

СТЕПЕНЬ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙЧАТЫХ МНОГООБРАЗИЙ ФАНО

И.В. Демин

В работе [1] получена оценка для степени многомерных многообразий Фано, имеющих структуру расслоений на коники с вырождениями. Настоящая работа дополняет ее, рассматривая случай, когда вырожденных слоев нет.

Теорема. Пусть V — проективизация двумерного расслоения над $\mathbb{P}^n$ с четным первым классом Чженя, и пусть V — многообразие Фано (то есть антиканонический дивизор на V обилен). Тогда степень этого $n + 1$ -мерного многообразия Фано удовлетворяет неравенству:

$$(-K_V)^{n+1} < 2 \cdot \frac{144}{143} \cdot (3/4)^{n/2} (n+1)^{2n+1}.$$

Лемма 1. Пусть L и F — образующие кольца Чжоу проективизации $v = \mathbb{P}(\varepsilon)$ двумерного расслоения ε над $\mathbb{P}^n$, L — класс тавтологического дивизора Гротендика (то есть $f_*\mathcal{O}(L) = \varepsilon$), F — класс прообраза $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, где $f: V \rightarrow \mathbb{P}^n$ — проекция. Тогда при всех k , $0 \leq k \leq n+1$ справедливо равенство:

$$L^k F^{n-k+1} = (-1)^i \binom{k-i-1}{i} c_1^{k-2i-1} c_2^i.$$

Лемма 2. В условиях леммы 1 при всех m , $0 \leq m \leq n+1$ справедливо равенство:

$$(-K_V)^m F^{n+1-m} = 2^k (n+1-c_1)^{m-k} \binom{m}{k} (-1)^i \binom{k-i-1}{i} c_1^{k-2i-1} c_2^i.$$

Лемма 3. В условиях теоремы и леммы 1 справедливо неравенство

$$c_1^2 - 4c_2 \leq (n+1)^2.$$

Доказательство леммы 1. В кольце Чжоу для V справедливо соотношение (см. [2], замечание 3.2.4): $L_2 - c_1 L F + c_2 F^2 = 0$. Умножив на $L^{k-2} F^{n-k+1}$, получим:

$$L^k F^{n-k+1} = c_1 L^{k-1} F^{n-k+2} - c_2 L^{k-2} F^{n-k+3}.$$

Обозначив левую часть этого равенства через D_k , получим рекуррентную формулу: $D_k = c_1 D_{k-1} - c_2 D_{k-2}$. Докажем лемму 1 индукцией по k . Обозначим через G_k правую часть равенства этой леммы. При $k = 0$ формула верна, так как $D_0 = F^{n+1} = 0$, $G_0 = 0$, если под суммой $\sum_{i=0}^{-1} a_i$ понимать число 0. Если $k = 1$, то обе части в равенстве леммы 1 равны 1. Предположим, что для $k - 2$ и для $k - 1$ утверждение леммы верно. Тогда

$$\begin{aligned} c_1 G_{k-1} - c_2 G_{k-2} = \\ (-1)^i \binom{k-i-2}{i} c_1^{k-2i-1} c_2^i - (-1)^i \binom{k-i-3}{i} c_1^{k-2i-3} c_2^{i+1} =_{i_1=i+1} \\ (-1)^i \binom{k-i-2}{i} c_1^{k-2i-1} c_2^i + (-1)^{i_1} \binom{k-i_1-2}{i_1-1} c_1^{k-2i_1-1} c_2^{i_1} = \\ (-1)^i \left[\binom{k-i-2}{i} + \binom{k-i-2}{i-1} \right] c_1^{k-2i-1} c_2^i + A + B, \end{aligned}$$

где A — слагаемое с номером $i = 0$ из первой суммы, B — с номером $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ из второй суммы, если этот номер не равен $\left[\frac{k-2}{2}\right]$, и 0 в противном случае. Итак, $A = c_1^{k-1}$,

$$B = \begin{cases} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \binom{k-(k-1)/2-2}{(k-1)/2-1} c_1^{k-2\frac{k-1}{2}-1} c_2^{\frac{k-1}{2}} = (-1)^{\frac{k-1}{2}} c_2^{\frac{k-1}{2}}, \\ \text{если } k \equiv 1 \pmod{2} \\ 0, \text{ если } k \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c_1 G_{k-1} - c_2 G_{k-2} = \\ (-1)^i \binom{k-i-1}{i} c_1^{k-2i-1} c_2^i + A + B = (-1)^i \binom{k-i-1}{i} c_1^{k-2i-1} c_2^i \end{aligned}$$

так как A равно слагаемому с номером $i = 0$ в последней сумме, а

$$B = \begin{cases} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \binom{k-(k-1)/2-1}{(k-1)/2} c_1^{k-2\frac{k-1}{2}-1} c_2^{\frac{k-1}{2}}, \\ \text{если } k \equiv 1 \pmod{2} \\ 0, \text{ если } k \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases}$$

то есть B равно нулю или последнему слагаемому в этой сумме в зависимости от совпадения $\left[\frac{k-1}{2}\right] = \left[\frac{k-2}{2}\right]$. Итак, мы получили, что G_k удовлетворяет рекуррентному соотношению: $G_k = c_1 G_{k-1} - c_2 G_{k-2}$. Так как по предположению индукции $G_{k-1} = D_{k-1}$, $G_{k-2} = D_{k-2}$, то отсюда следует, что $G_k = D_k$, что доказывает лемму. $\square$

Доказательство леммы 2. В кольце Чжоу многообразия V справедливо равенство для антиканонического класса (см.[3]): $-K_V = 2L + (n+1-c_1)F$. Отсюда получаем:

$$(-K_V)^m = (2L + (n+1-c_1)F)^m = (n+1-c_1)^{m-k} 2^k \binom{m}{n} L^k F^{m-k}.$$

Умножив это равенство на F^{n+1-m} и воспользовавшись леммой 1, получим утверждение леммы:

$$(-K_V)^m F^{n+1-m} = (n+1-c_1)^{m-k} 2^k \binom{m}{k} L^k F^{n+1-k}. \quad \square$$

Доказательство леммы 3. Обозначим через $\mathcal{M}$ прямой образ антиканонического расслоения: $\mathcal{M} = f_*\mathcal{O}_V(-K_V)$. Это расслоение порождается глобальными сечениями, следовательно, его классы Чженя неотрицательны (см.[4],3.3). Имеем:

$$\mathcal{M} = f_*\mathcal{O}(2L + (n+1-c_1)F) = S^2\varepsilon \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n+1-c_1).$$

Для вычисления классов Чженя расслоения $\mathcal{M}$ воспользуемся принципом расщепления. Пусть α, β — корни Чженя расслоения ε (см.[2], §14.5). Если $\varepsilon = \mathcal{O}(\alpha) \otimes \mathcal{O}(\beta)$, то

$$\begin{aligned} S^2\varepsilon &= \mathcal{O}(2\alpha) \otimes \mathcal{O}(2\beta) \otimes \mathcal{O}(\alpha + \beta), \\ S^2\varepsilon(n+1-c_1) &= \mathcal{O}(2\alpha + n+1-\alpha-\beta) \otimes \mathcal{O}(2\beta + n+1-\alpha-\beta) \otimes \mathcal{O}(n+1) = \\ &= \mathcal{O}(n+1+\alpha-\beta) \otimes \mathcal{O}(n+1+\beta-\alpha) \otimes \mathcal{O}(n+1), \quad c_1(\mathcal{M}) = 3(n+1), \\ c_2(\mathcal{M}) &= (n+1)^2 - (\alpha-\beta)^2 + 2(n+1)^2 = 3(n+1)^2 - (\alpha+\beta)^2 + 4\alpha\beta = \\ &= 3(n+1)^2 - c_1^2 + 4c_2. \\ c_3(\mathcal{M}) &= (n+1)[(n+1)^2 - (\alpha-\beta)^2] = (n+1)^2[(n+1)^2 - c_1^2 + 4c_2]. \end{aligned}$$

Так как $c_3(\mathcal{M}) \geq 0$, то $c_1^2 - 4c_2 \leq (n+1)^2$, что и требовалось. $\square$

Доказательство теоремы. В условиях теоремы $c_1(\varepsilon)$ — четное число. Умножив ε на подходящее линейное расслоение, мы можем считать, что $c_1(\varepsilon) = 0$. В этом случае имеем по лемме 2:

$$\begin{aligned} (-K_V)^m F^{n+1-m} &= 2^k (n+1)^{m-k} \binom{m}{k} (-c_2)^{(k-1)/2} =_{k=2k_1+1} \\ &= (-1)^{k_1} 2^{2k_1+1} (n+1)^{m-2k_1-1} \binom{m}{2k_1+1} c_2^k. \end{aligned}$$

Если $m = 3$, то: $(-K_V)^3 F^{n-2} = 6(n+1)^2 - 8c_2$. А так как по условию V — многообразие Фано, то эта разность положительна, то есть $c_2 < 3(n+1)^2/4$. Отсюда получаем, что если $c_2 \geq 0$, то

$$\begin{aligned} (-K_V)^{n+1} &< 2^{2k+1} (n+1)^{n-2k} \binom{n+1}{2k+1} (3(n+1)^2/4)^k = \\ &= 2(n+1)^n 3^k \frac{(n+1)n \dots (n-2k+1)}{(2k+1)} \leq \\ &= 2(n+1)^n 3^k \frac{(n+1)^{2k+1}}{2^{2k}} =_{k=2k_1} \\ &= 2(n+1)^{n+1} \left(\frac{3(n+1)^2}{4} \right)^{2k_1} \leq \\ &= 2(n+1)^{n+1} \frac{(9(n+1)^4/16)^{n/4+1} - 1}{9(n+1)^4/16 - 1} \leq 2 \frac{144}{143} (n+1)^{n+1} \left(\frac{9(n+1)^4}{16} \right)^n / 4, \end{aligned}$$

так как при $n \geq 3$ для $y = 9/16(n+1)^4$ имеем: $y \geq 144$; $y \geq 144 - 143/y^\alpha$, где

$$\begin{aligned} \alpha &= n/4; \quad y^{\alpha+1} \geq 144y^\alpha - 143; \\ y^{\alpha+1}(144/143 - 1) &\geq 144/143y^\alpha - 1; \\ 144/143(y^{\alpha+1} - y^\alpha) &\geq y^{\alpha+1} - 1; \quad (y^{\alpha+1} - 1)/(y - 1) \leq 144/143y^\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда: $(-K_V)^{n+1} < 2\frac{144}{143}(3/4)^{n/2}(n+1)^{2n+1}$.

Пусть теперь $c_2 \leq 0$. Тогда по лемме 3 имеем $c_2 \geq -(n+1)^2/4$, отсюда:

$$\begin{aligned} (-K_V)^{n+1} &\leq 2^{2k+1}(n+1)^{n-2k} \binom{n+1}{2k+1} (n+1)^{2k}/4^k = \\ &2(n+1)^n \binom{n+1}{2k+1} = 2(n+1)^n 2^n = 2^{n+1}(n+1)^n. \end{aligned}$$

Если $n \geq 3$, то это число меньше верхней границы для $(-K_V)^{n+1}$, найденной в случае положительного c_2 , так как отношение этих чисел меньше 1. Это доказывает теорему. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант 94-01-01589.

Литература

- [1] И.В. Демин. Арифметика и геометрия многообразий. СамГУ, Самара, 1992, С.66.
- [2] У. Фултон. Теория пересечений. М.: Мир, 1989.
- [3] M. Szurek, J.A. Wisniewski. Pacific journal of mathematics **141**, **1** (1990) 197.
- [4] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию

26.10.95 .