РАСЩЕПЛЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С СИНГУЛЯРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

С.В. Озёрский

В настоящей работе исследуется возможность расщепления линейных и нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач на задачи меньшей размерности для медленных и быстрых переменных с помощью метода, предложенного в работе [1]. Изучается вопрос о применимости данного метода в бесконечномерных пространствах.

1 Введение

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t,x,y,\varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &= g(t,x,y,\varepsilon) \end{cases}$$

с краевыми условиями

$$\Phi \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} + \Psi \begin{bmatrix} x(1) \\ y(1) \end{bmatrix} = \Lambda,$$

где $t \in R$, $x \in R^m$, $y \in R^n$, ε — положительный малый параметр, $f(t,x,y,\varepsilon)$ и $g(t,x,y,\varepsilon)$ — — векторные функции соответствующей размерности, Φ, Ψ — числовые квадратные матрицы размерности $(m+n)$, Λ — вектор из числовых параметров той же размерности.

Такие задачи изучались многими авторами и обычно для их решения использовался метод пограничных функций, разработанный А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузовым [2]. Конструктивный метод расщепления сингулярно возмущенных дифференциальных систем, предложенный в работе [1], зачастую позволяет более эффективно решать задачи указанного типа. В данной статье рассматриваются некоторые линейные и нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи, для которых строится расщепляющее преобразование, приводящее их к краевым задачам для медленных переменных и начальным задачам для быстрых переменных. На примере синтеза оптимального управления в задаче нагрева термически тонкого тела изучается возможность распространения метода декомпозиции на системы в гильбертовых пространствах.

2 Расщепление линейных систем

Пусть система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_{11}x + A_{12}y + f_1 \\ \varepsilon\dot{y} &= A_{21}x + A_{22}y + f_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $x \in R^m$, $y \in R^n$, $A_{ij} = A_{ij}(t,\varepsilon)$ — матричные функции и $f_i = f_i(t,\varepsilon)$ — векторные функции соответствующих порядков $(i,j = 1,2)$, $t \in R$, ε — положительный малый параметр. Предполагается, что матрицы A_{ij}, $A_{22}^{-1}(t,0)$ и функции f_i непрерывны и ограничены вместе с достаточным количеством производных по t и ε при $t \in R$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ и, следовательно, имеют место асимптотические разложения

$$A_{ij} = A_{ij}^{(0)}(t) + \varepsilon A_{ij}^{(1)}(t) + \ldots + \varepsilon^k A_{ij}^{(k)}(t) + \varepsilon^{k+1} A_{ij}^{(k+1)}(t,\varepsilon),$$

$$f_i = f_i^{(0)}(t) + \varepsilon f_i^{(1)}(t) + \ldots + \varepsilon^k f_i^{(k)}(t) + \varepsilon^{k+1} f_i^{(k+1)}(t,\varepsilon)$$

с гладкими и ограниченными коэффициентами.

Пусть для системы (1) выполняются следующие условия:

(i) Существуют такие числа $\alpha \geq 0$ и $K > 0$, что фундаментальная матрица $U(t,s)$ уравнения $\dot{x} = A_1^{(0)}(t)x$, $A_1^{(0)} = A_{11}^{(0)} - A_{12}^{(0)}(A_{22}^{(0)})^{-1}A_{21}^{(0)}$ удовлетворяет неравенству

$$\|U(t,s)\| \leq K\exp[-\alpha(t-s)], \ \ -\infty < t \leq s < +\infty;$$

(ii) Существуют такие числа $\beta > 0$, $N > 0$, что фундаментальная матрица $V(t,s,\varepsilon)$ уравнения $\varepsilon\dot{y} = [A_2^{(0)}(t) + \varepsilon A_2^{(1)}(t)]y$, $A_2^{(0)} = A_{22}^{(0)}$, $A_2^{(1)} = A_{22}^{(1)} + (A_{22}^{(0)})^{-1}A_{21}^{(0)}A_{12}^{(0)}$ удовлетворяет неравенству

$$\|V(t,s,\varepsilon)\| \leq N\exp[-\beta\varepsilon^{\nu}(t-s)], \ \ -\infty < s \leq t < +\infty,$$

где $\nu \in [-1,0]$ и $\beta > \alpha$, если $\nu = 0$.

В работе [3] установлено, что при выполнении условий (i),(ii) система (1) имеет медленное интегральное многообразие $y = Hx + h$ и существует преобразование

$$x = v + \varepsilon Pz, \ \ y = z + Hx + h, \tag{2}$$

приводящее систему (1) к диагональному виду

$$\begin{cases} \dot{v} &= A_1(t,\varepsilon)v + f(t,\varepsilon) \\ \varepsilon\dot{z} &= A_2(t,\varepsilon)z, \end{cases} \tag{3}$$

причем $A_1 = A_{11} + A_{12}H$, $A_2 = A_{22} - \varepsilon HA_{12}$, $f = f_1 + A_{12}h$, матрицы H,P и функция h являются решениями уравнений

$$\varepsilon\dot{H} + \varepsilon H(A_{11} + A_{12}H) = A_{21} + A_{22}H, \tag{4}$$

$$\varepsilon\dot{P} + PA_2 = \varepsilon A_1 P + A_{12}, \tag{5}$$

$$\varepsilon\dot{h} + \varepsilon Hf_1 = A_2 h + f_2 \tag{6}$$

и представимы в виде асимптотических разложений с непрерывными и ограниченными коэффициентами

$$\begin{aligned} H &= H^{(0)}(t) + \varepsilon H^{(1)}(t) + \varepsilon^2 H^{(2)}(t) + \ldots, & (7)\\ P &= P^{(0)}(t) + \varepsilon P^{(1)}(t) + \varepsilon^2 P^{(2)}(t) + \ldots, & (8)\\ h &= h^{(0)}(t) + \varepsilon h^{(1)}(t) + \varepsilon^2 h^{(2)}(t) + \ldots. & (9)\end{aligned}$$

Применение расщепляющего преобразования (2) оказывается эффективным при решении широкого круга задач устойчивости, оптимального управления, а также начальных и краевых задач.

Рассмотрим две краевые задачи для скалярного дифференциального уравнения

$$\varepsilon\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t)$$

$$\alpha_{i1}x(0) + \alpha_{i2}x(1) + \beta_{i1}\dot{x}(0) + \beta_{i2}\dot{x}(1) = \gamma_i,\ \ i = 1, 2,$$

где $a(t)$,$b(t)$,$f(t)$ являются непрерывными функциями на $[0, 1)$, $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i$ – числовые параметры и хотя бы один из коэффициентов β_{ij} отличен от нуля.

Случай 1: $a(t) \geq a_0 > 0$.
Запишем исходное уравнение в виде эквивалентной системы

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}_1 =&\ \ x_2,\\ \varepsilon\dot{x}_2 =&\ \ -b(t)x_1 - a(t)x_2 + f(t).\end{aligned}\right. \tag{10}$$

С помощью преобразования $x_1 = y_1 + \varepsilon P y_2$, $x_2 = Hy_1 + (I + \varepsilon HP)y_2 + h$ вместо (10) получаем систему

$$\left\{\begin{aligned} \dot{y}_1 =&\ \ H(t,\varepsilon)y_1 + h(t,\varepsilon),\\ \varepsilon\dot{y}_2 =&\ \ -[a(t) + \varepsilon H(t,\varepsilon)]y_2.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

с краевыми условиями

$$\lambda_{i1}y_1(0) + \lambda_{i2}y_1(1) + \mu_i y_2(0) = \delta_i,$$

$$\lambda_{i1} = \alpha_{i1} + \beta_{i1}H(0,\varepsilon),\ \ \lambda_{i2} = \alpha_{i2} + \beta_{i2}H(1,\varepsilon),$$

$$\mu_i = \varepsilon\alpha_{i1}P(0,\varepsilon) + \beta_{i1}[1 + \varepsilon H(0,\varepsilon)P(0,\varepsilon)],$$

$$\delta_i = \gamma_i - \beta_{i1}h(0,\varepsilon) - \beta_{i2}h(1,\varepsilon) + O\left(e^{-\frac{a_0}{\varepsilon}}\right),\ \ i = 1, 2.$$

В результате порядок рассматриваемой задачи понижается, а именно, получаем краевую задачу для медленной переменной

$$\dot{y}_1 = H(t,\varepsilon)y_1 + h(t,\varepsilon),$$

$$[\lambda_{21} - \mu_2\mu_1^{-1}\lambda_{11}]y_1(0) + [\lambda_{22} - \mu_2\mu_1^{-1}\lambda_{12}]y_1(1) = \delta_2 - \mu_2\mu_1^{-1}\delta_1$$

и начальную задачу для быстрой переменной

$$\varepsilon\dot{y}_2 = -[a(t) + \varepsilon H(t,\varepsilon)]y_2,$$

$$y_2(0) = \mu_1^{-1}[\delta_1 - \lambda_{11}y_1(0) - \lambda_{12}y_1(1)].$$

Для $H^{(k)}$, $h^{(k)}$ и $P^{(k)}$ в разложениях (7),(8),(9) получаем выражения

$$H^{(0)} = -a^{-1}b,\ \ H^{(1)} = -a^{-1}[\dot H^{(0)} + (H^{(0)})^2],\ \ H^{(2)} = -a^{-1}[\dot H^{(1)} + 2H^{(0)}H^{(1)}],\dots$$
$$h^{(0)} = -a^{-1}f,\ \ h^{(1)} = -a^{-1}[\dot h^{(0)} + H^{(0)}h^{(0)}],\ \ h^{(2)} = -a^{-1}[\dot h^{(1)} + H^{(0)}h^{(1)} + H^{(1)}h^{(0)}],\dots$$
$$P^{(0)} = -a^{-1},\ \ P^{(1)} = -a^{-1}[2H^{(0)}P^{(0)} - \dot P^{(0)}].$$

Случай 2: $a(t)\equiv 0$, $b(t)\le b_0<0$.

Этот случай можно интерпретировать как вырожденный, так как $a(t)\equiv 0$ и функции H,P,h уже нельзя искать в виде (7),(8),(9), но расщепляющее преобразование (2) существует и имеет ту же форму, что и в случае 1. Только H,P,h находятся в виде асимптотических разложений по дробным степеням малого параметра :

$$H = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}H^{(-1)}(t) + H^{(0)}(t) + \sqrt{\varepsilon}H^{(1)}(t) + \varepsilon H^{(2)}(t) + \dots, \tag{12}$$
$$P = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}P^{(-1)}(t) + P^{(0)}(t) + \sqrt{\varepsilon}P^{(1)}(t) + \varepsilon P^{(2)}(t) + \dots, \tag{13}$$
$$h = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}h^{(-1)}(t) + h^{(0)}(t) + \sqrt{\varepsilon}h^{(1)}(t) + \varepsilon h^{(2)}(t) + \dots. \tag{14}$$

как решения соответствующих уравнений (4),(5),(6). Система (11) в этом случае превращается в систему

$$\begin{cases} \sqrt{\varepsilon}\dot y_1 = & \overline{H}(t,\varepsilon)y_1 + \overline{h}(t,\varepsilon), \\ \sqrt{\varepsilon}\dot y_2 = & -\overline{H}(t,\varepsilon)y_2, \end{cases} \tag{15}$$

причем $\overline{H} = \sqrt{\varepsilon}H$, $\overline{h} = \sqrt{\varepsilon}h$. Сделаем замену переменной по формуле $y_1 = y_{11} + \tilde h$, где $\tilde h$ — — частное решение первого уравнения системы (15). В результате применения преобразования $x_1 = y_{11} + \varepsilon P y_2 + \tilde h$, $x_2 = Hy_{11} + (1+\varepsilon HP)y_2 + h + H\tilde h$ получаем краевую задачу

$$\sqrt{\varepsilon}\dot y_{11} = \overline{H}(t,\varepsilon)y_{11},\ \ \sqrt{\varepsilon}\dot y_2 = -\overline{H}(t,\varepsilon)y_2,$$
$$\lambda_{i1}y_2(0) + \lambda_{i2}y_{11}(1) = \delta_i,\ \ i=1,2$$
$$\lambda_{i1} = \varepsilon\alpha_{i1}P(0,\varepsilon) + \beta_{i1}[1+\varepsilon H(0,\varepsilon)P(0,\varepsilon)],\ \ \lambda_{i2} = \alpha_{i2} + \beta_{i2}H(1,\varepsilon),$$
$$\delta_i = \gamma_i - [\alpha_{i1} + \beta_{i1}H(0,\varepsilon)]\tilde h(0,\varepsilon) - [\alpha_{i2} + \beta_{i2}H(1,\varepsilon)]\tilde h(1,\varepsilon) -$$
$$-\beta_{i1}h(0,\varepsilon) - \beta_{i2}h(1,\varepsilon) + O\left(\exp\left(-\sqrt{-\frac{b_0}{\varepsilon}}\right)\right).$$

Если $\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{21}\lambda_{12} \ne 0$, то исходная краевая задача в рассматриваемом случае имеет единственное решение и может быть сведена к двум начальным задачам для y_{11} и y_2. Для $H^{(k)}, P^{(k)}, h^{(k)}$ имеем выражения:

$$H^{(-1)} = \sqrt{-b},\ \ H^{(0)} = -\frac{1}{2}(H^{(-1)})^{-1}\dot H^{(-1)},\ \ H^{(1)} = -\frac{1}{2}(H^{(-1)})^{-1}[\dot H^{(0)} + (H^{(0)})^2],$$
$$H^{(2)} = -\frac{1}{2}(H^{(-1)})^{-1}[\dot H^{(1)} + 2H^{(0)}H^{(1)}],\ \ P^{(-1)} = -\frac{1}{2}(H^{(-1)})^{-1},$$
$$P^{(0)} = (H^{-1)})^{-1}\left[\frac{1}{2}\dot P^{(-1)} - H^{(0)}P^{(-1)}\right],$$
$$P^{(1)} = (H^{(-1)})^{-1}\left[\frac{1}{2}\dot P^{(0)} - H^{(0)}P^{(0)} - H^{(1)}P^{(-1)}\right],$$
$$h^{(-1)} = (H^{(-1)})^{-1}f,\ \ h^{(0)} = -(H^{(-1)})^{-1}[\dot h^{(-1)} + H^{(0)}h^{(-1)}],$$
$$h^{(1)} = -(H^{(-1)})^{-1}[\dot h^{(0)} + H^{(0)}h^{(0)} + H^{(1)}h^{(-1)}],$$
$$h^{(2)} = -(H^{(-1)})^{-1}[\dot h^{(1)} + H^{(0)}h^{(1)} + H^{(1)}h^{(0)} + H^{(2)}h^{(-1)}].$$

3 Нелинейные системы

В этом разделе будем иметь дело с системами дифференциальных уравнений следующего вида
$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x} &= f(t,x,y,\varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &= g(t,x,y,\varepsilon), \end{array}\right. \tag{16}$$
где $x \in R^m$, $y \in R^n$, ε — малый положительный параметр.

Предполагается, что для системы (16) выполнены следующие условия, аналогичные налагаемым в работах А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова [2, 4]:

(i) уравнение $g(t,x,y,0) = 0$ имеет изолированное решение $y = h_0(t,x)$ при $t \in R$, $x \in R^m$;

(ii) в области $\Omega = \{t \in R,\ x \in R^m,\ \|y - h_0(t,x)\| \le \rho_0,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\}$ функции h_0, f, g имеют достаточное число равномерно непрерывных и ограниченных частных производных по всем переменным;

(iii) корни $\lambda_i(t,x)$ характеристического уравнения матрицы $B = B(t,x) = g_y(t,x,h_0(t,x),0)$ удовлетворяют неравенству $Re\lambda_i(t,x) \le -2\alpha < 0,\ i = 1,\dots,n$.

В статье [5] показано, что при выполнении этих условий найдутся такие ε^* и ρ^* $(0 < \varepsilon^* \le$ $\le \varepsilon_0,\ 0 < \rho^* \le \rho_0)$, что в области $\Omega_1 = \{t \in R,\ v \in R^m,\ \|z\| \le \rho^*,\ 0 \le \varepsilon \le$ $\le \varepsilon^*\}$ существует гладкая замена переменных вида
$$x = v + \varepsilon H(t,v,z,\varepsilon),\ \ y = z + h(t,x,\varepsilon),\ \ H(t,v,0,\varepsilon) \equiv 0, \tag{17}$$
приводящая систему (16) к блочно-треугольному виду
$$\dot{v} = F(t,v,\varepsilon),\ \ \varepsilon\dot{z} = G(t,v,z,\varepsilon),\ \ G(t,v,0,\varepsilon) \equiv 0, \tag{18}$$
причем функция $y = h(t,x,\varepsilon)$ описывает медленное интегральное многообразие системы (16), существование и гладкость которого обеспечивают условия (i)–(iii) [6, 7].

Уравнение, описывающее движение на интегральном многообразии, имеет вид
$$\dot{v} = F(t,v,\varepsilon),\ \ F(t,v,\varepsilon) = f(t,v,h(t,v,\varepsilon),\varepsilon). \tag{19}$$

В окрестности интегрального многообразия $y = h(t,x,\varepsilon)$ вводятся переменные: v — решение уравнения (19), $w = x - v$, $z = y - h(t,x,\varepsilon)$ и рассматривается расширенная вспомогательная система
$$\begin{array}{rcl} \dot{v} &=& F(t,v,\varepsilon),\ \ \dot{w} = W(t,v,w,z,\varepsilon),\ \ \varepsilon\dot{z} = Z(t,v,w,z,\varepsilon), \\ W(t,v,w,z,\varepsilon) &=& f(t,v+w,z+h(t,v+w,\varepsilon),\varepsilon) - f(t,v,h(t,v,\varepsilon),\varepsilon), \\ Z(t,v,w,z,\varepsilon) &=& g(t,v+w,z+h(t,v+w,\varepsilon),\varepsilon) - \varepsilon h_t(t,v+w,\varepsilon) - \\ &-& \varepsilon h_x(t,v+w,\varepsilon) f(t,v+w,z+h(t,v+w,\varepsilon),\varepsilon). \end{array} \tag{20}$$

Как и в работах [1, 7] устанавливается, что в области Ω_1 у системы (20) существует интегральное многообразие быстрых движений вида
$$w = \varepsilon H(t,v,z,\varepsilon), \tag{21}$$
где функция $H(t,v,z,\varepsilon)$ достаточно гладкая и удовлетворяет неравенствам
$$\|H(t,v,z,\varepsilon)\| \le a\|z\|,\ \ \|H(t,v,z,\varepsilon) - H(t,v,z_1,\varepsilon)\| \le b\|z - z_1\|,$$
$$\|H(t,v,z,\varepsilon) - H(t,v_1,z,\varepsilon)\| \le c\|z\|\,\|v - v_1\|.$$

Движение по интегральному многообразию (21) описывается системой (18), где $G(t,v,z,\varepsilon) = Z(t,v,\varepsilon H(t,v,z,\varepsilon),z,\varepsilon)$. При этом функции $h(t,x,\varepsilon)$ и $H(t,v,z,\varepsilon)$ могут быть найдены в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра

$$h(t,x,\varepsilon) = h_0(t,x) + \varepsilon h_1(t,x) + \varepsilon^2 h_2(t,x) + \ldots,$$
$$H(t,v,z,\varepsilon) = H_0(t,v,z) + \varepsilon H_1(t,v,z) + \varepsilon^2 H_2(t,v,z) + \ldots$$

из уравнений

$$\varepsilon h_t + \varepsilon h_x f(t,x,h,\varepsilon) = g(t,x,h,\varepsilon) \tag{22}$$

$$\varepsilon H_t + \varepsilon H_v F(t,v,\varepsilon) + H_z Z(t,v,\varepsilon H,z,\varepsilon) = W(t,v,\varepsilon H,z,\varepsilon) \tag{23}$$

Во многих практически важных случаях достаточно вычислять только нулевое приближение функции $H(t,v,z,\varepsilon)$.

В качестве примера рассмотрим скалярное уравнение

$$\varepsilon\ddot{x} + a(x)\dot{x} + b(x) = 0, \tag{24}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — ограниченные и гладкие функции, $a(x) \geq a_0 > 0$. Эквивалентная система второго порядка

$$\dot{x} = y, \quad \varepsilon\dot{y} = -a(x)y - b(x)$$

имеет медленное интегральное многообразие $y = h(x,\varepsilon)$. Из уравнения

$$\varepsilon h'h = -ah - b, \quad \left(h' = \frac{dh}{dx}\right),$$

аналогичного уравнению (22), находим h в виде асимптотического разложения

$$h = h_0(x) + \varepsilon h_1(x) + O(\varepsilon^2), \quad h_0 = -\frac{b(x)}{a(x)}, \quad h_1 = -\frac{h_0' h_0}{a}$$

Уравнение (23) для функции H в рассматриваемом случае имеет следующий вид

$$\varepsilon\frac{\partial H}{\partial v}h(v,\varepsilon) + \frac{\partial H}{\partial z}[-a(v+\varepsilon H) - \varepsilon h'(v+\varepsilon H,\varepsilon)]z = z + h(v+\varepsilon H,\varepsilon) - h(v,\varepsilon).$$

Отсюда получаем $H(v,z,\varepsilon) = H_0(v,z) + O(\varepsilon)$, где $H_0(v,z) = -z/a(v)$. В соответствии с предыдущими результатами данного раздела имеем представление

$$\begin{aligned} x &= v - \varepsilon\frac{z}{a(v)} + O(\varepsilon^2), \\ y &= z - \frac{b(x)}{a(x)} - \varepsilon\frac{h_0(x)h_0'(x)}{a(x)} + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

где v и z удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\dot{v} = h(v,\varepsilon) = h_0(v) - \varepsilon\frac{h_0(v)h_0'(v)}{a(v)} + O(\varepsilon^2), \tag{25}$$

$$\varepsilon\dot{z} = -\left[a\left(v - \varepsilon\frac{z}{a(v)}\right) + \varepsilon h_0'(v) + O(\varepsilon^2)\right]z. \tag{26}$$

Если для исходного уравнения (24) заданы краевые условия

$$\alpha_1 x(0) + \alpha_2 x(1) + \beta_1\dot{x}(0) + \beta_2\dot{x}(1) = \gamma_1,$$
$$\alpha_3 x(0) + \alpha_4 x(1) + \dot{x}(0) + \beta_3\dot{x}(1) = \gamma_2,$$

то для уравнения (25) получается краевое условие вида

$$\alpha_1[v_0 + \varepsilon H_0(v_0, z_{00})] + \alpha_2 v_1 + \beta_1(z_0 - h_0(v_0))\left[1 + \varepsilon\frac{h_0'(v_0)}{a(v_0)}\right] + \beta_2 h(v_1, \varepsilon) = \gamma_1 + O(\varepsilon^2),$$

где $v_0 = v(0, \varepsilon)$, $v_1 = v(1, \varepsilon)$, $z_0 = z_{00} + \varepsilon z_{01} + \ldots$ — начальное значение для (26), то есть $z_0 = z(0, \varepsilon)$. Величина z_0 находится из уравнения

$$\alpha_3[v_0 + \varepsilon H_0(v_0, z_{00})] + \alpha_4 v_1 + (z_0 - h_0(v_0))\left[1 + \varepsilon\frac{h_0'(v_0)}{a(v_0)}\right] + \beta_3 h(v_1, \varepsilon) = \gamma_2 + O(\varepsilon^2).$$

Легко видеть, что

$$z_0 = \gamma_2 + h(v_0, \varepsilon) - \alpha_3 v_0 - \alpha_4 v_1 - \beta_3 h(v_1, \varepsilon) - \varepsilon H_0(v_0, z_{00}) - \varepsilon z_{00}\frac{h_0'(v_0)}{a(v_0)} + O(\varepsilon^2),$$

где $z_{00} = \gamma_2 + h_0(v_0) - \alpha_3 v_0 - \alpha_4 v_1 - \beta_3 h_0(v_1)$.

Таким образом, краевая задача для сингулярно возмущенного нелинейного уравнения второго порядка расщепилась на краевую задачу для скалярного регулярно возмущенного уравнения (25) и начальную задачу для скалярного сингулярно возмущенного уравнения (26). Расщепление краевых условий, как и в линейном случае, удалось произвести благодаря тому, что величиной $z(1, \varepsilon) = o(\exp(-\nu/\varepsilon))$, где $0 < \nu < a_0$, можно пренебречь.

4 Управление конвективным нагревом

В предыдущих задачах расщепляющее преобразование рассматривалось только в конечномерных пространствах. Оказывается, все утверждения о преобразовании (17) для конечномерных пространств могут быть определенным образом перенесены и на гильбертовы пространства. Следующий пример наглядно демонстрирует эту возможность.

Рассмотрим задачу оптимального нагрева бесконечной однородной пластины в муфельной электропечи с точки зрения минимальности энергетических затрат. Анализируется случай нагрева термически тонкого тела, отвечающий безразмерному критерию теплоотдачи $Bi \ll 1$. В несколько иных постановках данная задача рассматривалась в [8, 9]. Температуру муфеля обозначим $T(t)$, а распределение температуры в пластине $\Theta(t, x)$, где t и x — — соответственно время и координата, отсчитываемая по толщине от среднего сечения (при $-1 \le x \le 1$). Уравнение распространения тепла в заготовке, записанное при $\varepsilon = Bi$, можно записать следующим образом:

$$\varepsilon\frac{\partial\Theta(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2\Theta(t, x)}{\partial x^2}, \;\; -1 \le x \le 1, \;\; 0 \le t \le 1, \;\; \Theta(0, x) = \nu(x). \tag{27}$$

Граничные условия третьего рода, характеризующие конвективный теплообмен в печи, будут иметь вид:

$$\pm\frac{\partial\Theta}{\partial x} = \varepsilon[T(t) - \Theta(t, x)], \;\; x = \pm 1. \tag{28}$$

Управление процессом нагрева в электропечи осуществляется регулированием подаваемой в печь электрической мощности $u(t)$. Связь температуры муфеля $T(t)$ с подаваемой мощностью выражается в виде следующего дифференциального уравнения первого порядка:

$$\dot{T} = aT(t) + bu(t), \;\; T(0) = T^0, \tag{29}$$

где a и b — коэффициенты, характеризующие теплообмен в электропечи. Требуется найти управление $u(t)$, минимизирующее функционал следующего вида

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 dt \int_{-1}^1 [\alpha_1(x)\Theta^2(t,x) + \beta_1(x)T^2(t) + \gamma_1(x)u^2(t)]dx, \tag{30}$$

$$\alpha_1(x) > 0, \ \ \beta_1(x) > 0, \ \ \gamma_1(x) > 0.$$

Применяя метод Фурье, представляем решение задачи (27),(28) в виде ряда

$$\Theta(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n y_n(t) \cos\mu_n x, \ \ \mu_0^2 = \varepsilon + O(\varepsilon^3), \ \ \mu_n \sim \pi n, \ \ n = 1, 2, \ldots,$$

где μ_n — положительные корни уравнения $\mu = \varepsilon\, ctg\, \mu$, $C_n = 1/\sqrt{1 + \sin 2\mu_n/(2\mu_n)}$ — нормирующие множители системы $\{\cos\mu_n x\}$, $n = 0, 1, \ldots$ Поступая обычным образом, запишем (27)–(29) в эквивалентной форме:

$$\begin{cases} \dot{T} = & aT + bu \\ \varepsilon\dot{y}_k = & -\frac{\mu_k^2}{\varepsilon} y_k + 2C_k \cos\mu_k\, T \end{cases}$$

$$T(0) = T^0, \ \ y_k(0) = C_k \int_{-1}^1 \nu(x)\cos\mu_k x\, dx, \ \ k = 0, 1, \ldots$$

При этом функционал качества (30) преобразуется к виду

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 [l y_0^2 + 2y_0\langle Y, L\rangle + \langle Y, QY\rangle + \beta T^2 + \gamma u^2]dt,$$

где

$$l = C_0^2 \int_{-1}^1 \alpha_1(x)\cos^2\mu_0 x\, dx, \ \ L = col\left(C_0 C_k \int_{-1}^1 \alpha_1(x)\cos\mu_0 x \cos\mu_k x\, dx\right),$$

$$Q = matr\left(C_m C_k \int_{-1}^1 \alpha_1(x)\cos\mu_m x\cos\mu_k x\, dx\right),$$

$$\gamma = \int_{-1}^1 \gamma_1(x)\, dx, \ \ \beta = \int_{-1}^1 \beta_1(x)\, dx, \ \ Y = col(y_k), \ \ k, m = 1, 2, \ldots$$

В результате сложная распределенная задача свелась к счетной задаче управления с квадратичным критерием качества. Рассматривая в качестве сопряженных переменных скалярные величины p_1, p_2 и вектор εq, и, обозначая T и y_0 через x_1 и x_2 соответственно, краевую задачу принципа максимума запишем в такой форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & ax_1 + sp_1, \ \ x_1(0) = x_1^0, \ \ s = b^2/\gamma \\ \dot{p}_1 = & \beta x_1 - ap_1 - \sqrt{2}p_2 - \varepsilon\langle q, G\rangle, \ \ p_1(1) = 0 \\ \dot{x}_2 = & \sqrt{2}x_1 - x_2, \ \ x_2(0) = x_2^0 \\ \dot{p}_2 = & lx_2 + p_2 + \langle Y, L\rangle, \ \ p_2(1) = 0 \\ \varepsilon\dot{Y} = & -AY + \varepsilon x_1 G, \ \ Y(0) = Y^0 \\ \varepsilon\dot{q} = & QY + Aq, \ \ q(1) = 0 \end{cases}$$

$$x_1^0 = T^0, \ \ x_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 \nu(x)\, dx, \ \ Y^0 = col\left(\int_{-1}^1 \nu(x)\cos\pi kx\, dx\right),$$

$$A = diag(\pi^2 k^2), \ \ G = 2col\left((-1)^k\right), \ \ k = 1, 2, \ldots$$

Для оптимального управления используется выражение $u = (b/\gamma)p_1$. С помощью замены переменных $Y = Y_1 + \varepsilon Y^*$, $q = q_1 + \varepsilon q^*$ переведем полученную систему в окрестность медленного интегрального многообразия

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & ax_1 + sp_1, \\ \dot{p}_1 = & \beta x_1 - ap_1 - \sqrt{2}p_2 - \varepsilon\langle q_1, G\rangle, \\ \dot{x}_2 = & \sqrt{2}x_1 - x_2, \\ \dot{p}_2 = & lx_2 + p_2 + \langle Y_1, L\rangle + \varepsilon\langle Y^*, L\rangle, \\ \varepsilon\dot{Y}_1 = & -AY_1 + O(\varepsilon^2), \\ \varepsilon\dot{q}_1 = & Aq_1 + O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

причем $Y^* = x_1(A^{-1}G)$, $q^* = -A^{-1}QY^*$. Далее введем медленную переменную p_{21} по формуле $p_2 = p_{21} - \varepsilon\langle L, A^{-1}Y_1\rangle$. Пренебрегая членами $O(\varepsilon^2)$, получаем краевую задачу для медленных переменных

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & ax_1 + sp_1, \quad x_1(0) = x_1^0 \\ \dot{p}_1 = & \beta x_1 - ap_1 - \sqrt{2}p_{21}, \quad p_1(1) = 0 \\ \dot{x}_2 = & \sqrt{2}x_1 - x_2, \quad x_2(0) = x_2^0 \\ \dot{p}_{21} = & lx_2 + p_{21} + \varepsilon\delta x_1, \quad p_{21}(1) = 0 \end{cases}$$

$$\delta = \frac{1}{6\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\alpha_1(x)(3x^2 - 1)\,dx$$

и начальные задачи для быстрых переменных

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{Y}_1 = & -AY_1, \quad Y_1(0) = Y^0 - \varepsilon x_1^0(A^{-1}G) \\ \varepsilon\dot{q}_1 = & Aq_1, \quad q_1(1) = \varepsilon x_1(1)(A^{-1}QA^{-1}G) \end{cases}$$

Решая краевую задачу, находим выражение для оптимального управления, дающее в функционале качества погрешность второго порядка относительно малого параметра.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 94–01–00175) и Международного научного фонда (программа "Соросовские аспиранты").

Литература

[1] V.A. Sobolev. System and Control Lett, N 5(1984), P.169–179.
[2] А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений., М.:Наука, 1973.
[3] V.A. Sobolev. Acta Math. Hung. 49(3–4)(1987), P.365–376.
[4] А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений., М.:Высш.шк., 1990.
[5] Н.В. Воропаева, В.А. Соболев. Дифференциальные уравнения 31, N 4 (1995), С.569–578.
[6] Ю.А. Митропольский, О.Б. Лыкова. Интегральные многообразия в нелинейной механике., М.:Наука, 1973.
[7] В.В. Стрыгин, В.А. Соболев. Разделение движений методом интегральных многообразий., М.:Наука, 1986.
[8] А.Г. Бутковский, С.А. Малый, Ю.Н. Андреев. Оптимальное управление нагревом металла., М.:Металлургия, 1972.
[9] В.А. Соболев. Автоматика и телемеханика, N 5(1991), С.53–64.

Поступила в редакцию
10 октября 1995 г.