конструировании процессов угловой диффузии полярных и вытянутых частиц среды со сложным потенциалом взаимодействия удобнее использовать в качестве переменных компоненты единичного вектора $\vec{L}$, определяющего ориентацию частиц (см. напр. [1, 2]) и рассматривать решение уравнения диффузии для углового распределения ориентаций в декартовом пространстве, координатами точек которого являются компоненты вектора $\vec{L}$. При этом изменяются операторы углового дифференцирования $grad$, div, Δ. В настоящей работе выведен вид этих операторов через декартовы компоненты $\vec{L}$, построены и исследованы собственные функции и собственные числа квадрата углового оператора Гамильтона.

1 Операторы $grad$, div и Δ в декартовом представлении

В декартовом пространстве R^3 с координатами L_1, L_2, L_3 (компоненты радиус-вектора $\vec{L}$) определим градиент вдоль сферы единичного радиуса. Сфера определяется уравнением $|\vec{L}| = 1$ и имеет нормалью вектор $\vec{L}$; искомый градиент, обозначаемый далее оператором $\vec{\mathcal{L}}$, получим, вычитая из пространственного градиента его проекцию на нормаль

$$\vec{\mathcal{L}} = \frac{\partial}{\partial \vec{L}} - \vec{L}\left(\vec{L}\frac{\partial}{\partial \vec{L}}\right) \qquad (1)$$

будем называть угловым оператором Гамильтона. Очевидно $(\vec{L}\vec{\mathcal{L}}) = 0$.

Определим оператор div на единичной сфере. Пусть x^1, x^2 - координаты точек сферы, $x^3 = \sqrt{L_1^2 + L_1^2 + L_3^2}$ - радиус сферы, $\vec{A}(\vec{x})$ - векторное поле. Дивергенция поля $\vec{A}$ на сфере определяется формулой

$$div\vec{A} \ = \ \sum_{j=1,2} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g} A^j\right)$$

где g - определитель метрического тензора.

Представим компоненты вектора $\vec{A}$ через декартовы

$$A^j = A_i \frac{\partial x^j}{\partial L_i}$$

где суммирование по i проводится от 1 до 3, и преобразуем выражение для дивергенции

$$\begin{aligned} div\vec{A} &= \\ &= \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial L_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial L_i} + \sum_{i=1,2} A_i \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\,\frac{\partial x^j}{\partial L_i}\right) = \\ &= \frac{\partial A_i}{\partial L_i} - \frac{\partial A_i}{\partial L_j}\frac{\partial L_j}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial L_i} + \sum_{i=1,2} A_i \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\,\frac{\partial x^j}{\partial L_i}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Перейдем в выражении для дивергенции к сферическим координатам $x^1 = \theta$ - полярный и $x^2 = \varphi$ - азимутальный углы, $x^3 = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}$ и запишем все слагаемые в (2) на сфере $x^3 = 1$. Первые два слагаемые принимают вид

$$\frac{\partial A_i}{\partial L_i} - L_i L_j \frac{\partial A_i}{\partial L_j}$$

Определяя на сфере корень $\sqrt{g}$

$$\sqrt{g} = x^3 sin\theta = sin\theta$$

и производные

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sqrt{g}\,\nabla\theta\right) = (cos2\theta cos\varphi, cos2\theta sin\varphi, -sin2\theta) \\ &\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sqrt{g}\,\nabla\varphi\right) = (-cos\varphi, -sin\varphi, 0) \end{aligned}$$

приведем последнее слагаемое в (2) к виду $-2\left(\vec{L}\vec{A}\right)$.

Дивергенция векторного поля в координатах L_i принимает вид

$$div\vec{A} = \mathcal{L}_{\mathbf{i}}\mathbf{A}_{\mathbf{i}} - \mathbf{2}(\vec{\mathbf{L}}\vec{\mathbf{A}}) \tag{3}$$

Подставляя в (3) поле $\vec{A} = grad\ f(L_1, L_2, L_3) = \vec{\mathcal{L}} f$, получим представление оператора Лапласа на сфере в декартовых координатах L_i

$$\Delta f = div\ grad\ f = \Delta f = \mathcal{L}_i^2 f \tag{4}$$

Таким образом угловая часть оператора Лапласа в декартовых переменных представляется квадратом векторного дифференцирущего оператора $\vec{\mathcal{L}}^2$.

2 Собственные функции и собственные числа оператора $\vec{\mathcal{L}}^2$

Рассмотрим задачу определения собственных чисел λ и собственных функций $\hat{\Lambda}$ оператора $\vec{\mathcal{L}}^2$

$$\mathcal{L}_\gamma^2 \hat{\Lambda} = \lambda \hat{\Lambda} \tag{5}$$

в которой оператор $\mathcal{L}_\gamma$ определяется формулой (1). Будем искать собственную фукцию оператора $\hat{\mathcal{L}}_\gamma^2$ в виде тензора ранга n, образованного комбинацией диадных произведений вектора $\vec{L}$ и единичного тензора $\hat{\delta}$

$$\hat{\Lambda}^{(n)} = \hat{L}^{(n)} + a_2\, \hat{L}^{(n-2)} \otimes \hat{\delta} + a_4 \hat{L}^{(n-4)} \otimes \hat{\delta} \otimes \hat{\delta} + ... \tag{6}$$

где тензор $\hat{L}^{(k)}$ имеет вид

$$\hat{L}^{(k)} = \underbrace{\vec{L} \otimes \vec{L} \otimes ... \otimes \vec{L}}_{k},$$

в слагаемых в правой части (6) перебираются всевозможные неповторяющиеся комбинации индексов единичных тензоров. Подействуем оператором $\mathcal{L}_\gamma^{\mathbf{2}}$ на тензор $\hat{\Lambda}^{(n)}$. Непосредственный расчет приводит к следующим результатам

$$\mathcal{L}_\gamma L^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_n} = -n L^{n+1}_{i_1 \ldots i_n \gamma} + \sum_{\alpha=1}^{n} L^{(n-1)}_{i_1 \ldots i_n} \delta_{i_\alpha \gamma},$$
$$\mathcal{L}_\gamma^2 L^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_n} = -n(n+1) L^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_n} + 2 \sum_{\alpha_1, \alpha_2 = 1}^{n} L^{(n-2)}_{i_1 \ldots i_n} \delta_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2}} \tag{7}$$

Здесь и далее в суммах также перебираются всевозможные неповторяющиеся комбинации индексов единичных тензоров. Подставляя $\hat{\Lambda}^{(n)}$ из (6) в (5) и используя формулы (7), получим

$$-n(n+1) L^{(n)}_{i_1 \ldots i_n} -$$
$$-a_2 (n-1)(n-2) \sum_{\alpha_1, \alpha_2 = 1}^{n} L^{(n-2)}_{i_1 \ldots i_n} \delta_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2}} -$$
$$-a_4 (n-3)(n-4) \sum_{\alpha_1, .. \alpha_4 = 1}^{n} L^{(n-2)}_{i_1 \ldots i_n} \delta_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2}} \delta_{i_{\alpha_3} i_{\alpha_4}} + ..$$

$$+2 \sum_{\alpha_1,\alpha_2=1}^{n} L^{(n-2)}_{i_1 \dots i_n} \delta_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2}} + \dots$$
$$+m a_{m-2} \sum_{\alpha_1,..\alpha_m=1}^{n} L^{(n-m)}_{i_1 \dots i_n} \delta_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2}} \dots \delta_{i_{\alpha_{m-1}} i_{\alpha_m}} + .. =$$
$$= \lambda [L^{(n)}_{i_1 \dots i_n} + a_2 \sum_{\alpha_1,\alpha_2=1}^{n} L^{(n-2)}_{i_1 \dots i_n} \delta_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2}} +$$
$$+a_4 \sum_{\alpha_1,..\alpha_4=1}^{n} L^{(n-4)}_{i_1 \dots i_n} \delta_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2}} \delta_{i_{\alpha_3} i_{\alpha_4}} + ..]$$

Приравнивая одинаковые степени L_i, получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&-n(n+1) = \lambda \\
&-a_2(n-1)(n-2) + 2 = -\lambda a_2 \\
&-a_4(n-3)(n-4) + 4a_2 = -\lambda a_4 \\
&\qquad \dots \\
&-a_k(n-k+1)(n-k) + k a_{k-2} = -\lambda a_k \\
&\qquad \dots
\end{aligned}$$

из которой определяем собственное число оператора λ_n

$$\lambda_n = -n(n+1)$$

и рекурентные соотношения между коэффициентами a

$$a_{k+2} = -\frac{1}{2n-k-1}\, a_k \qquad k = 2, 4... \tag{8}$$

Учитывая, что в формуле (6) коэффициент $a_0 = 1$, из (8) получаем явные выражения для коэффициентов a_{2m}

$$a_{2m} \; = \; (-2)^m \frac{(n-1)!(2n-2m-1)!}{(2n-1)!(n-m-1)!} \tag{9}$$

Таким образом, собственной функцией оператора $\vec{\mathcal{L}}^2$, соответствующей собственному числу $\lambda_n = -n(n+1)$, является тензор $\hat{\Lambda}^{(n)}$ ранга n

$$\hat{\Lambda}^{(n)} = \sum_{m=0}^{[n/2]} (-2)^m \, \frac{(n-1)!(2n-2m-1)!}{(2n-1)!(n-1-m)!} \, \hat{L}^{(n-2m)} \otimes \underbrace{\delta \otimes \dots \otimes \delta}_{m} \tag{10}$$

3 Свойства функций $\hat{\Lambda}^{(n)}$

Сформулируем и докажем следующие свойства собственных функций оператора $\vec{\mathcal{L}}$.

Свойство 1. Тензор $\hat{\Lambda}^{(n)}$ симметричен по перестановке индексов.

Доказательство: Это свойство вытекает непосредственно из определения тензора $\hat{\Lambda}^{(n)}$ в виде (6).

Свойство 2. Тензора $\hat{\Lambda}^{(n)}$ разных рангов ортогональны.

Доказательство:

Тензорам $\hat{\Lambda}^{(n)}$ и $\hat{\Lambda}^{(m)}$ для $n \neq m$ соответствуют разные разные собственные числа оператора $\hat{\mathcal{L}}_\gamma^2$. Следуя (5), составим равенство

$$(\lambda_n - \lambda_m)\hat{\Lambda}^{(n)}\hat{\Lambda}^{(m)} = \hat{\Lambda}^{(m)}\hat{\mathcal{L}}_\gamma^2\hat{\Lambda}^{(n)} - \hat{\Lambda}^{(n)}\hat{\mathcal{L}}_\gamma^2\hat{\Lambda}^{(m)}$$

и проинтегрируем обе его части по ориентациям вектора $\vec{L}$. Проводя несложные преобразования, получим

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int\limits_\Omega \hat{\Lambda}^{(n)}\hat{\Lambda}^{(m)}\, d\Omega = \int\limits_\Omega \hat{\mathcal{L}}_\gamma \left[\hat{\Lambda}^{(m)}\hat{\mathcal{L}}_\gamma\hat{\Lambda}^{(n)} - \hat{\Lambda}^{(n)}\hat{\mathcal{L}}_\gamma\hat{\Lambda}^{(m)}\right]\, d\Omega$$

где Ω - пространственный угол. Интеграл справа обращается в ноль по теореме Остроградского-Гаусса (область интегрирования не имеет границ), и поэтому, поскольку $\lambda_n \neq \lambda_m$, справедливо равенство

$$\int\limits_\Omega \hat{\Lambda}^{(n)}\hat{\Lambda}^{(m)}\, d\Omega = 0$$

ч.т.д.

Свойство 3. Свертка тензора $\hat{\Lambda}^{(n)}$ по любой паре индексов равна нулю

Доказательство:

В силу свойства 1. доказательство достаточно провести для произвольной пары индексов α, β . Свертка тензора $\hat{\Lambda}^{(n)}$ по α, β дает тензор $Sp\hat{\Lambda}^{(n)}$ ранга $(n-2)$, который также строится на диадных произведениях вектора $\vec{L}$ и единичного тензора $\hat{\delta}$

$$L_{i_1} L_{i_2} ... L_{i_{n-k-2}}\ \delta_{i_{n-k-1}i_{n-k}} .. \delta_{i_{n-3}i_{n-2}} \tag{11}$$

Рассмотрим произведение (11) для некоторого $k \in \{2, 4...\}$ и произвольного набора индексов и определим коэффициент b_k с которым оно входит в компоненты $Sp\hat{\Lambda}^{(n)}$. Такое произведение возникает при свертке тензора $\hat{\Lambda}^{(n)}$ в слагаемых с коэффициентами a_k и a_{k+2} , причем в первом слагаемом встречается одна свертка вида

$$L_\alpha L_\alpha L_{i_1} ... L_{i_{n-k-2}}\ \delta_{i_{n-k-1}i_{n-k}} .. \delta_{i_{n-3}i_{n-2}},$$

во втором слагаемом - одна свертка вида

$$L_{i_1} L_{i_2} ... L_{i_{n-k-2}}\ \delta_{\alpha\alpha}\delta_{i_{n-k-1}i_{n-k}} .. \delta_{i_{n-3}i_{n-2}},$$

k сверток вида

$$L_{i_1} L_{i_2} ... L_{i_{n-k-2}}\ \delta_{\alpha i_{n-k-1}}\delta_{\alpha i_{n-k}} .. \delta_{i_{n-3}i_{n-2}},$$

и $2(n-k-2)$ сверток вида

$$L_\alpha L_{i_2} ... L_{i_{n-k-2}}\ \delta_{\alpha i_1}\delta_{i_{n-k-1}i_{n-k}} .. \delta_{i_{n-3}i_{n-2}}.$$

Удвоение числа $(n-k-2)$ обусловлено тем, что встречаются свертки $L_\alpha\delta_{\beta i_1} ... |_{\alpha=\beta}$ и $L_\beta\delta_{\alpha i_1} ... |_{\alpha=\beta}$, которые приводят к одному и тому же выражению.

Умножая число этих сверток на коэффициенты в тех слагаемых, в которых они возникают, найдем следующее выражение для коэффициента b_k :

$$b_k\ =\ a_k + (2n-k-1)a_{k+2}$$

С учетом рекурентного соотношения (8) между коэффициентами a_k и a_{k+2} получим $b_k = 0$. В силу произвольности k и индексов в (11) все коэффициенты b_k в компонентах тензора $Sp\hat{\Lambda}^{(n)}$ равны нулю и, следовательно, тензор $Sp\hat{\Lambda}^{(n)} = 0$, ч.т.д.

Свойство 4. Пусть $\hat{A}^{(n)}$ - тензор ранга n, имеющий нулевую свертку по любой паре индексов, $\Lambda_A = \hat{A}^{(n)} \cdot \hat{\Lambda}^{(n)}$ - свертка по всем индексам тензоров $\hat{A}^{(n)}$ и $\hat{\Lambda}^{(n)}$. Усреднение свертки Λ_A по азимутальным направленим вектора $\vec{L}$ в плоскости, ортогональной единичному вектору $\vec{n}$, дает произведение

$$< \Lambda_A >= A_n P_n(L_1)$$

где $A_n = \hat{A}^{(n)} \underbrace{\cdot\vec{n} \cdot \vec{n} ... \cdot \vec{n}}_{n}$, $P_n(L_1)$ - полином Лежандра, $L_1 = (\vec{L}\vec{n})$. *Доказательство:*

Ограничимся доказательством для четного n. В силу свойств тензора $\hat{A}^{(n)}$ имеем

$$\begin{aligned} < \Lambda_A > =&< \hat{A}^{(n)} [\hat{L}^{(n)} + a_2 \, \hat{L}^{(n-2)} \otimes \hat{\delta} + a_4 \hat{L}^{(n-4)} \otimes \hat{\delta} \otimes \hat{\delta} + ...] >= \\ &= A_{i_1 i_2 ... i_n} < L_{i_1} L_{i_2} ... L_{i_n} > \end{aligned}$$

Обозначим декартовы компонеты проекции вектора $\vec{L}$ на азимутальную плоскость через L_2, L_3 и представим их через L_1 и азимутальный угол φ : $L_1 = \sqrt{1 - L_1^2} \, cos\, \varphi$, $L_2 = \sqrt{1 - L_1^2} \, sin\, \varphi$. Среднее произведение компонент L_k представим в виде

$$\begin{aligned} &< L_{i_1} L_{i_2} ... L_{i_n} >= \\ &\quad = L_1^n n_{i_1} n_{i_2} ... n_{i_n} + \\ &\quad + L_1^{n-2} (1 - L_1^2) \{ [< cos^2 \varphi > \; \delta_{i_1 2} \delta_{i_2 2} + \\ &\qquad + < sin^2 \varphi > \; \delta_{i_1 3} \delta_{i_2 3}] \, n_{i_3} ... n_{i_n} \}' + \\ &\quad + L_1^4 (1 - L_1^2)^2 \, \{ [< cos^4 \varphi > \delta_{i_1 2} \delta i_2 2 \delta_{i_3 2} \delta_{i_4 2} + \\ &\qquad + < cos^2 \varphi \, sin^2 \varphi > \delta_{i_1 2} \delta i_2 2 \delta_{i_3 3} \delta_{i_4 3} + \\ &\qquad + < sin^4 \varphi > \delta_{i_1 3} \delta i_2 3 \delta_{i_3 3} \delta_{i_4 3}] n_{i_5} ... n_{i_6} \}' + ... \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь и далее штрих над скобкой указывает на суммирование по всевозможным неповторяющимся комбинациям индексов $i_1, i_2 ... i_n$.

Воспользуемся формулой для средних значений произведения четных степнней тригонометрических функций (формула 2.512.44 в [3])

$$< cos^n \varphi \, \sin^m \varphi >= \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (m-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (m-1)}{2^{(n+m)/2} \left(\dfrac{(n+m)}{2} \right)!}$$

и преобразуем (12) к виду

$$\begin{aligned} &< L_{i_1} L_{i_2} ... L_{i_n} >= \\ &\quad = L_1^n n_{i_1} n_{i_2} ... n_{i_n} + \\ &\quad + L_1^{n-2} (1 - L_1^2) \cdot \frac{1}{2} \{ [\delta_{i_1 2} \delta_{i_2 2} + \delta_{i_1 3} \delta_{i_2 3}] \, n_{i_3} ... n_{i_n} \}' + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+L_1^{(1-4)}(1-L_1^2)^2 \cdot \frac{1}{8}\{[\delta_{i_12}\delta i_2 2\delta_{i_32}\delta_{i_42} + \\
&\qquad \delta_{i_12}\delta i_2 2\delta_{i_33}\delta_{i_43} + \delta_{i_13}\delta_{i_23}\delta_{i_33}\delta_{i_43}]n_{i_5}...n_{i_6}\}' + ... \\
&+L_1^{n-2m}(1-L_1^2)^m \frac{1}{2^m m!}\{[\,1\cdot ...\cdot(2m-1)(\delta_{i_12}...\delta_{i_{2m}2}) + \\
&+1\cdot 3\cdot ...\cdot(2m-3)\cdot 1\cdot(\delta_{i_12}...\delta_{i_{2m-2}2}\delta_{i_{2m-1}3}\delta_{i_{2m}3})' + \\
&+1\cdot ...\cdot(2m-5)\cdot 1\cdot 3\cdot(\delta_{i_12}...\delta_{i_{2m-4}2}\delta_{i_{2m-3}3}...\delta_{i_{2m}3})' + ... \\
&+1\cdot 3\cdot ...\cdot(2m-2k-1)\cdot 1\cdot 3...\cdot(2k-1)\cdot \\
&\qquad (\delta_{i_12}...\delta_{i_{2k}2}\delta_{i_{2k+1}3}...\delta_{i_{2m}3})' + ...]\,n_{i_{2m+1}}...n_{i_n}\}' + ...
\end{aligned} \tag{13}
$$

Учитывая в (13) соотношение

$$\delta_{\alpha 2}\delta_{\beta 2} + \delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 3} = \delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 1} = \delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta,$$

получим

$$
\begin{aligned}
&< L_{i_1}L_{i_2}...L_{i_n} >= \\
&\qquad = L_1^n\, n_{i_1}n_{i_2}...n_{i_n} + \\
&\qquad +L_1^{n-2}(1-L_1^2)\cdot\frac{1}{2}\{(\delta_{i_1i_2} - n_{i_1}n_{i_2})\,n_{i_3}...n_{i_n}\}' + \\
&\qquad +L_1^{(n-4)}(1-L_1^2)^2\cdot\frac{1}{8}\,\{(\delta_{i_1i_2} - n_{i_1}n_{i_2}) \\
&\qquad\qquad (\delta_{i_3i_4} - n_{i_3}n_{i_4})n_{i_5}...n_{i_6}\}' + ... \\
&\qquad +L_1^{n-2m}(1-L_1^2)^m\frac{1}{2^m m!}\,\{(\delta_{i_1i_2} - n_{i_1}n_{i_2})... \\
&\qquad\qquad (\delta_{i_{2m-1}i_{2m}} - n_{i_{2m-1}}n_{i_{2m}})n_{i_{2m+1}}...n_{i_n}\}' + ... \\
&\qquad +(1-L_1^2)^{n/2}\frac{2^{n/2}}{(n/2)!}\,\{(\delta_{i_1i_2} - n_{i_1}n_{i_2})... \\
&\qquad\qquad (\delta_{i_{n-1}i_n} - n_{i_{n-1}}n_{i_n})\}'
\end{aligned} \tag{14}
$$

Подставим $< L_{i_1}L_{i_2}...L_{i_n} >$ из (13) в $< \Lambda_A >$. Учитывая свойства тензора $\hat{A}$, приведем $< \Lambda_A >$ к виду

$$
\begin{aligned}
&< \Lambda_A >= A_{i_1i_2...i_n} < L_{i_1}L_{i_2}...L_{i_n} >= \\
&\quad = A_n\,\{L_1^n\,[1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^m m!}C_n^{2m}(2m-1)(2m-3)...1] + \\
&\quad ... + (-1)^k L_1^{n-2k}[\frac{1}{2}C_n^2(2-1) + \frac{1}{8}C_n^4C_4^1(4-1)(4-3) + ... \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2^m m!}C_n^{2m}C_m^k(2m-1)!!] + ...\} = \\
&\quad = A_n\sum_{k=0}^{n/2}(-1)^k L_1^{n-2k}\sum_{m=k}^{n/2}\frac{1}{2^m m!}C_n^{2m}C_m^k(2m-1)!!
\end{aligned}
$$

Подставляя во внутренней сумме

$$(2m-1)!! = \frac{(2m)!}{2^m m!}$$

и используя формулу (4.2.9.33) в [3], получим

$$\sum_{m=k}^{n/2} \frac{1}{2^m m!} C_n^{2m} C_m^k (2m-1)!! =$$
$$= \sum_{m=k}^{n/2} \frac{(2m)!}{2^m (m!)^2} C_n^{2m} C_m^k = \sum_{m=k}^{n/2} \frac{1}{2^m} C_n^k C_{2(n-k)}^n$$

В итоге для $< \Lambda_A >$ получим выражение

$$< \Lambda_A >= A_n \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{1}{2^n} C_n^k C_{2(n-k)}^n \, L_1^{(n-2k)} \tag{15}$$

Определяя в полиноме Лежандра

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

коэффициент Q_n^m при степени x^m , которая получается при дифференцировании x^{n+m} ,

$$\begin{aligned} Q_n^m &= \frac{1}{2^n n!} (-1)^{m/2} C_n^{\frac{m+n}{2}} \, (n+m)(n+m-1)...(m+1) = \\ &= \frac{1}{2^n n!} (-1)^{m/2} C_n^{\frac{m+n}{2}} \, \frac{(n+m)!}{n!m!} = \\ &= \frac{1}{2^n n!} (-1)^{m/2} C_n^{\frac{n-m}{2}} \, C_{n+m}^n \end{aligned}$$

представим P_n в виде

$$P_n = \sum_0^n \frac{1}{2^n n!} (-1)^{m/2} C_n^{\frac{n-m}{2}} C_{n+m}^n x^m$$

Для четного n, полагая $m = n - 2k$, получим

$$P_n = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{1}{2^n} C_n^k C_{2(n-k)}^n \, x^{(n-2k)} \tag{16}$$

Сравнивая (15),(16), получим

$$< \Lambda_A >= A_n \; P_n(L_1)$$

ч.т.д.

Из приведенного вывода собственной функции $\hat{\Lambda}^{(n)}$ и анализа ее свойств вытекает ряд следствий.

Следствие 1. Любая свертка вида

$$\Lambda_A = \hat{A}^{(n)} \cdot \underbrace{\vec{L} \cdot \vec{L} \cdot ... \cdot \vec{L}}_{n}$$

в которой $\hat{A}^{(n)}$ - произвольный постоянный тензор ранга n, имеющий нулевую свертку по любой паре индексов, является собственной функцией оператора $\vec{\mathcal{L}}^2$, соответствующей собственному числу $\lambda_n = -n(n+1)$.

Следствие 2. Пусть $\hat{A}^{(n)}$ - тензор ранга n, симметричный по перестановке индексов. Тензор $Dev\hat{A}^{(n)}$

$$Dev\hat{A}^{(n)} = \hat{A}^{(n)} + a_2\hat{A}^{(n-2)} \otimes \hat{\delta} +_4 \hat{A}^{(n-4)} \otimes \hat{\delta} \otimes \hat{\delta} ... \quad ,$$

в котором коэффициенты a_{2m} даются формулой (9), в единичных тензорах $\hat{\delta}$ перебираются всевозможные неповторяющиеся комбинации индексов, тензора $\hat{A}^{(k-2)}$ получаются сверткой тензора $\hat{A}^{(k)}$ по паре индексов, имеет нулевую свертку по любой паре индексов.

Доказательство аналогично свойству 3 тензора $\hat{\Lambda}^{(n)}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Грант 94-02-04686).

Литература

[1] В.И. Степанов, в сб. К статистической теории нематических жидких кристаллов. Свердловск: изд. Уральского Научного центра, 1982, С. 46-57

[2] Е.Н. Кожевников, Акуст. журн., 40 (1994) 412.

[3] А.П. Прудников , Ю.А. Брычков , О.А. Маричев, Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
1.10.95