ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ, ТРАЕКТОРИИ-УТКИ И ТЕПЛОВОЙ ВЗРЫВ

Е.А. Щепакина

Данная работа посвящена исследованию класса систем обыкновенных нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, возникающих при моделировании задач теории горения

Одной из главных задач теории горения является определение критических условий теплового взрыва. Критичность понимается в следующем смысле: критический режим разграничивает область взрывных и невзрывных режимов. При этом реакция горения будет протекать максимально долго, не срываясь ни в режим взрыва, ни переходя к медленному режиму. Следовательно, с технологической точки зрения, во многих случаях критический режим является наиболее эффективным.

Рассмотрим задачу о тепловом взрыве разреженной газосмеси в инертной пористой среде. Предполагается, что химическая реакция является одностадийной и необратимой. Внутри реакционного сосуда нет никаких других источников тепла, кроме самой химической реакции. Предполагается также однородное распределение температуры и межфазного теплообмена. Безразмерная модель в этом случае имеет вид [1,2,3]

$$\gamma\dot{\Theta} = \eta(1-\eta)\exp\left(\Theta/\left(1+\beta\Theta\right)\right) - \alpha(\Theta-\Theta_c) - \delta\Theta, \tag{1}$$

$$\gamma_c\dot{\Theta}_c = \alpha(\Theta-\Theta_c), \tag{2}$$

$$\dot{\eta} = \eta(1-\eta)\exp\left(\Theta/\left(1+\beta\Theta\right)\right) \tag{3}$$

$$\eta(0) = \eta_0/(1+\eta_0),\ \ \Theta(0) = \Theta_c(0) = 0. \tag{4}$$

Здесь Θ, Θ_c — безразмерная температура газа и инертной среды соответственно; η — глубина превращения; η_0 — критерий автокаталитичности; β и γ — параметры, отражающие физические свойства реакционной фазы. Слагаемое $-\delta\Theta$ характеризует теплоотвод во внешнюю среду. Параметр γ_c отражает физические свойства инертной фазы. Параметр α характеризует начальное состояние системы и полностью определяет динамику процесса.

Для типичных взрывных газосмесей параметры β и γ малы. Таким образом, система (1)–(3) является сингулярно возмущенной, то есть может быть записана в виде

$$\dot{X} = F(X, Y, t, \epsilon), \ \ \epsilon\dot{Y} = G(X, Y, t, \epsilon), \tag{5}$$

где X и Y - векторные переменные, ϵ - малый положительный параметр.

Исследованию сингулярно возмущенных систем посвящено много работ (см. например [1,4]). Основное предположение обычно состоит в том, что

$$det \left\| \frac{\partial}{G} \partial Y(X, \Phi(X, t), 0) \right\| \neq 0, \tag{6}$$

где $Y = \Phi(X, t)$ - изолированное решение уравнения $G(X, Y, t, 0) = 0$.

Однако, во многих прикладных задачах, в частности в задачах химической кинетики, это условие нарушается, и возникают различные критические ситуации [1,5,6,7]. Нарушение условия (6) может привести к возникновению так называемых траекторий-уток [8-15].

Одним из основных методов исследования сингулярно возмущенных систем является метод интегральных многообразий [16-18]. Напомним, что под интегральным многообразием системы (5) обычно понимается некоторое множество, состоящее из интегральных кривых этой системы. Интегральное многообразие называется устойчивым, если любая траектория системы, начинающаяся вблизи интегрального многообразия, при возрастании t неограниченно приближается к траектории на многообразии. Если же это имеет место при $t \to -\infty$, то интегральное многообразие называется неустойчивым. Интегральное многообразие $Y = P(X, t, \epsilon)$ называется медленным, так как движение по нему осуществляется со скоростью порядка $O(1)$, в то время как движение по быстрому интегральному многообразию осуществляется со скоростью порядка $O(\epsilon^{-1})$.

Траектория системы (5) называется траекторией-уткой, если она проходит непрерывным образом вначале по устойчивой части медленного интегрального многообразия, а затем по неустойчивой его части, причем оба раза проходятся расстояния порядка единицы.

Получим достаточные условия того, что устойчивые и неустойчивые медленные интегральные многообразия можно склеить в одной точке, через которую проходит траектория-утка, и найдем асимптотические разложения таких траекторий.

Вопрос существования траектории-утки для трехмерной автономной системы сводится к исследованию двухмерной неавтономной системы обычным приемом исключения переменной t и использования в качестве независимой переменной одной из фазовых координат. В связи с этим мы будем использовать термин “траектория” и для вспомогательных систем сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений вида

$$y' = Y(x, y, z, a, \epsilon) \tag{7}$$

$$\epsilon z' = 2xz + Z(x, y, z, a, \epsilon), \tag{8}$$

где a -скалярный параметр, а функция $Z(x, y, z, a, \epsilon)$ имеет вид

$$Z(x, y, z, a, \epsilon) = Z_1(x, y, z) + \epsilon(C + aC_0) + \epsilon Z_2(x, y, z, a, \epsilon). \tag{9}$$

Здесь C, C_0 - некоторые константы, а функции $Y(x, y, z, a, \epsilon)$, $Z_1(x, y, z)$ и $Z_2(x, y, z, a, \epsilon)$ определены, ограничены и непрерывны в области

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, |z| \leq \rho, |a + CC_0^{-1}| \leq \nu, \epsilon \in [0, \epsilon_0]\}$$

и удовлетворяют в этой области следующим условиям

$$|Y(x,y,z,a,\epsilon)-Y(x,\bar{y},\bar{z},\bar{a},\epsilon)|\leq M\left(|y-\bar{y}|+|z-\bar{z}|\right)+\mu|a-\bar{a}| \tag{10}$$

$$|Z_1(x,y,z)|\leq M|z|^2 \tag{11}$$

$$|Z_1(x,y,z)-Z_1(x,\bar{y},\bar{z})|\leq M\left(|z|+|\bar{z}|\right)^2|y-\bar{y}|+\frac{M}{2}\left(|z|+|\bar{z}|\right)|z-\bar{z}| \tag{12}$$

$$|Z_2(x,y,z,a,\epsilon)|\leq M\mu \tag{13}$$

$$|Z_2(x,y,z,a,\epsilon)-Z_2(x,\bar{y},\bar{z},\bar{a},\epsilon)|\leq M\left(|y-\bar{y}|+|z-\bar{z}|\right)+\mu|a-\bar{a}|. \tag{14}$$

Здесь M — некоторая положительная константа, μ — достаточно малая положительная константа.

Медленная поверхность системы (7)–(9) в силу тождества

$$\left\{2xz+Z(x,y,z,a,0)\right\}_{z=0}\equiv 0.$$

описывается уравнением $z=0$.

Как известно [16,17], в ϵ-окрестности каждого из устойчивых и неустойчивых листов медленной поверхности существуют устойчивое ($x<0$) и неустойчивое ($x>0$) медленные интегральные многообразия $z=h(x,y,a,\epsilon)$. Наличие параметра a позволяет выбрать точку склейки этих медленных интегральных многообразий. Фиксируя точку склейки $(0,y^*)$, мы тем самым выделяем траекторию $y=\phi(x,a)$ $\quad(\phi(0,a)=y^*)$ на многообразии $h(x,y,a,\epsilon)$, которая, пройдя по устойчивой его части до точки склейки, продолжает движение по неустойчивой части (зависимость функции ϕ от ϵ здесь и далее опускается для сокращения записи).

Имеет место

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (10)–(14). Тогда существует такое ϵ_0, что для всех $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$ существуют $a=a^*$ и траектория-утка, проходящая через точку $(0,y^*)$ и отвечающая данному значению a.*

Доказательство теоремы по существу представляет собой модификацию доказательства существования интегрального многобразия [16].

Рассмотрим пространство $\Lambda(q,\delta)$ функций $\psi(x,a,\epsilon)$, непрерывных и ограниченных в $\Omega_1=\{x\in\mathbb{R},|a+CC_0^{-1}|\leq\nu,\epsilon\in(0,\epsilon_0)\}$ и удовлетворяющих условиям

$$|\psi(x,a,\epsilon)|\leq\sqrt{\epsilon}q\mu, \tag{15}$$

$$|\psi(x,a,\epsilon)-\psi(x,\bar{a},\epsilon)|\leq\sqrt{\epsilon}\delta|a-\bar{a}|, \tag{16}$$

где q,δ - положительные константы, не зависящие от μ,ϵ.

Пространство $\Lambda(q,\delta)$ - полное метрическое пространство с метрикой

$$d(\psi,\bar{\psi})=\sup_{\Omega_1}\left|\psi(x,a,\epsilon)-\bar{\psi}(x,a,\epsilon)\right|,\quad \psi,\bar{\psi}\in\Lambda(q,\delta)$$

Для любой функции ψ из $\Lambda(q,\delta)$ определим оператор

$$T(\psi)(\eta,\xi)=\begin{cases}\epsilon^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\eta}\exp\left((\eta^2-s^2)/\epsilon\right)Z(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon),a,\epsilon)\,ds, & \text{для}\,\eta<0\\ -\epsilon^{-1}\int\limits_{\eta}^{\infty}\exp\left((\eta^2-s^2)/\epsilon\right)Z(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon),a,\epsilon)\,ds, & \text{для}\,\eta>0\end{cases} \tag{17}$$

Функция $\phi(x,a)$ является решением задачи

$$y'=Y(x,y,\psi(x,a,\epsilon),a,\epsilon),\quad y(\eta)=\xi. \tag{18}$$

Это уравнение получено из уравнения (7) подстановкой $z=\psi(x,a,\epsilon)$. Из неравенств (10),(16) следуют соотношения

$$|Y(x,y,\psi(x,a,\epsilon),a,\epsilon)-Y(x,\bar{y},\psi(x,a,\epsilon),a,\epsilon)|\le M|y-\bar{y}|,$$

$$|Y(x,y,\psi(x,a,\epsilon),a,\epsilon)-Y(x,y,\psi(x,\bar{a},\epsilon),\bar{a},\epsilon)|\le(\sqrt{\epsilon}M\delta+\mu)|a-\bar{a}|. \tag{19}$$

В силу первого из них существует единственное решение $y=\phi(x,a)$ уравнения (18)

$$\phi(x,a)=\Phi(\eta,\xi,x,y,a,\epsilon|\psi),\quad \Phi(\eta,\xi,\eta,\xi,a,\epsilon|\psi)=\xi. \tag{20}$$

Следует отметить, что если у оператора $T(\psi)(\eta,\xi)$ существует неподвижная точка ψ, то $\psi(x,a,\epsilon)=h(x,\phi(x,a),a,\epsilon)$. Значение параметра a, отвечающее $\phi(x,a)$, определяется из условия непрерывности $T(\phi)(\eta,\xi)$ в точке $\eta=0$. Таким образом, уравнение для a имеет вид

$$\frac{1}{\epsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-s^2/\epsilon\right)Z(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon),a,\epsilon)ds=0$$

или, в силу (9),

$$a=-C_0^{-1}\Big[\frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-s^2/\epsilon\right)\times$$

$$\times\left[Z_1(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon))+\epsilon Z_2(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon),a,\epsilon)\right]ds+C\Big]. \tag{21}$$

Здесь учитывалось, что

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-s^2/\epsilon\right)ds=\sqrt{\pi}.$$

Оператор, определяемый правой частью (21), обозначим $P(a,\xi)$. Докажем, что $P(a,\xi)$ имеет единственную неподвижную точку a^* для фиксированного ξ и заданной функции ψ.

$$|P(a,\xi)-P(\bar{a},\xi)|=$$

$$=\left|C_0^{-1}\right|\frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon\pi}}\Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-s^2/\epsilon\right)\Big[Z_1(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon))-Z_1(s,\phi(s,\bar{a}),\psi(s,\bar{a},\epsilon))+$$

$$+\epsilon\left(Z_2(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon),a,\epsilon)-Z_2(s,\phi(s,\bar{a}),\psi(s,\bar{a},\epsilon),\bar{a},\epsilon)\right)\Big]ds\Big|\le$$

$$\leq \left|C_0^{-1}\right| \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-s^2/\epsilon\right)[M\left(|\psi(s,a,\epsilon)| + |\psi(s,\bar{a},\epsilon)|\right)^2 |\phi(s,a) - \phi(s,\bar{a})| +$$

$$+\frac{M}{2}\left(|\psi(s,a,\epsilon)| + |\psi(s,\bar{a},\epsilon)|\right)|\psi(s,a,\epsilon) - \psi(s,\bar{a},\epsilon)| +$$

$$+\epsilon M\left(|\phi(s,a) - \phi(s,\bar{a})| + |\psi(s,a,\epsilon) - \psi(s,\bar{a},\epsilon)|\right) + \epsilon\mu|a-\bar{a}|]ds \leq$$

$$\leq \left|C_0^{-1}\right| \frac{1}{\sqrt{\epsilon\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-s^2/\epsilon\right)[M(1+4q^2\mu^2)|\phi(s,a) - \phi(s,\bar{a})| + \left(\delta M(q\mu + \sqrt{\epsilon}) + \mu\right)|a-\bar{a}|]ds.$$

В силу теоремы об интегральном неравенстве [17]

$$|\phi(s,a) - \phi(s,\bar{a})| \leq \frac{\mu + \sqrt{\epsilon}\delta M}{M}\left|e^{M(s-\eta)} - 1\right||a-\bar{a}|.$$

Следовательно,

$$|P(a,\xi) - P(\bar{a},\xi)| \leq \left|C_0^{-1}\right| \frac{1}{\sqrt{\epsilon\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-s^2/\epsilon\right)\times$$

$$\times[(1+4q^2\mu^2)\left(\mu + \sqrt{\epsilon}\delta M\right)\left|e^{M(s-\eta)} - 1\right| + \delta M(q\mu + \sqrt{\epsilon}) + \mu]\,ds\ \ |a-\bar{a}|.$$

Возможны два случая

1. $s < \eta < 0$. Тогда из $\left|e^{M(s-\eta)} - 1\right| = 1 - e^{M(s-\eta)}$, имеем

$$\exp\left(-s^2/\epsilon\right)\left(1 - e^{M(s-\eta)}\right) \leq \exp\left(-s^2/\epsilon\right).$$

Следовательно,

$$|P(a,\xi) - P(\bar{a},\xi)| \leq$$

$$\leq \left|C_0^{-1}\right| \frac{1}{\sqrt{\epsilon\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-s^2/\epsilon\right)[(1+4q^2\mu^2)\left(\mu + \sqrt{\epsilon}\delta M\right) + \delta M(q\mu + \sqrt{\epsilon}) + \mu]\,ds\ \ |a-\bar{a}| =$$

$$= \left|C_0^{-1}\right|[2\mu + (2\sqrt{\epsilon} + q\mu)\delta M + 4q^2\mu^2(\mu + \sqrt{\epsilon}\delta M)]|a-\bar{a}|.$$

2. $0 < \eta < s$. В этом случае

$$|P(a,\xi) - P(\bar{a},\xi)| \leq$$

$$\leq \left|C_0^{-1}\right| \frac{1}{\sqrt{\epsilon\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[\exp\left(-s^2/\epsilon + M(s-\eta)\right)(1+4q^2\mu^2)\left(\mu + \sqrt{\epsilon}\delta M\right) +$$

$$+\exp\left(-s^2/\epsilon\right)(\delta M(q\mu + \sqrt{\epsilon}) + \mu - (1+4q^2\mu^2)\left(\mu + \sqrt{\epsilon}\delta M\right))\Big]\,ds|a-\bar{a}|.$$

Так как

$$\exp\left(-s^2/\epsilon + M(s-\eta)\right) = \exp\left(-\left(s - \epsilon M/2\right)^2/\epsilon\right)\exp\left(-M\eta + \epsilon M^2/4\right) <$$

$$< \exp\left(-\tau^2/\epsilon\right),\ \ \tau = s - \frac{\epsilon}{2}M,$$

то $|P(a,\xi) - P(\bar{a},\xi)| \le \left|C_0^{-1}\right| [\delta M(q\mu + \sqrt{\epsilon}) + \mu]\, |a - \bar{a}|$.

Ясно, что при достаточно малых μ и ϵ_0 выполняется неравенство

$$\left|C_0^{-1}\right| [2\mu + (2\sqrt{\epsilon} + q\mu)\delta M + 4q^2\mu^2(\mu + \sqrt{\epsilon}\delta M)] < 1, \tag{22}$$

т.е. оператор $P(a,\xi)$ — сжимающий.

В силу неравенств (11),(13),(15) имеем оценку

$$\left|P(a,\xi) + CC_0^{-1}\right| = \left|C_0^{-1}\right| \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon\pi}} \Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-s^2/\epsilon\right) \Big[Z_1(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon)) +$$

$$+\epsilon Z_2(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon),a,\epsilon)\Big] ds\Big| \le \mu M \left|C_0^{-1}\right| (q^2\mu + 1).$$

При достаточно малых μ и фиксированном q имеет место

$$\mu M \left|C_0^{-1}\right| (q^2\mu + 1) < \nu. \tag{23}$$

Неравенство (23) означает, что сжимающий оператор $P(a,\xi)$ переводит полное метрическое пространство Ω_1 в себя. Таким образом, согласно принципу сжимающих отображений, оператор $P(a,\xi)$ имеет единственную неподвижную точку a^*.

Покажем, что оператор $T(\psi)(\eta,\xi)$ также имеет единственную неподвижную точку , т.е. $T(\psi^*)(\eta,\xi) = \psi^*$.

$$|T(\psi)(\eta,\xi)| = \frac{1}{\epsilon}\Big|\int\limits_{\eta}^{\infty} \exp\left((\eta^2 - s^2)/\epsilon\right)\Big[Z_1(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon)) + \epsilon(C + aC_0) +$$

$$+\epsilon Z_2(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon),a,\epsilon)\Big] ds\Big| \le \frac{1}{\epsilon}\int\limits_{\eta}^{\infty} \exp\left((\eta^2 - s^2)/\epsilon\right) \times$$

$$\times \Big[|Z_1(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon))| + \epsilon\, |Z_2(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon),a,\epsilon)|\Big] ds +$$

$$+\int\limits_{\eta}^{\infty} \exp\left((\eta^2 - s^2)/\epsilon\right) |C + aC_0|\; ds \le \int\limits_{\eta}^{\infty} \exp\left((\eta^2 - s^2)/\epsilon\right) \mu M(q^2\mu + 1)\, ds +$$

$$+C_0\int\limits_{\eta}^{\infty} \exp\left((\eta^2 - s^2)/\epsilon\right) \left|P(a,\xi) + CC_0^{-1}\right|\; ds \le 2\sqrt{\epsilon}\mu M C_1(q^2\mu + 1).$$

Здесь использовалась оценка

$$\int\limits_{x}^{\infty} \exp\left((x^2 - s^2)/\epsilon\right) ds \le \sqrt{\epsilon} C_1, \;\; x > 0.$$

Аналогичное неравенство имеет место и для второго интеграла. При достаточно малых μ неравенство

$$2MC_1(q^2\mu + 1) < q \tag{24}$$

имеет решение $q > 0$, не зависящее от μ.

$$|T(\psi)(a)-T(\psi)(\bar a)|=\frac{1}{\epsilon}\Big|\int\limits_{\eta}^{\infty}\exp\Big((\eta^2-s^2)/\epsilon\Big)\Big[Z_1(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon))+\epsilon(C+aC_0)+$$
$$+\epsilon Z_2(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon),a,\epsilon)-Z_1(s,\phi(s,\bar a),\psi(s,\bar a,\epsilon))-$$
$$-\epsilon(C+\bar aC_0)-\epsilon Z_2(s,\phi(s,\bar a),\psi(s,\bar a,\epsilon),\bar a,\epsilon)\Big]ds\Big|\le$$
$$\le\int\limits_{\eta}^{\infty}\exp\Big((\eta^2-s^2)/\epsilon\Big)\Big[(4q^2\mu^2+1)M|\phi(s,a)-\phi(s,\bar a)|+\Big(|C_0|+\mu+(q\mu+\sqrt{\epsilon})\delta M\Big)|a-\bar a|\Big]ds\le$$
$$\le\sqrt{\epsilon}C_1\Big[(4q^2\mu^2+1)(\mu+\sqrt{\epsilon}\delta M)+|C_0|+\mu+(q\mu+\sqrt{\epsilon})\delta M\Big]\ |a-\bar a|.$$

При достаточно малых μ и ϵ_0 неравенство

$$C_1\Big[(4q^2\mu^2+1)(\mu+\sqrt{\epsilon}\delta M)+|C_0|+\mu+(q\mu+\sqrt{\epsilon})\delta M\Big]<\delta \tag{25}$$

имеет решение $\delta>0$, не зависящее от ϵ и μ. Неравенства (24),(25) означают, что оператор $T(\psi)(\eta,\xi)$ переводит полное метрическое пространство $\Lambda(q,\delta)$ в себя.

$$d(T(\psi),T(\bar\psi))\le\frac{1}{\epsilon}\Big|\int\limits_{\eta}^{\infty}\exp\Big((\eta^2-s^2)/\epsilon\Big)\Big[Z_1(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon))+\epsilon(C+aC_0)+$$
$$+\epsilon Z_2(s,\phi(s,a),\psi(s,a,\epsilon),a,\epsilon)-Z_1(s,\phi(s,a),\bar\psi(s,a,\epsilon))-$$
$$-\epsilon(C+aC_0)-\epsilon Z_2(s,\phi(s,a),\bar\psi(s,a,\epsilon),a,\epsilon)\Big]ds\Big|\le$$
$$\le\frac{1}{\epsilon}\int\limits_{\eta}^{\infty}\exp\Big((\eta^2-s^2)/\epsilon\Big)M\left[\sqrt{\epsilon}q\mu+\epsilon\right]|\psi(s,a,\epsilon)-\bar\psi(s,a,\epsilon)|ds\le MC_1\Big(q\mu+\sqrt{\epsilon}\Big)\,d(\psi,\bar\psi).$$

При достаточно малых ϵ_0,μ выполняется неравенство

$$MC_1\Big(q\mu+\sqrt{\epsilon}\Big)<1 \tag{26}$$

и, следовательно, в силу принципа сжимающих отображений, оператор $T(\psi)(\eta,\xi)$ имеет единственную неподвижную точку $\psi(x,a^*,\epsilon)$. Этой неподвижной точке соответствует решение системы (7)–(9) $y=\phi(x,a^*)$, $z=\psi(x,\phi(x,a^*),a^*,\epsilon)$, которое при $x<0$ проходит по устойчивому медленному интегральному многообразию, а при $x>0$ — по неустойчивому многообразию.

Приведем еще одно утверждение о существовании траектории-утки.

Следствие. *Пусть функция $Z(x,y,z,a,\epsilon)$ в уравнении (8) имеет вид*

$$Z(x,y,z,a,\epsilon)=\epsilon Z_1(x,y,z)+\epsilon^2(C+aC_0)+\epsilon^2 Z_2(x,y,z,a,\epsilon). \tag{27}$$

и выполняются условия (10)–(14). Тогда для системы (7),(8),(27) справедливо утверждение теоремы 1.

Обычно условия (10)–(14) выполняются лишь для $|x|\le r_1$, $|y|\le r_2$. В этом случае траектории-утки являются локальными. Для доказательства существования траекторий-уток в этом случае правые части системы продолжаются на $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ с сохранением соответствующих свойств.

Пусть функции Y и Z в (7)–(9) имеют достаточное количество непрерывных ограниченных производных по всем переменным. Тогда значение параметра a^* и отвечающее ему решение системы могут быть найдены в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра ϵ:

$$\begin{aligned} a^* &= \sum_{i=0}^{k} \epsilon^i \alpha_i + \epsilon^k a_k(\epsilon), \\ y = \phi(x, a^*) &= \sum_{i=0}^{k} \epsilon^i \phi_i(x) + \epsilon^k R_1(x, a_k, \epsilon), \\ z = \psi(x, a^*, \epsilon) &= \sum_{i=0}^{k} \epsilon^i \psi_i(x) + \epsilon^{k+\frac{1}{2}} R_2(x, a_k, \epsilon), \end{aligned} \tag{28}$$

где a_k, R_i — ограниченные непрерывные функции ($i = 1, 2$).

Справедлива

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1, и, кроме того, функции Y, Z_1 и Z_2 имеют достаточное количество непрерывных ограниченных частных производных по всем переменным. Тогда траектория-утка и отвечающее ей значение параметра a представимы в виде (28).*

Отметим, что в конкретных задачах обычно задано начальное условие, причем начальная точка лежит в некоторой окрестности устойчивого интегрального многообразия. Для вычисления начального условия траектории-утки можно использовать формулы, приведенные в работе [18, с.134].

Применим полученные математические результаты для анализа критических явлений в задаче горения (1)–(4).

Критический режим (т.е. режим, разграничивающий область взрывных режимов от невзрывных [18–21]), соответствующий критическому значению параметра α , моделируется траекторией-уткой.

Покажем, что для системы (1)–(3) выполняются условия теоремы о существовании и асимптотических разложений траектории-утки, рассматривая случай $\beta = 0$.

С помощью замены

$$\begin{aligned} \Theta_c &= P_0(x, \Theta) + \gamma P_1(x, \Theta) + \gamma^2 P_2(x, \Theta) + \gamma z, \\ \alpha &= \alpha_0 + \gamma \alpha_1 + \gamma^2 a, \\ x &= \eta(1-\eta)e^{\Theta} - (\alpha_0 + \delta), \end{aligned} \tag{29}$$

где $\alpha_0 P_0 = (\alpha_0 + \delta)\Theta - \eta e^{\Theta}$, система (1)–(3) приводится к виду

$$\begin{aligned} \gamma \dot{z} = x \left(1 + \gamma \frac{\alpha_1}{\alpha_0} + \gamma^2 \frac{a}{\alpha_0}\right) z + \\ + \gamma \Bigg[\frac{\alpha_1 + \gamma a}{\alpha_0} \Big(x \left(P_1 + \gamma P_2\right) + \gamma_c^{-1}(x + \alpha_0 + \delta - \delta\Theta) \Big) + \\ + x P_2 - \gamma_c^{-1}(\alpha_0 + \gamma\alpha_1 + \gamma^2 a)\left(P_1 + z + \gamma P_2\right) - \dot{P}_1 - \gamma \dot{P}_2 \Bigg], \end{aligned} \tag{30}$$

$$\dot{\Theta} = (\alpha_0 + \gamma\alpha_1 + \gamma^2 a)\,(P_1 + \gamma P_2 + z) + \frac{\alpha_1 + \gamma a}{\alpha_0}\,(\delta\Theta - x - \alpha_0 - \delta) \tag{31}$$

$$\dot{x} = (x + \alpha_0 + \delta)\Big[\mp\sqrt{1 - 4(\alpha_0 + \delta + x)e^{-\Theta}}e^{\Theta} +$$
$$+(\alpha_0 + \gamma\alpha_1 + \gamma^2 a)\,(P_1 + \gamma P_2 + z) + \frac{\alpha_1 + \gamma a}{\alpha_0}\,(\delta\Theta - x - \alpha_0 - \delta)\Big], \tag{32}$$

где

$$P_1 = \frac{\pm\sqrt{1 - 4(\alpha_0 + \delta + x)e^{-\Theta}}e^{\Theta}(\alpha_0 + \delta + x) + (\delta\Theta - \delta - \alpha_0 - x)\left(\frac{\alpha_0}{\gamma_c} - x\frac{\alpha_1 + \gamma a}{\alpha_0}\right)}{x\alpha_0}. \tag{33}$$

С помощью замены $\Theta = \Theta_0 + y$,где Θ_0-координата точки склейки интегрального многообразия, переходим в γ-окрестность этой точки. Следовательно, функцию P_1 и уравнение (32) можно представить в виде

$$P_1 = k_0 + k_1(\gamma a) + o(\gamma), \;\; \dot{x} = k_2 + k_3(\gamma a) + o(\gamma),$$

где k_i $(i = \overline{0,3})$-коэффициенты разложений в γ-окрестности точки склейки. С учетом этих разложений система принимает вид $(\epsilon = \gamma k_2)$

$$y' = \left[\alpha_0(k_0 + z) + \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\,(\delta\Theta_0 - \alpha_0 - \delta + \delta y - x)\right]\left(k_2^{-1} - \epsilon k_3 k_2^{-3} a\right) +$$
$$+\frac{\epsilon}{k_2^2}\left[\alpha_0(k_1 a + P_2) + \alpha_1(k_0 + z) + \frac{a}{\alpha_0}\,(\delta\Theta_0 + \delta y - x - \alpha_0 - \delta)\right] + o(\epsilon),$$

$$\epsilon z' = x\left(1 + \frac{\epsilon}{k_2}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} - a\frac{k_3}{k_2}\right) + \frac{\epsilon^2}{k_2^2}\frac{a}{\alpha_0}\left(1 - \frac{\alpha_1 k_3}{k_2}\right)\right) z +$$
$$+\frac{\epsilon}{k_2}\left[\alpha_1\frac{\alpha_0 + \delta - \delta\Theta_0}{\alpha_0\gamma_c} + \frac{\alpha_1}{\alpha_0}(k_0 + \gamma_c^{-1})x - \frac{\alpha_1\delta}{\alpha_0\gamma_c}y - \frac{\alpha_0}{\gamma_c}z - \dot{P}_1 + xP_2\right] +$$
$$+\frac{\epsilon^2}{k_2^2}\left[-\frac{\alpha_1 k_0}{\gamma_c} + a\left(\frac{\alpha_0 + \delta - \delta\Theta_0}{\alpha_0\gamma_c} - \frac{\alpha_0 k_1}{\gamma_c}\right)\right] +$$
$$+\frac{\epsilon^2}{k_2^2}\left[-\frac{\alpha_1 z + \alpha_0 P_2}{\gamma_c} - \dot{P}_2 + \frac{a\,(x(k_0 + \alpha_1 k_1 + \gamma_c^{-1}) - \delta\gamma_c^{-1}y) + \alpha_1 x P_2}{\alpha_0}\right] + o(\epsilon^2),$$

где функция P_2 выбирается из условия

$$xP_2 = \dot{P}_1 + \frac{\alpha_0}{\gamma_c}z - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}(k_0 + \gamma_c^{-1})x + \alpha_0 k_0\gamma_c^{-1} + \alpha_1\frac{\delta y + \delta\Theta_0 - \alpha_0 - \delta}{\alpha_0\gamma_c}.$$

В силу того, что в γ-окрестности точки склейки значения x, y и z малы, можно представить (1)–(3) в виде системы

$$y' = Y(x, y, z, a, \epsilon),$$
$$\epsilon z' = 2xz + \epsilon^2\,(C + aC_0) + \epsilon^2 Z_2(x, y, z, a, \epsilon),$$

для которой выполняются условия теоремы 2, и, следовательно, для некоторого критического значения α^* существует траектория-утка.

Ввиду громоздкости выражений для критического значения параметра α ограничимся случаем $\delta = 0$. Имеем

$$\alpha^* = \frac{1-\beta\Theta_{00}^2}{2+\sqrt{4+\gamma_c^{-2}}} e^{\Theta_{00}} \left[1 - \gamma\left(\frac{1}{2}\gamma_c^{-2} + \frac{1}{2}\gamma_c^{-1}\left(2+\sqrt{4+\gamma_c^{-2}}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sqrt[4]{4+\gamma_c^{-2}}\sqrt{2+\sqrt{4+\gamma_c^{-2}}}\right)\right], \quad \Theta_{00} = \frac{1}{2}\left(\gamma_c^{-1} + \sqrt{4+\gamma_c^{-2}}\right).$$

Выражение записано с погрешностью порядка $o(\gamma+\beta)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (программа "Соросовские аспиранты") и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 94–01–00175).

Литература

[1] А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.. М.:Высш. шк., 1990.

[2] В.И. Бабушок, В.М. Гольдштейн, А.С. Романов, В.С. Бабкин. Физика горения и взрыва **28, N 4** (1992) 3.

[3] B.F. Gray. Combust. Flame **21** (1973) 317.

[4] А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных. М.:Наука, 1973.

[5] А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях.. М: Изд-во МГУ, 1978.

[6] Л.И. Кононенко, В.А. Соболев. Сиб. матем. журн. **35, N 6** (1994) 1264.

[7] Z-M Gu, N.N. Nefedov, R.E. O'Malley,Jr. SIAM J. Appl. Math. **49, N 1** (1989) 1.

[8] E. Benoit. Canards de $\mathbb{R}^3$. These.. Paris, 1983.

[9] E. Benoit, J.L. Callot, F. Diener, M. Diener. Collect. Math. **31, N 1** (1980) .

[10] M. Diener. Nessie et Les Canards. Strasbourg, Publication IRMA, 1979.

[11] W. Eckhaus. Lect. Notes in Math. **925** (1983) 449.

[12] В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников. Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ **5** (1986) 5.

[13] А.К. Звонкин, М.А. Шубин. Успехи матем. наук. **39, вып.2** (1984) 77.

[14] E.F. Mishchenko, Yu.S. Kolesov, A.Yu. Kolesov, N.Kh. Rozov. Asymptotic methods in singularly perturbed systems.. New York: Plenum Publ. Corp., 1994.

[15] С.Н. Самборский. Докл. АН УССР. **А,9** (1985) 22.

[16] Ю.А. Митропольский, О.Б. Лыкова. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.:Наука, 1975.

[17] В.В. Стрыгин, В.А. Соболев. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.:Наука, 1988.

[18] В.М. Гольдштейн, В.А. Соболев. Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. Новосибирск: Ин-т математики АН СССР. Сиб. отд-ние, 1988.

[19] G.N. Gorelov, V.A. Sobolev. Appl. Math. Lett. **5, N 6** (1992) 3.

[20] G.N. Gorelov, V.A. Sobolev. Combust. Flame **87** (1991) 203.

[21] В.А. Соболев, Е.А. Щепакина. Физика горения и взрыва **3** (1993) 133.

Поступила в редакцию

29.09.95 .