

---

# М Е Х А Н И К А

---

## АСИМПТОТИКА НАПРЯЖЕННО - ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

В.И. Астафьев, Л.В. Степанова, С.А. Шестериков<sup>1</sup>

Приведен анализ показателя сингулярности скоростей деформаций в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоской деформации. Материал подчиняется соотношениям установившейся ползучести. В качестве конкретной зависимости приняты дробно - линейные соотношения. Изучение полей скоростей деформаций и напряжений в окрестности вершины трещины осуществлено на основе предложенной зависимости для напряжений  $\sigma_{ij}(r, \varphi) = \sigma_{ij}^{(0)} + r^\alpha \sigma_{ij}^{(1)}(\varphi) + \dots$ , где  $\alpha > 0$ . Показано, что найденное нулевое приближение  $\sigma_{ij}^{(0)}(\varphi)$  совпадает с полем напряжений подобной задачи для жесткоидеальнопластического материала. Показано, что в окрестности вершины трещины скорости деформаций имеют различную асимптотику по  $r$  в зависимости от угла  $\varphi$ .

Рассмотрим поперечный сдвиг пространства с полубесконечной трещиной в условиях плоской деформации. Для связи между скоростями деформаций ползучести и напряжениями используется дробно - линейное соотношение [1]

$$\dot{P} = A \frac{\sigma}{\sigma_* - \sigma} \quad (1)$$

где  $\dot{P}, \sigma$  - интенсивности скоростей деформаций ползучести и напряжений соответственно,  $A, \sigma_*$  - константы материала. Естественно, что приложенные нагрузки не превышают значения  $\sigma_*$ .

Разрешающая система уравнений рассматриваемой задачи состоит из уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \sigma_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{r\varphi}) + \tau_{r\varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>НИИ Механики МГУ

условия совместности, записанного для скоростей деформаций

$$\frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_r}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_r}{\partial \varphi} = \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \dot{\gamma}_{r\varphi}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \dot{\gamma}_{r\varphi}}{\partial \varphi} \quad (3)$$

и соотношений, связывающих скорости деформаций и напряжения

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{1 - \sigma_0}, \quad \dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{1 - \sigma_0}, \quad \dot{\gamma}_{r\varphi} = 2 \frac{\tau_{r\varphi}}{1 - \sigma_0}, \quad (4)$$

где  $\sigma_0^2 = (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\varphi}^2$  и  $\sigma_0$  - интенсивность напряжений. Здесь и далее все величины записаны в безразмерном виде. Поверхности трещины должны быть свободны от напряжений

$$\text{при } \varphi \pm \pi, \quad \tau_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_\varphi = 0. \quad (5)$$

В силу симметрии задачи можно рассматривать одну из полуплоскостей, поставив условие на продолжении трещины

$$\text{при } \varphi = 0, \quad \sigma_\varphi = 0, \quad u_r = 0. \quad (6)$$

Условие  $u_r = 0$  при  $\varphi = 0$  может быть записано в напряжениях:

$$\text{при } \varphi = 0, \quad \sigma_r = 0. \quad (7)$$

По мере удаления от вершины трещины ( $r \rightarrow \infty$ ) напряжения будут уменьшаться. При малых напряжениях дробно - линейная зависимость (1) может быть заменена линейной. А для такой зависимости можно воспользоваться известным решением линейной задачи. Поэтому асимптотическое условие сближения с решением линейной задачи на бесконечности имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left( -5 \sin \frac{\varphi}{2} + 3 \sin \frac{3\varphi}{2} \right), \\ \sigma_\varphi &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left( -3 \cos \frac{\varphi}{2} - 3 \sin \frac{3\varphi}{2} \right), \quad r \rightarrow \infty \\ \tau_{r\varphi} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + 3 \cos \frac{3\varphi}{2} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

поскольку (8) - точное решение задачи линейной теории упругости о полубесконечной трещине поперечного сдвига.

Поле напряжений в окрестности вершины трещины ищется в виде

$$\sigma_{ij}(r, \varphi) = \sigma_{ij}^{(0)} + r^\alpha \sigma_{ij}^{(1)}(\varphi) + \dots, \quad \alpha > 0 \quad (9)$$

причем при  $r = 0$   $\sigma_0 = 1$ .

Таким образом, задается зависимость для напряжений в окрестности вершины трещины. Эта зависимость позволяет удовлетворить условию ограниченности напряжений и описывает поле скоростей деформаций в окрестности вершины трещины.

Для определения нулевого приближения, т.е. функций  $\sigma_{ij}^{(0)}(\varphi)$ , имеем систему уравнений равновесия

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}^{(0)}}{\partial \varphi} + \sigma_r^{(0)} - \sigma_\varphi^{(0)} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \sigma_\varphi^{(0)}}{\partial \varphi} + 2\tau_{r\varphi}^{(0)} = 0$$

и условие предельного состояния

$$(\sigma_{\varphi}^{(0)} - \sigma_r^{(0)})^2 + 4(\tau_{r\varphi}^{(0)})^2 = 1 \quad (11)$$

с граничными условиями

$$\text{при } \varphi = \pi, \quad \tau_{r\varphi}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{\varphi}^{(0)} = 0 \quad (12)$$

и условиями на продолжении трещины

$$\text{при } \varphi = 0, \quad \sigma_{\varphi}^{(0)} = \sigma_r^{(0)} = 0. \quad (13)$$

Решением этой системы уравнений является следующее распределение напряжений

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq \alpha_1, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \\ \sigma_{\varphi}^{(0)} &= \sigma_r^{(0)} = -\varphi, \quad \tau_{r\varphi}^{(0)} = \frac{1}{2}, \\ \alpha_2 &\leq \varphi \leq \alpha_2, \quad \alpha_2 = \frac{5\pi}{8} + \frac{1}{4} \\ \sigma_r^{(0)} &= -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\cos(2\varphi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}), \\ \sigma_{\varphi}^{(0)} &= -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\cos(2\varphi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}), \\ \tau_{r\varphi}^{(0)} &= \frac{1}{2}\sin(2\varphi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}), \\ \alpha_2 &\leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \\ \sigma_{\varphi}^{(0)} &= \sigma_r^{(0)} = \varphi - \frac{1}{2} - \frac{3\pi}{4}, \quad \tau_{r\varphi}^{(0)} = -\frac{1}{2}, \\ \frac{3\pi}{4} &\leq \varphi \leq \pi \\ \sigma_r^{(0)} &= -\frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad \sigma_{\varphi}^{(0)} = -\frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi), \quad \tau_{r\varphi}^{(0)} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Это распределение напряжений совпадает с хорошо известным полем напряжений, полученным при решении подобной задачи для жесткоидеальнопластического материала. В силу (9) интенсивность напряжений в окрестности вершины трещины имеет вид

$$\sigma_0(r, \varphi) = 1 - r^{\alpha}\sigma(\varphi) + \dots, \quad (15)$$

Используя (4) и (15), можно получить выражения для скоростей деформаций в окрестности вершины трещины

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\varphi} &= -\dot{\varepsilon}_r = \frac{\sigma_{\varphi}^{(0)} - \sigma_r^{(0)}}{r^{\alpha}\sigma(\varphi)} + \frac{\sigma_{\varphi}^{(1)} - \sigma_r^{(1)}}{\sigma(\varphi)} + \dots, \\ \dot{\gamma}_{r\varphi} &= \frac{2\tau_{r\varphi}^{(0)}}{r^{\alpha}\sigma(\varphi)} + \frac{2\tau_{r\varphi}^{(1)}}{\sigma(\varphi)} + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Применяя (14), (16) и анализируя условие совместности (3), можно получить следующее поле скоростей деформаций в окрестности вершины трещины

$$\begin{aligned}
0 &\leq \varphi < \alpha_1, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \\
\dot{\varepsilon}_\varphi &= \dot{\varepsilon}_r = 0, \quad \dot{\gamma}_{r\varphi} = \frac{f_1(\varphi)}{r}, \\
\alpha_1 &< \varphi < \alpha_2, \quad \alpha_2 = \frac{5\pi}{8} + \frac{1}{4} \\
\dot{\varepsilon}_\varphi &= -\dot{\varepsilon}_r = \frac{\cos(2\varphi + \frac{\varphi}{4} - \frac{1}{4})}{r^\alpha} \left[ [A_1 \cos(\varphi + \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4})]^{-\alpha} + [B_1 \sin(\varphi + \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4})]^{-\alpha} \right], \\
\dot{\gamma}_{r\varphi} &= \frac{\cos(2\varphi + \frac{\varphi}{4} - \frac{1}{4})}{r^\alpha} \left[ [A_1 \cos(\varphi + \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4})]^{-\alpha} + [B_1 \sin(\varphi + \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4})]^{-\alpha} \right], \\
\alpha_2 &< \varphi < \frac{3\pi}{4} \\
\dot{\varepsilon}_\varphi &= \dot{\varepsilon}_r = 0, \quad \dot{\gamma}_{r\varphi} = \frac{f_2(\varphi)}{r} \\
\frac{3\pi}{4} &< \varphi \leq \varphi \\
\dot{\varepsilon}_\varphi &= -\dot{\varepsilon}_r = \frac{\cos 2\varphi}{r^\alpha} \left[ [A_2 \cos(\varphi + \frac{\pi}{4})]^{-\alpha} + [B_2 \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})]^{-\alpha} \right], \\
\dot{\gamma}_{r\varphi} &= \frac{\sin 2\varphi}{r^\alpha} \left[ [A_2 \cos(\varphi + \frac{\pi}{4})]^{-\alpha} + [B_2 \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})]^{-\alpha} \right],
\end{aligned} \tag{17}$$

С другой стороны, при построении асимптотических разложений напряжений и скоростей деформаций в окрестности вершины трещины можно выбрать иной путь и отталкиваться не от напряжений, а от скоростей перемещений. Из (4) следует, что  $\dot{\varepsilon}_r = -\dot{\varepsilon}_\varphi$ . Откуда вытекает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \tag{18}$$

где  $u_r, u_\varphi$  - скорости перемещений. Из (18) следует, что скорости перемещений могут быть представлены в виде

$$u_r = \frac{1}{r}\Phi'_\varphi, \quad u_\varphi = -\Phi'_r \tag{19}$$

Для того чтобы получить разложение (9) для напряжений в окрестности вершины трещины, потенциал  $\Phi(r, \varphi)$ , как это следует из определяющих соотношений (4), необходимо искать при  $r \rightarrow 0$  в виде

$$\Phi(r, \varphi) = rh_0(\varphi) + r^{\alpha+1}h_1(\varphi) + \dots, \alpha > 0. \tag{20}$$

Разложение (20) приводит к полю напряжений, совпадающему с распределением напряжений (14) и к полю скоростей деформаций

$$\begin{aligned}
0 &\leq \varphi < \alpha_1, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \\
\dot{\varepsilon}_\varphi &= \dot{\varepsilon}_r = 0, \quad \dot{\gamma}_{r\varphi} = \frac{f_1(\varphi)}{r},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 < \varphi < \alpha_2, \quad \alpha_2 = \frac{5\pi}{8} + \frac{1}{4} \\
\dot{\varepsilon}_\varphi = -\dot{\varepsilon}_r = \frac{\cos(2\varphi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4})}{r^{1-\alpha}} \left[ [A_1 \cos(\varphi + \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4})]^{\alpha-1} + [B_1 \sin(\varphi + \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4})]^{\alpha-1} \right], \\
\dot{\gamma}_{r\varphi} = \frac{\cos(2\varphi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4})}{r^{1-\alpha}} \left[ [A_1 \cos(\varphi + \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4})]^{\alpha-1} + [B_1 \sin(\varphi + \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4})]^{\alpha-1} \right], \\
\alpha_2 < \varphi < \frac{3\pi}{4} \\
\dot{\varepsilon}_\varphi = \dot{\varepsilon}_r = 0, \quad \dot{\gamma}_{r\varphi} = \frac{f_2(\varphi)}{r} \\
\frac{3\pi}{4} < \varphi \leq \pi
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_\varphi = -\dot{\varepsilon}_r = \frac{\cos 2\varphi}{r^{1-\alpha}} \left[ [A_2 \cos(\varphi + \frac{\pi}{4})]^{\alpha-1} + [B_2 \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})]^{\alpha-1} \right], \\
\dot{\gamma}_{r\varphi} = \frac{\sin 2\varphi}{r^{1-\alpha}} \left[ [A_2 \cos(\varphi + \frac{\pi}{4})]^{\alpha-1} + [B_2 \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})]^{\alpha-1} \right],
\end{aligned}$$

Но поля скоростей деформаций (17) и (21) - это решения одной и той же задачи. Поэтому поля (17) и (21) должны совпадать. Это условие выполняется, если  $\alpha = 1 - \alpha$ . Откуда находим, что  $\alpha = \frac{1}{2}$

Формулы (14) и (21) описывают поля напряжений и скоростей деформаций в окрестности вершины трещины. Эти поля необходимо срастить с внешним полем. Для этого вычисляется  $C^*$  - интеграл по полям (14) и (21) при  $r \rightarrow 0$ , учитывая, что для рассматриваемой задачи  $W = \dot{p} - \ln(1 + \dot{p})$ ,  $\dot{p}$  - интенсивность скоростей деформаций ползучести,  $2\dot{w} = \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}$

$$\begin{aligned}
C^* &= 2r \int_0^\pi \left[ W \cos \varphi - \sigma_r (\dot{\varepsilon}_r \cos \varphi - (\dot{\gamma}_{r\varphi} - \dot{w}) \sin \varphi) - \tau_{r\varphi} ((\dot{\gamma}_{r\varphi} + \dot{w}) \cos \varphi - \dot{\varepsilon}_\varphi \sin \varphi) \right] d\varphi = \\
&= 2r \int_0^{\alpha_1} (\dot{p} \cos \varphi + 2\sigma_r \dot{\gamma}_{r\varphi} \sin \varphi) d\varphi + 2r \int_{\alpha_2}^{\frac{3\pi}{4}} (\dot{p} \cos \varphi + 2\sigma_r \dot{\gamma}_{r\varphi} \sin \varphi) d\varphi = \\
&= 2 \int_0^{\alpha_1} f_1(\varphi) (\cos \varphi - 2\varphi \sin \varphi) d\varphi + 2 \int_{\alpha_2}^{\frac{3\pi}{4}} f_2(\varphi) \left[ \cos(\varphi) + 2(\varphi - \frac{1}{2} - \frac{3\varphi}{4}) \sin \varphi \right] d\varphi
\end{aligned}$$

Интеграл (22) следует приравнять  $C^*$ -интегралу, вычисленному по решению линейной задачи. Постоянные  $A_i$  и  $B_i$  можно определить из требования непрерывности компонент скоростей деформаций  $\dot{\varepsilon}_\varphi$  и  $\dot{\gamma}_{r\varphi}$  при переходе через границы областей. Однако задача сращивания имеет ряд особенностей. Поскольку скорости деформаций имеют разную особенность по  $r$  внутри рассматриваемых областей, то непосредственно приравнивать значения  $\dot{\varepsilon}_\varphi$  и  $\dot{\gamma}_{r\varphi}$  на границах по их значениям внутри областей нельзя. Кроме того, задача сращивания имеет особенности, связанные с функциями, зависящими от угла  $\varphi$ . Для того чтобы связать коэффициенты асимптотических разложений внутри областей, строится решение, справедливое в узкой области, содержащей границу. И затем находятся асимптотики полученного решения справа и слева. Полученные таким образом асимптотики сращиваются с имеющимися асимптотическими разложениями внутри областей. Проблема сращивания представляет собой отдельную задачу, а постоянные  $A_i, B_i$  могут быть найдены только посредством процедуры сращивания.

Авторы выражают признательность Международному научному фонду за финансовую поддержку работы в 1995г. (грант NRZ000).

## Литература

- [1] С.А. Шестериков, М.А. Юмашева, Изв.АН СССР, МТТ, 1(1984) 86.
- [2] J.W. Hutchinson *Plastic stress and strain fields at a crack tip*. J.Mech.Phys.Solids, 16(1968),5, pp.337 - 349.
- [3] Дж. Райс Математические методы в механике разрушения.- В кн. Разрушение, т.2, М., Мир, 1975, стр. 204 -336.

Поступила в редакцию  
10.10.1995