ЦЕЛЫЕ СТРУКТУРЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРАХ

В.Е. Воскресенский, Т.В. Фомина

В данной работе продолжены исследования, анонсированные в заметках [2,5]. Пусть O — коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля, k — его поле частных, G — линейная алгебраическая группа, определенная над полем k . Целой формой группы G будем называть групповую O-схему X такую, что существует групповой изоморфизм k-групп $X \otimes_O k \simeq G$. Необходимость построения целых форм группы G диктуется различными вопросами арифметики и анализа на группе G. Это вопросы редукции алгебраических групп по простому модулю, проблемы вычисления числа классов, вопросы практического применения формул Зигеля-Тамагавы и др.

Основным результатом данной статьи является конструкция минимальной целой модели алгебраического тора, определенного над полным неархимедовым расширением поля алгебраических чисел и изучение строения этой модели. Если тор имеет неразветвленное поле разложения, этот вопрос легко решается, главная задача — изучение модели в случае разветвленного поля разложения. Описаны свойства групповых схем, получаемых при редукции этих моделей по простому модулю. Используя аппроксимацию, построены минимальные модели торов над кольцом целых алгебраических чисел. Вычислены $\mathfrak{p}$-адические объемы ряда минимальных моделей.

1 Общий случай

Пусть, как и выше, O — область целостности с единицей, k — его поле частных, G — линейная алгебраическая группа, определенная над полем k. Существование целой формы X для группы G проверяется совсем просто. Один из методов построения — следующий. Имеем линейное представление группы G в полную линейную группу

$$\varphi : G \longrightarrow GL_k(n), \tag{1}$$

что дает эпиморфизм

$$\varphi^* : k[GL(n)] \longrightarrow k[G]$$

алгебр Хопфа. Кольцо $k[GL(n)]$ имеет вид $k\,[\,x_{11}, \ldots, x_{nn}, y^{-1}\,]$, $y = \det(x_{ij})$, O-алгебра $O[x_{11}, \ldots, x_{nn}, y^{-1}]$ определяет в $GL_k(n)$ целую групповую структуру $GL_O(n)$ и

$$\varphi^*(O[x_{11}, \ldots, x_{nn}, y^{-1}]) = A$$

есть O-алгебра Хопфа в $k[G]$. Таким образом, каждое точное линейное представление φ группы G определяет групповую O-форму $G_\varphi = \operatorname{Spec} A$ группы G. Хотя строение алгебры Хопфа $k[G]$ и не зависит от выбора точного представления (1), однако, заранее этого нельзя сказать о группах G_φ. Ниже мы увидим, что не все схемы G_φ будут изоморфными над O. Вопрос о классификации всех O-форм данной k-группы G, на наш взгляд, даже не ставился, это интересная и, вероятно, не простая задача. Заметим, что все O-формы X вида G_φ имеют конечный тип над O, они приведены и строго плоские над O. Пусть теперь X — произвольная групповая O-форма группы G, конечного типа над O. Имеем изоморфизмы

$$\alpha : O[X] \otimes_O k \longrightarrow k[G], \qquad \beta : O[X] \longrightarrow O[X] \otimes_O k, \qquad \beta(f) = f \otimes 1$$

и их композицию $\beta \circ \alpha : O[X] \longrightarrow k[G]$.

Таким образом, $O[X]$ можно рассматривать как подкольцо A в $k[G]$ с условиями

(1) A является O-алгеброй Хопфа конечного типа над O,
(2) $A \cap k = O$, $kA = k[G]$,
(3) структура алгебры Хопфа в кольце A индуцирована строением алгебры Хопфа $k[G]$.

Определение. Подкольцо A кольца $k[G]$, удовлетворящее условиям (1)-(3), назовем *O-порядком Хопфа* в $k[G]$, $X = \operatorname{Spec} A$ есть O-форма конечного типа группы G.

Задача. Описать O-порядки Хопфа в $k[G]$ с точностью до изоморфизма.

Важнейшими полями, над которыми естественно возникает вопрос об изучении O-порядков Хопфа, являются числовые поля конечной степени и $\mathfrak{p}$-адические поля. Пусть k — поле $\mathfrak{p}$-адических чисел, $O = \mathbb{O}_k$ — кольцо целых элементов поля k, $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца O, $\mathbb{F}_\mathfrak{p} = O/\mathfrak{p}$ — конечное поле вычетов. Вопрос о редукции группы G по простому модулю $\mathfrak{p}$ заключается в построении для группы G групповой O-формы X, тогда редукцию группы G по простому модулю $\mathfrak{p}$ можно определить как $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$-группу $X \otimes_O \mathbb{F}_\mathfrak{p}$. Конечно, эта редукция зависит от выбора целой модели X и выбор неслучайной редукции является интересной задачей, которая будет решена для алгебраических торов в §2.

Пусть теперь k — поле алгебраических чисел конечной степени над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, A — кольцо аделей поля k, O — кольцо целых поля k. Если X — целая O-форма k-группы G, то числом классов $h(X)$ O-группы X называется количество двухсторонних классов

$$G(k) \backslash G(A) / X(A^\infty),$$

где A^∞ — подкольцо целых аделей кольца A.

Задача. Для k-группы G описать O-формы X с минимальным числом классов $h(X)$.

2 Целые формы алгебраического тора над локальным полем

Пусть k — поле $\mathfrak{p}$-адических чисел, T — алгебраический тор над полем k, X —групповая O-форма тора T конечного типа, $X = \operatorname{Spec} A$, $A \subset k[T]$. Группа $T(k)$ локально компактна, пусть U — максимальная компактная подгруппа группы $T(k)$. Рассмотрим группу точек $X(O) = \operatorname{Hom}(A, O)$. Всякий гомоморфизм O-алгебр $A \to O$ однозначно продолжается до гомоморфизма k-алгебр $kA = k[T] \to k$, по-другому, имеем естественное вложение групп

$$X(O) \longrightarrow T(k).$$

В силу компактности группа $X(O)$ вкладывается в максимальную компактную группу U. Далее, группа $X(O)$ открыта в $T(k)$, поэтому множество $X(O)$ всюду плотно в $T(k)$ в топологии Зарисского и индекс $[U : X(O)]$ — конечен. Имеем

$$A = \{f \in k[T] \mid f(u) \in O \qquad \forall u \in X(O)\}\,.$$

Итак, O-порядок Хопфа A в $k[T]$ может быть определен, зная подгруппу $X(O)$, которая имеет конечный индекс в U.

Определение. Подгруппу V в U вида $V = Y(O)$ для некоторой O-формы Y тора T назовем алгебраической подгруппой компактной группы U.

Задача. Всякая ли подгруппа конечного индекса в компактной группе U является алгебраической?

Как и в теории аффинных схем над полем можно строить O-группы, исходя из подгрупп V конечного индекса в U. Пусть

$$B = \{f \in k[T] \mid f(v) \in O \quad \forall v \in V\}\,.$$

Тогда B есть O-порядок Хопфа в $k[T]$, $Y = \operatorname{Spec} B$ является O-формой тора T и $Y(O) \supset V$, $Y(O)$ — замыкание по Зарисскому групы V. Особую роль играет O-алгебра Хопфа

$$A_0 = \{f \in k[T] \mid f(u) \in O \quad \forall u \in U\}\,. \tag{2}$$

Ясно, что A_0 лежит в любом O-порядке A, $X_0 = \operatorname{Spec} A_0$ назовем *минимальной* целой моделью тора T.

Определение. Редукцией тора T по модулю $\mathfrak{p}$ назовем $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$-схему $X_0 \otimes_O \mathbb{F}_\mathfrak{p} = T(\mathfrak{p})$. Точку $\mathfrak{p}$ назовем точкой *очень хорошей* редукции, если $T(\mathfrak{p})$ есть $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$-тор; $\mathfrak{p}$-точка *хорошей* редукции,если $T(\mathfrak{p})$ является алгебраической группой над полем $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ — точка *плохой* редукции, если схема $T(\mathfrak{p})$ не приведена.

Пусть

$$U(m) = \operatorname{Ker}\,[\,X(O) \longrightarrow X(O/\mathfrak{p}^m)\,]$$

— конгруэнц-подгруппа, X — минимальная модель.

Предложение 1. *Группа $U(m)$ является алгебраической подгруппой группы U.*

Доказательство. Выберем вложение $T \to GL_k(n)$ таким образом, чтобы

$$GL(n, O) \cap T(k) = U.$$

Рассмотрим точное представление $\varphi : GL(n) \to GL(2n)$, определенное по правилу

$$\varphi(g) = R \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} R^{-1}, \quad R = \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & \pi^m E \end{pmatrix}, \quad (\pi) = \mathfrak{p},$$

E — единичная матрица порядка n. Имеем

$$\varphi(g) = \begin{pmatrix} g & f \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \pi^m f = E - g.$$

Отсюда видно,что O-схема T_φ обладает свойством $T_\varphi(O) = U(m)$. Сверх того, для любого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, группа $T_\varphi \otimes_O O/\pi^i O$ является унипотентной групповой схемой над кольцом $O/\pi^i O$, но группа $T_\varphi \otimes_O O/\pi^{m+1} O$ уже не унипотентна. $\square$

Групповую схему T_φ с условием $T_\varphi(O) = U(m)$ будем снова называть конгруэнц-подгруппой и обозначать T_m.

Следствие. *Групповые O-схемы T_m неизоморфны при различных $m \geqslant 0$.* $\square$

Изучим более подробно минимальную целую модель X k-тора T. Пусть L — минимальное поле разложения тора T, Π — группа Галуа расширения L/k, $\widehat{T}$ — Π-модуль рациональных характеров тора T. Алгебра Хопфа $k[T]$ тора T имеет вид $L[\widehat{T}]^\Pi$, где $L[\widehat{T}]$ — групповое кольцо группы $\widehat{T}$, группа Π одновременно действует на L и на $\widehat{T}$, $T = \operatorname{Spec}\left(L[\widehat{T}]^\Pi\right)$. Когрупповая структура на $L[\widehat{T}]$ индуцирована операторами

$$\begin{aligned} m^* &: \chi_i \longrightarrow \chi_i \otimes \chi_i, \\ i^* &: \chi_i \longrightarrow \chi_i^{-1}, \\ e^* &: \chi_i \longrightarrow 1, \end{aligned} \tag{3}$$

где χ_i — базисные характеры группы $\widehat{T}$. Если O_L — кольцо целых элементов поля L, то

$$O_L[\widehat{T}]^\Pi \otimes_O k = k[T],$$

поэтому схема $Y = \operatorname{Spec}\left(O_L[\widehat{T}]^\Pi\right)$ является O-формой k-многообразия T, но, в общем случае, не групповой. Пусть $A = A_0$-алгебра Хопфа минимальной модели тора T, определенная соотношениями (2). Положим

$$\widetilde{A} = \{f \in L[T] \mid f(u) \in O_L \quad \forall u \in U\}.$$

Очевидно, $\widetilde{A} = O_L A \cong O_L \otimes_O A$ и $A = \widetilde{A}^\Pi$. Далее, рациональный характер χ отображает группу U в компактную подгруппу группы L^*, поэтому $\widehat{T} \subset \widetilde{A}$ и, значит, кольцо $\widetilde{A}$ содержит групповое кольцо $O_L[\widehat{T}]$. Имеем

$$\begin{aligned} &O_L[\widehat{T}] \subset \widetilde{A} \subset L[\widehat{T}], \\ &O_L[\widehat{T}]^\Pi \subset A \subset k[T] = L[\widehat{T}]^\Pi. \end{aligned} \tag{4}$$

Предложение 2. *Если расширение L/k неразветвлено, то $\widetilde{A} = O_L[\widehat{T}]$, $A = O_L[\widehat{T}]^\Pi$. Следовательно, минимальная модель $X = \operatorname{Spec} A$ является тором над O, редукция $X \otimes_O \mathbb{F}_\mathfrak{p}$ является тором над конечным полем $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$.*

Доказательство. Пусть $B = O_L[\widehat{T}]^\Pi$. В неразветвленном случае существует базис кольца O_L над O, дискриминант которого является единицей кольца O. Поэтому для неразветвленного расширения L/k имеем изоморфизм

$$O_L \otimes_O B \cong O_L B = O_L[\widehat{T}].$$

Это показывает, что $Y = \operatorname{Spec} B$ является O-групповой формой тора T. Из минимальности формы $X = \operatorname{Spec} A$ следует, что $A \subset B$. Соотношения (4) показывают, что $A = B$, $\widetilde{A} = O_L[\widehat{T}]$. $\square$

Для изучения целых форм торов с разветвленным полем разложения рассмотрим сначала более подробно торы простейшего вида.

3 Минимальная модель тора $R_{F/k}(\mathbb{G}_m)$

Напомним, что k — поле $\mathfrak{p}$-адических чисел. Пусть F конечное расширение степени n поля k, $\omega_1, \dots, \omega_n$ — целый базис расширения F/k, L — нормализация поля F в $\bar{k}$, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$, $\Pi_1 = \mathrm{Gal}(L/F)$, $T = R_{F/k}(\mathbb{G}_m)$. Группа рациональных характеров $\widehat{T}$ тора T обладает базисом $\chi_1, \dots, \chi_n$, на котором группа Галуа Π действует транзитивно перестановками, Π_1 — стабилизатор характера χ_1, $\widehat{T} = \mathbb{Z}[\Pi/\Pi_1] = \mathbb{Z}\Pi \otimes_{\Pi_1} \mathbb{Z}$. Имеем

$$L[T] = L[\widehat{T}] = L\left[\chi_1, \dots, \chi_n, \chi_1^{-1}, \dots, \chi_n^{-1}\right] \supset L[\chi_1, \dots, \chi_n],$$

$L[\chi_1, \dots, \chi_n]$ — алгебра полиномов. Ввиду пермутационности действия группы Π, вложение $L[\chi_1, \dots, \chi_n] \subset L[T]$ является Π-гомоморфизмом. Заметим,что $\mathrm{Spec}\, L[\chi_1, \dots, \chi_n]^{\Pi} = \mathbb{A}_k^n$ — аффинное пространство над k. Диагональное вложение

$$L[\chi_1, \dots, \chi_n] \longrightarrow L[\chi_1, \dots, \chi_n] \otimes_L L[T]$$

показывает, что мы имеем морфизм

$$T \otimes_k \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}_k^n,$$

являющийся естественным действием тора T на $\mathbb{A}_k^n$, $\dim T = n$. По-другому, тор $T = R_{F/k}(\mathbb{G}_m)$ является максимальным тором группы $GL_k(n)$ и координатное кольцо $k[T] = L[T]^{\Pi}$ проще всего описать, используя регулярное представление группы $T(k) = F^*$ в базисе $\omega_1, \dots, \omega_n$. Пусть $(\alpha, \beta) = Sp_{F/k}(\alpha\beta)$ — билинейная форма следа. Она невырождена, поэтому существует дуальный базис $\omega_1^*, \dots, \omega_n^*$, $\omega_i^* \in F$, $(\omega_i, \omega_j^*) = \delta_{ij}$ — символ Кронекера. Пусть $\omega = a^i\omega_i = \sum_{i=1}^n a^i\omega_i$. Тогда $(\omega_i^*, \omega) = a^i$. Линейную функцию $(\omega_i^*, \ ) : F \to k$ обозначим $x^i, x^i(a^k\omega_k) = a^i$. Пусть $d = \det(\omega_i, \omega_j)$ — дискриминант расширения F/k. Запишем закон умножения в координатах $x^1, \dots, x^n$. Имеем $\omega_i\omega_j = c_{ij}^k\omega_k$, $c_{ij}^k \in O$ — структурные константы. Пусть $\alpha = a^i\omega_i$, $\beta = b^i\omega_i$ — два элемента из F, тогда

$$x^k(\alpha\beta) = c_{ij}^k x^i(\alpha)x^j(\beta).$$

Линейные функции x^i естественно продолжаются до L-линейных функционалов $x^i : L \otimes_k F \to L$, определенных над полем k, пусть $F^{(i)}$ — образ поля F при одном из k-изоморфизмов $\sigma_i : F \to \bar{k}$, $\omega_k^{(i)}$ — образ элемента ω_k при этом изоморфизме, $\omega_k^{(i)} \in L \subset \bar{k}$, $d = \det(\omega_k^{(i)})^2$. Заметим, что в тензорном произведении $L \otimes_k F$ группа Π тривиально действует на F и естественно на L. В кольце полиномов $L[x^1, \dots, x^n]$ выберем n линейных функций .

$$\chi^{(i)} = \omega_k^{(i)} x^k. \tag{5}$$

Они обладают замечательными свойствами

$$\chi^{(i)}(\alpha) = \omega_m^{(i)} x^m(a^k\omega_k) = A^m\omega_m^{(i)} = \alpha^{(i)},$$

откуда $\chi^{(i)}(\alpha\beta) = \chi^{(i)}(\alpha)\chi^{(i)}(\beta)$. Таким образом, функции $\chi^{(i)}$ являются рациональными характерами группы $R_{F/k}(\mathbb{G}_m)$, очевидно, они образуют пермутационный базис группы характеров $\widehat{T}$. Функция $y = \prod_{i=1}^n \chi^{(i)}$ есть форма n-й степени от n переменных $x^1, \dots, x^n$ с коэффициентами из O. Кольцо $k[T] = L[\chi^{(1)}, \dots, \chi^{(n)}, y^{-1}]^{\Pi}$ содержит $k[x^1, \dots, x^n, y^{-1}]$. На самом деле, формула (4) показывает, что

$$k[T] = L[\chi^{(1)}, \dots, \chi^{(n)}, y^{-1}]^{\Pi} = k[x^1, \dots, x^n, y^{-1}].$$

Коумножение (3) в координатах $x^1, \ldots, x^n$ имеет следующий вид

$$a)\quad m^*:\quad x^k \to c^k_{ij} x^i \otimes x^j;$$

$$b)\quad i^*\ :\quad x^k \to \frac{\Phi^k}{y},\quad \left(\chi^{(i)}\right)^{-1} = \frac{1}{y}\Phi^m \omega^{(i)}_m,\quad \Phi^m \in O[x^1, \ldots, x^n];$$

$$c)\quad e^*\ :\quad x^k \to c^k, где 1 = c^m \omega_m.$$

Рассмотрим теперь кольцо $A = O[x^1, \ldots, x^n, y^{-1}]$. Соотношения a), b), c) показывают, что операторы m^*, i^*, e^* превращают кольцо A в алгебру Хопфа. Схема $X = \operatorname{Spec} A$ является тогда O-групповой формой тора $R_{F/k}(\mathbb{G}_m)$. Из построения следует, что $X(B) = (O_F \otimes_O B)^*$ для всякой коммутативной O-алгебры B, в частности, $X(O) = O_F^*$ — максимальная компактная подгруппа группы $T(k) = F^*$. Таким образом, X есть минимальная модель тора $R_{F/k}(\mathbb{G}_m)$. Поскольку кольцо A является локализацией кольца многочленов $O[x^1, \ldots x^n]$, то схема X — гладкая, редукция по модулю $\mathfrak{p}$ является алгебраической группой $\overline{X}$ над конечным полем $O/\mathfrak{p}$, причем $\overline{X}$ — связна. Из связности коммутативной алгебраической группы $\overline{X}$ следует, что $\overline{X}$ есть прямое произведение тора R и унипотентной группы U. Строение групповых схем R и U легко восстанавливается из строения группы точек $X(O/\mathfrak{p})$. Пусть E — максимальное неразветвленное расширение поля k, содержащееся в F; $k \subset E \subset F$; $e = (F:E)$; $f = (E:k)$; r_k, r_E, r_F — поля вычетов колец $O = O_k \subset O_E \subset O_F$ по своим максимальным идеалам $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_E$, $\mathfrak{p}_F$; $\mathfrak{p}_F|\mathfrak{p}_E|\mathfrak{p}$; $N_{F/k}(\mathfrak{p}_F) = \mathfrak{p}^f$; $O_F\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_F^e$, $O_E\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_E$; $(r_E : r_F) = f$; $r_F = r_E$. Имеем $X(O) = O_F^*$. Пусть $\alpha \in O_F$, π — образующая главного идеала $\mathfrak{p}_F$. Имеем представление элемента α в виде ряда

$$\begin{gathered}\alpha = A_0 + A_1\pi + A_2\pi^2 + \ldots,\\ A_i \in r_e,\quad \pi^e \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},\\ \alpha \equiv A_0 + A_1\pi + \ldots + A_{e-1}\pi^{e-1} \pmod{\mathfrak{p}}.\end{gathered} \tag{6}$$

Поскольку схема X — гладкая, то эпиморфизм колец $O \to O/\mathfrak{p} = r_k$ индуцирует эпиморфизм групп $X(O) \to X(r_k) = (O_k \otimes_O r_k)^*$. Отсюда следует, что группа $X(r_k)$ изоморфна мультипликативной группе классов вычетов вида (6), которая является прямым произведением $r_E^* \times U_0$, где

$$U_0 = \left\{1 + A_1\pi + \ldots + A_{e-1}\pi^{e-1} \pmod{\mathfrak{p}}\right\}.$$

Группы r_E^* и U_0 можно представить матрицами над полем вычетов r_k, используя базис расширения r_E/r_k. Тогда группа r_E^* есть группа r_k-точек тора $R_{r_E/r_k}(\mathbb{G}_m)$ размерности f, а элементы u группы U_0 представимы матрицами с условием $(u-1)^e = 0$, следовательно, U_0 есть группа r_k-точек унипотентной коммутативной группы U размерности $(e-1)f$. Итак, имеем следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть F — конечное расширение поля $\mathfrak{p}$-адических чисел k, $(F:k) = n = ef$, где e — индекс ветвления, E —максимальное неразветвленное подполе, $k \subset E \subset F$, $(E:k) = f$. Если X — минимальная целая модель тора $R_{r_E/r_k}(\mathbb{G}_m)$, то редукция $\overline{X}$ имеет вид*

$$\overline{X} = R_{r_E/r_k}(\mathbb{G}_m) \times U,$$

где U — унипотентная r_k-группа размерности $(e-1)f$. □

Следствие. *Для $e > 1$ редукция $\overline{X}$ не является тором.* □

Замечание. Пусть p — характеристика поля вычетов r_k. Из доказательства предложения 3 следует также, что для $e < p$ группа U есть прямое произведение групп $\mathbb{G}_{a,r_k}$ в количестве $(e-1)f$ сомножителей. Этот факт имеется в статье [7], но конструкция целых моделей в работах [7,8] совершенно иная, чем у нас.

Опишем теперь редукцию $\overline{X}$ тора $R_{F/k}(\mathbb{G}_m)$ в терминах алгебры Хопфа $A = O\left[x^1, \ldots, x^n, y^{-1}\right]$, что проливает дополнительный свет на ее конструкцию. Выберем в кольце O_F целый базис следующим образом. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_f$ — базис неразветвленного расширения O_E/O_k, $1, \pi, \ldots, \pi^{e-1}$ — целый базис расширения O_F/O_E. Тогда $\omega_i\pi^j$ — целый базис расширения F/k, $1 \leqslant i \leqslant f$, $0 \leqslant j < e$, $n = ef$. Пусть $\widetilde{A} = O_L \otimes_O A$,

$$\varphi : \widetilde{A} \to r_L \otimes_O A = r_L\left[x^1, \ldots, x^n, y^{-1}\right] = r_E\left[x^1, \ldots, x^n, y^{-1}\right]$$

— редукция. Если записать формулы (5) в базисе $\{\omega_i\pi^j\}$, то видно, что

$$\varphi\left(\chi^{(m)}\right) = \omega_k^{(m)} x^k \pmod{\mathfrak{p}_L}.$$

Элемент $\varphi\left(\chi^{(m)}\right) = \xi^{(m)}$ есть характер тора $R_{r_E/r_k}(\mathbb{G}_m)$, $1 \leqslant m \leqslant f$. Поскольку расширение E/k — неразветвлено, то $\det\left(\omega_k^{(m)}\right)$ есть единица кольца O_E, поэтому координаты x^k линейно выражаются над r_E через $\xi^{(m)}$, $1 \leqslant k, m \leqslant f$. После замены переменных имеем изморфизм,

$$\begin{gathered} r_E[x^1, \ldots, x^n, y^{-1}] = r_E[\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(f)}, y^{-1}] \otimes r_E\left[x^{f+1}, \ldots, x^n\right], \\ y = z^e, z = \xi^{(1)} \ldots \xi^{(f)}, \end{gathered} \tag{7}$$

причем произведение в правой части коммутирует с действием группы Галуа Γ расширения r_E/r_k. Отсюда,

$$\operatorname{Spec}\left(r_E[\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(f)}, y^{-1}]^{\Gamma}\right) = R_{r_E/r_k}(\mathbb{G}_m), U = \operatorname{Spec} r_E\left[x^{f+1}, \ldots, x^n\right].$$

4 Редукция произвольного тора

Пусть теперь T — произвольный алгебраический тор над локальным полем k, L/k — минимальное поле разложения тора T, X — минимальная модель тора T над $O = O_k$, S — квазиразложимый тор над k, содержащий тор T в качестве подтора, Y — минимальная модель тора S, причем $\psi : O[Y] \to O[X]$ — эпиморфизм. Далее, пусть $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$, E — максимальное неразветвленное расширение поля k, содержащееся в L, $k \subset E \subset L$, $(L:E) = e$, $\Delta = \mathrm{Gal}(L/E)$ — подгруппа инерции, $\Gamma = \Pi/\Delta$ — группа Галуа расширения E/k. Используя соотношения (4), получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} O_L[\widehat{S}] & \xrightarrow{\alpha} & O_L[Y] \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ O_L[\widehat{T}] & \xrightarrow{\beta} & O_L[X], \end{array}$$

где горизонтальные стрелки являются мономорфизмами, а вертикальные — эпиморфизмами. Умножая тензорно на $r_L = O_L/\mathfrak{P} = r_E$, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} r_L[\widehat{S}] & \xrightarrow{\alpha} & r_L[Y] \\ \big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & {\scriptstyle\psi}\big\downarrow \\ r_L[\widehat{T}] & \xrightarrow{\beta} & r_L[X], \end{array}$$

где вертикальные стрелки снова эпиморфизмы, а α и β переводят характеры в элементы колец $r_L[Y]$ и $r_L[X]$, инвариантные относительно операторов δ, $\delta \in \varDelta$, $\alpha(\widehat{S}) = \widehat{S}/I\widehat{S}$, $\beta(\widehat{T}) = \widehat{T}/I\widehat{T} = \widehat{T}_I$, $I = I_\varDelta$ — идеал кольца $\mathbb{Z}\varDelta$, порожденный элементами $\{\delta - 1, \delta \in \varDelta\}$. В §3 показано, что $r_L[Y] = r_L[\widehat{S}_I] \otimes r_L[\mathbb{A}^m]$ с некоторым $m \geqslant 1$. Это дает разложение редукции $\bar{Y}$ в прямое произведение тора и унипотентной группы: $\bar{Y} = R \times U$. Диаграмма показывает, что редукция X есть прямое произведение r_k-групповых схем: $\bar{X} = \bar{X}_1 \times \bar{X}_2$, где $\bar{X}_1 = \operatorname{Spec}\left(r_E[\widehat{T}_I]\right)^\Gamma$ группа мультипликативного типа, $\bar{X}_2$ — унипотентна. Максимальный тор M группы $\bar{X}$ описывается из следующий соображений. Имеем точную последовательность Г-модулей

$$O \to \widehat{T}_1/I(\widehat{T}) \to \widehat{T}/I(\widehat{T}) \to \widehat{M} \to O,$$

где

$$\widehat{M} = tr_{L/E}(\widehat{T}) = (\delta)\,\widehat{T}, \widehat{T}_1 = \operatorname{Ker}[\widehat{T} \to tr_{L/E}(\widehat{T})],$$
$$\widehat{T}_1/I(\widehat{T}) = H^{-1}(\Delta, \widehat{T}).$$

В этих обозначениях имеем следующий результат.

Предложение 4. *Пусть X — минимальная целая модель тора T. Максимальный тор M редукции $\bar{X}$ расщепляется над r_E, его Г-модуль рациональных характеров $\widehat{M}$ имеет вид $tr_{L/E}(\widehat{T})$, схема $\bar{X}_1/M$ есть групповая схема мультипликативного типа, определяемая конечным Г-модулем $H_{-1}(\Delta, \widehat{T})$.* $\square$

Следствие. *Пусть T — алгебраический тор над полем k и L/k — его минимальное поле разложения, e — индекс ветвления расширения L/k. Если $e > 1$, то редукция тора по простому модулю содержит нетривиальную унипотентную подгруппу, т.е., редукция не может быть очень хорошей.*

В самом деле, поскольку $e > 1$, то , $tr_{L/E}(\widetilde{T}) \neq \widehat{T}$ поэтому унипотентная часть группы нетривиальна.

Пример. Рассмотрим норменное отображение

$$N : R_{F/k}(\mathbb{G}_{m,k}) \longrightarrow \mathbb{G}_{m,k}.$$

Ядро этого отображения обозначается символом $R^{(1)}_{F/k}(\mathbb{G}_m)$, это есть тор над k размерности $n-1$, $n = (F : k)$. Если фиксировать некоторое регулярное представление поля F матрицами над k, то многообразие $R^{(1)}_{F/k}(\mathbb{G}_m)$ может быть реализовано как гиперповерхность в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n_k$, определенная уравнением $y(x^1, \ldots, x^n) = 1$, где $y = y(x^1, \ldots, x^n)$ — норменный многочлен, выписанный в базисе регулярного представления.

Пусть $O\,[x^1, \ldots, x^n, y^{-1}]$ — алгебра Хопфа, определяющая минимальную модель тора $R_{F/k}(\mathbb{G}_m)$. Тогда минимальная модель тора $R^{(1)}_{F/k}(\mathbb{G}_m)$ определяется алгеброй Хопфа $A = O\,[x^1, \ldots, x^n]\,/(y-1)$. Формулы (7) показывают, что редукция $r_k \otimes_O A$ имеет вид

$$r_k \otimes_O A = r_k\left[x^1, \ldots, x^f\right]/(z^e - 1) \otimes r_k\left[x^{f+1}, \ldots, x^n\right]. \tag{8}$$

Пусть $X = \operatorname{Spec} A$, $\bar{X} = \operatorname{Spec}(r_k \otimes_O A)$. Разложение (8) приводит к следующим утверждениям, где p — характеристика поля r_k, e — индекс ветвления расширения F/k.

(1) Если $e = 1$, то редукция $\bar{X}$ есть тор $R^{(1)}_{r_F/r_k}(\mathbb{G}_m)$;

(2) если $e > 1$, $p \nmid e$, то редукция хорошая, то есть $\bar{X}$ есть алгебраическая группа над r_k, связная компонента $\bar{X}^0$ есть произведение $R^{(1)}_{r_E/r_k}(\mathbb{G}_m) \times N$, N — унипотентна размерности $(e-1)f$, $\bar{X}/\bar{X}^0 = \mu_e$;

(3) если $e > 1$ и $p \mid e$, то редукция плохая, схема $\bar{X}$ не является приведенной;

(4) если F/k — чисто разветвлено, $e = (F:k) > 1$, то $\bar{X} = \mu_e \times N$, $\bar{X}^0$ — унипотентна.

5 Минимальные модели над кольцом целых алгебраических чисел

Пусть T — тор, определенный над полем k алгебраических чисел, L — его минимальное поле разложения, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$. Если $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца целых O поля k, то пусть $\mathfrak{P}$ — простой идеал кольца O_L, делящий $\mathfrak{p}$, $\Pi_{\mathfrak{P}} = \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}})$ — группа разложения. Для каждого $\mathfrak{p}$, следуя рецепту из §2, мы можем построить локальную минимальную целую модель $X_{\mathfrak{p}}$ тора $T \otimes_k k_{\mathfrak{p}}$. Схема $X_{\mathfrak{p}}$ определена над кольцом целых $O_{\mathfrak{p}}$ поля $k_{\mathfrak{p}}$, $X_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Spec}\, A_{\mathfrak{p}}$, $A_{\mathfrak{p}} \subset k_{\mathfrak{p}}[T]$. Зафиксируем вложение $f \to 1 \otimes f$ кольца $k[T]$ в $k_{\mathfrak{p}}[T] = k_{\mathfrak{p}} \otimes_k k[T]$. Пусть

$$C_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} \bigcap k[T] \qquad \text{и} \qquad C = \bigcap_{\mathfrak{p}} C_{\mathfrak{p}}.$$

Рассмотрим O-схему $Y = \mathrm{Spec}\, O_L[\widehat{T}]^{\Pi}$. В общем случае это не групповая схема, однако $Y \otimes_O k = T$, то есть Y есть O-форма многообразия T. Далее, для всех точек $\mathfrak{p}$, неразветвленных в L, $Y_{\mathfrak{p}} = Y \otimes_O O_{\mathfrak{p}}$ является групповой $O_{\mathfrak{p}}$-схемой, изоморфной $X_{\mathfrak{p}}$, по предложению 2. Из включений (4) следует, что $C \supset O_L[\widehat{T}]^{\Pi}$, откуда $C \otimes_O k = k[T]$, то есть $X = \mathrm{Spec}\, C$ является групповой O-формой тора T. Из конструкции схемы X следует, что $X \otimes_O O_{\mathfrak{p}}$ совпадает с $X_{\mathfrak{p}}$ и есть минимальная модель для каждой точки $\mathfrak{p}$, поэтому $X(O_{\mathfrak{p}})$ — максимальная компактная подгруппа группы $T(k_{\mathfrak{p}})$ для каждого $\mathfrak{p}$. Пусть d — дискриминант расширения L/k. Для каждого $\mathfrak{p}$, не делящего d, слой $X_{\mathfrak{p}}$ является тором над кольцом $O_{\mathfrak{p}}$. Назовем X *минимальной целой моделью* тора T. Редукцией тора T по модулю $\mathfrak{p}$ будем называть групповую $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$-схему $\bar{X}_{\mathfrak{p}} = X \otimes_O \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$, $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}} = O/\mathfrak{p}$. Точки $\mathfrak{p} \nmid d$ являются точками очень хорошей редукции. В некоторых случаях известны редукции и в точках $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \mid d$.

Модель X обладает следующим свойством минимальности. Упомянутое в §1 двухстороннее фактор-пространство обладает в случае торов строением конечной абелевой группы

$$H(X) = X(A)\,/X(k)X(A^{\infty}) = T(A)/\,T(k)X(A^{\infty}).$$

Порядок этой группы является минимальным среди порядков $H(Y)$ всех возможных O-форм Y тора T, поэтому он называется числом классов тора T и обозначается $h(T)$.

Пример 1. Пусть $k = \mathbb{Q}$, $O = \mathbb{Z}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $T = R^{(1)}_{L/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m)$, $\mathbb{Z}$-группа X задается матрицей общего вида

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}, \qquad x^2 - 3y^2 = 1, \qquad d = 12.$$

Точка 2 является точкой плохой редукции, 3 — точка хорошей редукции, но группа $\bar{X}_3$ несвязна, треугольна, $\bar{X}_p$ есть $\mathbb{F}_p$-тор для всех $p \neq 2, 3$.

Пример 2. Пусть $L = \mathbb{Q}(\alpha)$, где α — корень многочлена $x^3 - 7x + 7$, $T = R^{(1)}_{L/k}(\mathbb{G}_m)$. Поскольку $d = 7^2$, то расширение $L/\mathbb{Q}$ — циклическое. Минимальная $\mathbb{Z}$-форма X тора T не имеет плохих точек редукции. Редукция $\bar{X}_7$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \qquad a_0^3 \equiv 1 \pmod 7, \qquad \bar{X}_7 = \mu_3 \times N$$

Схема X является гладкой над $\mathbb{Z}$.

К вычислению числа $h(T)$ можно применить формулы Зигеля-Тамагавы. Нам требуется уметь вычислять локальные объемы компактных групп $X(O_\mathfrak{p})$ в некоторой мере Хаара. Остановимся на этой задаче более подробно. Имеем точную последовательность

$$1 \longrightarrow U_m \longrightarrow X(O_\mathfrak{p}) \xrightarrow{\alpha} X(O/\mathfrak{p}^m),$$

где U_m — конгруэнц-подгруппа. Используя подходящее матричное представление тора T, можно показать, что матричная экспонента определяет аналитический изоморфизм между U_m и d-кратной прямой суммой $\mathfrak{p}^m \oplus \ldots \oplus \mathfrak{p}^m$ для всех $m \geqslant m_0$, $d = \dim T$. Этим определяется так называемая каноническая мера Хаара μ на $X(O_\mathfrak{p})$, при этом объем $\mu(U_m) = q^{-md}$, $q = N\mathfrak{p}$. Отсюда

$$\mu\left(X(O_\mathfrak{p})\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{[X(O_\mathfrak{p}) : U_m]}{q^{md}} = \frac{[X(O_\mathfrak{p}) : U_{m_0}]}{q^{m_0 d}}.$$

Если схема $X_\mathfrak{p}$ гладкая, то α — эпиморфизм, $(U_m : U_{m+1}) = q^d$ и

$$\mu\left(X(O_\mathfrak{p})\right) = \frac{[X(\mathbb{F}_\mathfrak{p})]}{q^d}.$$

Если редукция $\bar{X}_\mathfrak{p}$ является тором с модулем рациональных характеров $\widehat{T}$, рассматриваемым как $\Pi_\mathfrak{P}$-модуль, то имеем формулу [3]

$$[X(\mathbb{F}_\mathfrak{p})] = \det(qE - h(\sigma)),$$

где $h : \Pi \to GL(d, \mathbb{Z})$ — гомоморфизм, определяемый Π-модулем $\widehat{T}$, σ — образующий элемент циклической группы $\Pi_\mathfrak{P}$. Таким образом,

$$\mu\left(X(O_\mathfrak{p})\right) = \det\left(E - h(\sigma)(N\mathfrak{p})^{-1}\right).$$

Функция $\det\left(E - h(\sigma)(N\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}$ обозначается $L_\mathfrak{p}(s, h)$ или $L_\mathfrak{p}(s, \chi)$, где χ — характер представления h. Это локальная L-функция Артина. Имеем

$$\mu\left(X(O_\mathfrak{p})\right) = L_\mathfrak{p}(1, \chi)^{-1}, \qquad \mathfrak{p} \nmid d.$$

Вычисления объемов $\mu\left(X(O_\mathfrak{p})\right)$ в точках $\mathfrak{p} \mid d$ представляют собой более кропотливую работу. Так, в примере 1

$$\mu\left(X(\mathbb{Z}_3)\right) = 2 = \left[\bar{X}_3 : \bar{X}_3^0\right], \qquad \mu\left(X(\mathbb{Z}_2)\right) = 1.$$

В примере 2 $\mu\left(X(\mathbb{Z}_7)\right) = 3 = \left[\bar{X}_7 : \bar{X}_7^0\right]$. Заметим также, что значения $L_p(1, \chi)$ для данных p равны 1.

Вернемся к вычислению числа $h(T)$. Пусть ω — инвариантная дифференциальная d-форма на T, определенная над полем k (форма объема), $d = \dim T$. Форма ω определяет меру Хаара

ω_ν на локально компактной группе $T(k_\nu)$ для каждого нормирования ν поля k. Локальные меры ω_ν определяют знаменитую меру Тамагавы на группе $T(A)$ по формуле

$$d\tau = \rho^{-1}|\Delta_k|^{-d/2}\prod_{\nu|\infty}\omega_v\prod_{\mathfrak{p}}L_{\mathfrak{p}}(1,\chi)\omega_{\mathfrak{p}},$$

где $\rho = \lim_{s\to 1}(s-1)^r L(s,\chi)$, r — ранг группы $(\widehat{T})_k$ рациональных характеров, определенных над k, Δ_k — дискриминант расширения $k/\mathbb{Q}$. Подробное описание чисел Тамагавы и их свойств в книге А. Вейля [9]. Базис группы $(\widehat{T})_k$ определяет гомоморфизм торов $T \to \mathbb{G}^r_{m,k}$. Далее, всякий адель $\alpha \in A$ имеет норму $\|\alpha\|$ и $\alpha \to \|\alpha\|$ есть гомоморфизм группы A^* в мультипликативную группу вещественных чисел R_+. Композиция этих двух отображений определяет гомоморфизм

$$\psi : T(A) \longrightarrow \mathbb{R}^r_+,$$

пусть $T^{(1)}(A)$ есть ядро отображения ψ. Имеем вложение $T(k)\subset T^{(1)}(A)$ и объем фактора $T^{(1)}(A)/T(k)$ в мере Тамагавы конечен, он и называется числом Тамагавы тора T и обозначается $\tau(T)$. Пусть теперь тор T анизотропен, то есть $r=0$. Тогда

$$T^{(1)}(A) = T(A) = \bigcup_{i=1}^{h(T)} \alpha_i T(k)X(A^\infty).$$

Имеем

$$\tau(T) = h(T)\tau\left(T(k)T(A^\infty)\,/T(k)\right) = \\ = h(T)|\Delta_k|^{-d/2}L(1,\chi)^{-1}\omega_\infty\left((T(k_\nu))/\,X(O)\right)\prod_{\mathfrak{p}}L(1,\chi)\omega_{\mathfrak{p}}(X(O_{\mathfrak{p}})). \quad (9)$$

Каноническая мера $\mu_{\mathfrak{p}}$ на $T(k_{\mathfrak{p}})$ определяется некоторой дифференциальной d-формой $\lambda_{\mathfrak{p}}$, определенной над полем $k_{\mathfrak{p}}$. Пусть $\mathfrak{p}=(\pi)$. Имеем $\lambda_{\mathfrak{p}} = \pi^{a_{\mathfrak{p}}}\omega$. Пусть $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{a_{\mathfrak{p}}}$ — дробный идеал поля k. Мера Тамагавы $d\tau$ не зависит от формы ω, а однозначно определяется самим тором T. Если $\mathfrak{a} = (\alpha)$ — главный идеал, тогда форма $\omega' = \alpha\omega$ обладает замечательным свойством: мера Хаара $\omega'_{\mathfrak{p}}$ является канонической мерой на $X(O_{\mathfrak{p}})$ для любого $\mathfrak{p}$. Такую форму ω' естественно назвать канонической формой объема тора T, если она существует. Две канонические формы объема ω и ω' связаны соотношением: $\omega' = a\omega$, a — единица кольца O. Для торов T, определенных над $\mathbb{Q}$, канонические формы всегда существуют, их две: $\omega' = \pm\omega$. Следующие соображения позволяют свести задачу вычисления числа $h(T)$ к торам, определенным над полем $\mathbb{Q}$.

Предложение 5. (1) *Пусть T_1 и T_2 — торы, определенные над полем k. Тогда*

$$H(T\times_k T_2) = H(T_1)\times H(T_2).$$

(2) *Пусть F — конечное расширение поля k, T — тор над полем F, $T_0 = R_{F/k}(T)$. Тогда*

$$H_F(T) = T(A_F)\,/T(F)X(A_F^\infty) = T_0(A)/\,T_0(k)X_0(A^\infty) = H_k(T_0),$$

где X_0 — минимальная модель тора T_0.

Доказательство. Случай 1) тривиален. Рассмотрим пункт 2). Пусть L/k — конечное расширение Галуа, содержащее поле разложения тора T_0, $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$, $\pi = \mathrm{Gal}(L/F)$. Тогда $\widehat{T}$ есть π-модуль, $\widehat{T}_0 = \mathbb{Z}\Pi\otimes_\pi\widehat{T}$ —Π-модуль. Пусть u — нормирование поля k, v —

его продолжение на F, w — продолжение v на L. Будем записывать это в форме $w \mid v \mid u$. Для всякого конечного множества S нормирований поля k, S_F состоит из всех нормирований поля F, лежащих над S, а S_L из всех точек поля L, лежащих над S_F. Тогда $T_0(A_k) = T(A_F)$ и при отображении $T_0(A_k) \to T(A_F)$ получаем изоморфизмы

$$T_0(k) = \operatorname*{Hom}_{\Pi}\left(\widehat{T}_0, L^*\right) = \operatorname*{Hom}_{\pi}\left(\widehat{T}, L^*\right) = T(F),$$

$$T_0(A^S) = \operatorname*{Hom}_{\Pi}\left(\widehat{T}_0, I_L^{S_L}\right) = \operatorname*{Hom}_{\pi}\left(\widehat{T}, I_L^{S_L}\right) = T\left(A_F^{S_F}\right), I_L = A_L^*.$$

Отсюда

$$T_0(A)\,/T_0(k)T_0\left(A^\infty\right) = T\left(A_F\right)/T(F)T\left(A_F^\infty\right). \quad \square$$

Предложение 5 показывает, что вычисление группы $H_k(T)$ можно свести к вычислению группы $H_{\mathbb{Q}}\left(R_{k/\mathbb{Q}}(T)\right)$, т.е., можно ограничиться торами, определенными над полем $\mathbb{Q}$. В частности, $H\left(\mathbb{G}_{m,k}\right) = H(k) = H\left(R_{k/\mathbb{Q}}\left(\mathbb{G}_{m,k}\right)\right)$ — группа классов идеалов поля k.

Пусть T — тор над полем $\mathbb{Q}$, ω — форма объема на T. Формула (9) для анизотропных торов T принимает вид

$$\tau(T) = h(T)L(1,\chi)^{-1}\omega_\infty\left(T(\mathbb{R})\,/X(\mathbb{Z})\right)\prod_p L_p(1,\chi)\omega_p\left(X(\mathbb{Z}_p)\right). \tag{10}$$

Если форма ω является канонической, то, как мы видели, $L_p(1,\chi)\mu_p\left(X(\mathbb{Z}_p)\right) = 1$ для всех $p \nmid D$, где D — дискриминант минимального поля разложения L тора T. Таким образом, для канонической формы ω имеем

$$\tau(T) = h(T)L(1,\chi)^{-1}\omega_\infty\left(T(\mathbb{R})\,/X(\mathbb{Z})\right)\prod_{p|D} L_p(1,\chi)\omega_p\left(X(\mathbb{Z}_p)\right). \tag{11}$$

Пример 3.

Пусть $T = R_{F/\mathbb{Q}}\left(\mathbb{G}_m\right)$, $\omega_1,\ldots,\omega_n$ — целый базис расширения $F/\mathbb{Q}$, $x = x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n$ — общий элемент расширения $F_{\mathbb{Q}}$, $N_{F/Q}(x)$ — норменный многочлен с коэффициентами из $\mathbb{Z}$. Тогда

$$\omega = \frac{x_1 \wedge \ldots \wedge x_n}{N_{F/\mathbb{Q}}(x)}$$

— каноническая форма объема на T.

Пример 4.

Рассмотрим тор $N = R^{(1)}_{F/k}\left(\mathbb{G}_m\right)$. Пусть L — нормальное конечное расширение поля $\mathbb{Q}$, содержащее поле F, $\Gamma = \operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})$, $\Pi = \operatorname{Gal}(L/k)$, $\pi = \operatorname{Gal}(L/F)$. Имеем точную последовательность Π-модулей

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\left[\Pi/\pi\right] \to \widehat{N} \to 0 \tag{12}$$

и соответствующую точную последовательность k-торов

$$1 \to N \to R_{F/k}\left(\mathbb{G}_m\right) \to \mathbb{G}_{m,k} \to 1 \tag{13}$$

Применение к последовательности (13) функтора $R_{k/\mathbb{Q}}$ приводит к точной последовательности

$$1 \to T \to R_{F/\mathbb{Q}}\left(\mathbb{G}_m\right) \xrightarrow{\varphi} R_{k/\mathbb{Q}}\left(\mathbb{G}_m\right) \to 1, \tag{14}$$

где $T = R_{k/\mathbb{Q}}(N)$, $\widehat{T} = \mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\Pi} \widehat{N}$, φ — норменное отображение. Характер χ представления $\widehat{T}$ индуцирован с характера ξ представления группы Π на решетке рациональных характеров $\widehat{N}$, $\chi = \xi^*$, поэтому

$$L\left(s, \chi, L/\mathbb{Q}\right) = L\left(s, \xi, L/k\right).$$

Последовательность (12) показывает, что

$$L\left(s, \xi, L/k\right) = \zeta_F(s) \,/\, \zeta_k(s) \tag{15}$$

есть частное двух дзета-функций Дедекинда. Чтобы вычислить локальные объемы в формуле (10), используем последовательность (14). Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $\beta_1, \ldots, \beta_t$ — целые базисы в расширениях $k/\mathbb{Q}$ и $F/\mathbb{Q}$ соответственно, $m = (k : \mathbb{Q})$, $t = (F : \mathbb{Q})$. Выпишем общие элементы полей k и F

$$x = x_1\alpha_1 + \ldots + x_m\alpha_m, \quad y = y_1\beta_1 + \ldots + y_t\beta_t.$$

В примере 3 показано, что формы

$$\alpha = \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m}{N_{k/\mathbb{Q}}(x)} \quad u \quad \beta = \frac{dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_t}{N_{F/\mathbb{Q}}(y)}$$

являются формами объема на $R_{k/\mathbb{Q}}\left(\mathbb{G}_m\right)$ и $R_{F/\mathbb{Q}}\left(\mathbb{G}_m\right)$ соответственно. Выберем на $R_{F/\mathbb{Q}}\left(\mathbb{G}_m\right)$ форму ω такую, чтобы

$$\beta = \varphi^*(\alpha) \wedge \omega.$$

Тогда ее ограничение на T есть форма объема на T, будем обозначать это ограничение снова символом ω. Поскольку

$$\varphi^*(\alpha) = \varphi^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m) \Big/ N_{F/\mathbb{Q}}(y)\ ,$$

то получаем соотношение

$$dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_t = \varphi^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m) \wedge \omega. \tag{16}$$

Формула 16 подсказывает следующий прием для вычисления вещественного объема в формуле (10). Выберем в вещественном пространстве $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ фундаментальную область для группы единиц $E(F)$, действующей мультипликативно на $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Такую область можно выбрать в виде конуса C с вершиной в начале координат. Пусть C_F часть этого конуса с условием $\mid N_{F/\mathbb{Q}}(y) \mid \leqslant 1$. Объем $v(C_F)$ тела C_F конечен в мере Лебега $dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_t$ и равен

$$\lim_{s \to 1}(s-1)f(s),$$

где

$$f(s) = \sum \mid N_{F/\mathbb{Q}}(y) \mid^{-s},$$

а $y = y_1\beta_1 + \ldots + y_t\beta_t$ пробегает все целые числа поля F, отличные от нуля и такие, что $(y_1, \ldots, y_t)$ принадлежат конусу. Мы воспользовались здесь теоремой Дирихле, подробное доказательство которой приведено в книге [1] . Из теоремы о равномерном распределении идеалов по классам и из свойств дзета-функции Дедекинда следует, что

$$\lim_{s \to 1}(s-1)f(s) = h(F)^{-1} \lim_{s \to 1}(s-1)\zeta_F(s).$$

Таким образом

$$\int\limits_{C_F} dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_t = \lim_{s \to 1}(s-1)\zeta_F(s). \tag{17}$$

Последовательность (14) и формула (16) показывают, что

$$\int\limits_{C_F} dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_t = \int\limits_{\varphi(C_F)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \int\limits_{T(\mathbb{R})/X(\mathbb{Z})} \omega. \tag{18}$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_{\varphi(C_F)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m = \frac{\left[E(k) : N_{F/k}(E(F))\right]}{\left[(k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^* : N_{F/k}\left(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}\right)^*\right]} \int\limits_{C_k} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m. \tag{19}$$

Объединяя формулы (15), (17), (18), (19), получаем соотношение

$$L(1,\zeta)^{-1} \omega_\infty \left(T(\mathbb{R})\,/X(\mathbb{Z})\right) = \frac{h(k)\left[(k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^* : N_{F/k}(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^*\right]}{h(F)\left[E(k) : N_{F/k}(E(F))\right]}.$$

Аналогично вычисляется $\mathfrak{p}$-адический объем $\omega_p(X(\mathbb{Z}_p))$. Пусть Y_F — минимальная модель тора $R_{F/\mathbb{Q}}\left(\mathbb{G}_m\right)$

$$Y_F(\mathbb{Z}_p) = (O_F \otimes \mathbb{Z}_p)^* = \oplus_{\mathfrak{P}|p} O^*_{\mathfrak{P}},$$

$$\mu_p\left(Y_F(\mathbb{Z}_P)\right) = \prod_{\mathfrak{P}|p}\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{P}}\right),$$

$$\mu_p\left(Y_k(\mathbb{Z}_P)\right) = \prod_{\mathfrak{p}|p}\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right),$$

$$L_p(1,\zeta) = \prod_{\mathfrak{p}|p}\left(1 - N\mathfrak{p}^{-1}\right) \Big/ \prod_{\mathfrak{P}|p}\left(1 - N\mathfrak{P}^{-1}\right).$$

Из формул (16),(18) получаем

$$\int\limits_{Y_F(\mathbb{Z}_P)} (dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_t)_p = \int\limits_{\varphi(Y_F(\mathbb{Z}_P))} (dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m)_p \int\limits_{X(\mathbb{Z}_p)} \omega_p,$$

$$\varphi\left(Y_F\left(\mathbb{Z}_p\right)\right) = N_{F/k}\left(Y_F\left(\mathbb{Z}_p\right)\right).$$

Учитывая вышенаписанные соотношения, имеем

$$L_p(1,\xi)\omega_p\left(X(\mathbb{Z}_p)\right) = \left[Y_k(\mathbb{Z}_p) : N_{F/k}\left(Y_F(\mathbb{Z}_p)\right)\right].$$

Удобно вернуться к традиционным обозначениям. Пусть $I_L = A^*_L$ — группа иделей поля L, I^∞_L — подгруппа в I_L, состоящая из иделей, все неархимедовы компоненты которых являются единицами. Формула (10) для тора $T = R_{k/\mathbb{Q}}(N)$ принимает вид

$$\tau_{\mathbb{Q}}(T) = \frac{h(T)h(k)\left[I^\infty_k : N_{F/k} I^\infty_F\right]}{h(F)\left[E(k) : N_{F/k}E(F)\right]}.$$

Известно, что

$$\tau_{\mathbb{Q}}(T) = \tau_k(N) = \frac{\left[H^1(\Pi, \widehat{N})\right]}{[Ш(N)]}.$$

Последовательность (12) показывает, что

$$H^1(\Pi, \widehat{N}) = \mathrm{Ker}\left[H^2(\Pi, \mathbb{Z}) \to H^2(\Pi, \mathbb{Z}[\Pi/\pi])\right] =$$
$$= \mathrm{Ker}\left[\mathrm{Hom}(\Pi, \mathbb{C}^*) \to \mathrm{Hom}(\pi, \mathbb{C}^*)\right]$$

— ядро отображения ограничения. Ясно, что элемент φ из $\mathrm{Hom}(\Pi, \mathbb{C}^*)$ лежит в ядре ограничения тогда и только тогда, когда φ тривиален на подгруппе $\pi\,[\Pi, \Pi]$, где $[\Pi, \Pi]$ —коммутант группы Π. Таким образом, $\mid H^1(\Pi, \widehat{N}) \mid = [F_0; k]$, где F_0 — максимальное абелево расширение поля k, содержащееся в F. Получаем окончательное выражение для числа классов тора $N = R^{(1)}_{F/k}(\mathbb{G}_m)$:

$$h\left(R^{(1)}_{F/k}(\mathbb{G}_m)\right) = \frac{[F_0 : k]\left[E(k) : N_{F/k}E(F)\right] h(F)}{[Ш(N)]\left[I_k^\infty : N_{F/k}I_F^\infty\right] h(k)}.$$

Данная формула приведена в статье [4]. Другими способами эта формула получена в [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Фундаментального Естествознания при СПБ университете, грант 94-1.1-5.

Литература

[1] З.И. Боревич, И.Р. Шафаревич. Теория чисел. М.:Наука, 1985.

[2] В.Е. Воскресенский. Международная конференция “Алгебра и Анализ”. Тезисы докладов, ч.1, Казань , 1994, С.26.

[3] Ж.-П. Серр. Алгебраические группы и поля классов. М.:Мир, 1968.

[4] Т.В. Фомина. Арифметика и геометрия многообразий. СамГУ, Самара , 1992, С.140.

[5] Т.В. Фомина. Международная конференция “Алгебра и Анализ”. Тезисы докладов, ч.1, Казань , 1994, С.98.

[6] S. Katayama. J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991) 679.

[7] E. Nart, X. Xarles. Arch. Math. **57** (1991) 460.

[8] X. Xarles. J. reine angew. Math. **437** (1993) 167.

[9] A. Weil. Adeles and algebraic groups. Lecture notes. Princeton, 1961.

Поступила в редакцию

19.10.95 .