МАТЕМАТИКА

МЕТОД ТОЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-го ПОРЯДКА

Л.М. Беркович

Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы нелинейные неавтономные обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка могли быть преобразованы в линейные обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами с помощью, вообще говоря, нелокального преобразования зависимой и независимой переменных. Эти условия выражены в терминах факторизации нелинейных дифференциальных операторов 1-го порядка.

"Два предмета: теоретическая физика и интегрирование дифференциальных уравнений немыслимы один без другого, они всегда развивались совместно и успехи одного отражались на другом." (В.П. Ермаков)

1 Введение

Анализируя причины успехов и неудач при попытках интегрировать обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), автор пришел к выводу, что ключ к пониманию проблем интегрируемости заключен в словах: **факторизация и преобразования**. К настоящему времени осознана необходимость учитывать и использовать существующие глубокие аналогии между алгебраическими и дифференциальными уравнениями и, в особенности, связанные с возможностями факторизации. Но главное - осознание необходимости совместного использования методов факторизации и преобразований. Взятые в отдельности, каждый из них не очень эффективен. Зато комбинированное их применение приносит наибольшую пользу, т.к. суммарный результат превышает действие, оказываемое каждым методом в отдельности. В связи с происходящей в настоящее время **делинеаризацией** Науки вообще и Физики, в частности, представляются актуальными задачи развития известных и создания новых математических методов точной линеаризации дифференциальных уравнений.

Главный результат. Теорема 1.1. Для того чтобы уравнение

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

преобразованием вида

$$y = v(x, y)z, \quad dt = u_1(x, y)dx + u_2(x, y)dy, \tag{1.2}$$

где v, u_1 и u_2 - достаточно гладкие функции в некоторой области $\mathbf{G(x,y)}$, не аннулирующиеся в ней, привести к линейному автономному виду

$$z^{(n)}(t) + b_{n-1}z^{(n-1)}(t) + ... + b_1 z'(t) + b_0 z(t) = 0 \quad b_k = const, \tag{1.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы (1.1) допускало следующую факторизацию через нелинейные, вообще говоря, дифференциальные операторы 1-го порядка

$$F \sim \prod_{k=n}^{1}[D - \frac{v_x + v_y y'}{v} - (k-1)\frac{D(u_1 + u_2 y')}{u_1 + u_2 y'} - r_k(u_1 + u_2 y')]y = 0, \tag{1.4}$$

(некоммутативная факторизация), или

$$F \sim \prod_{k=1}^{n}[\frac{1}{u_1 + u_2 y'}D - \frac{v_x + v_y y'}{v(u_1 + u_2 y')} - r_k]y = 0, \tag{1.5}$$

(коммутативная факторизация), где $D = d/dx$, $v_x = \partial v/\partial x$, $v_y = \partial v/\partial y$, r_k суть корни характеристического уравнения

$$r^n + b_{n-1}r^{n-1} + ... + b_1 r + b_0 = 0. \tag{1.6}$$

Специальные случаи теор.1.1 см. в [1,2]. С ее помощью решена задача Альфана о приводимых линейных дифференциальных уравнениях n-го порядка [1]. Она была применена и для линеаризации автономных уравнений [2]. Теор.1.1 может быть также использована для исследования интегрируемых случаев уравнения Ньютона

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1.7}$$

других нелинейных уравнений и, в том числе, для автономизации неавтономных уравнений.

Преобразование (1.2) охватывает следующие важные преобразования: преобразование Куммера-Лиувилля

$$y = v(x)z, \quad dt = u(x)dx, \quad v, u \in \mathbf{C^n(I)}, \quad \mathbf{uv \neq 0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{I} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}; \tag{1.8}$$

общую точечную линеаризацию

$$X = f(x, y), \quad Y = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = X_x Y_y - X_y Y_x \neq 0, \tag{1.9}$$

которая соответствует (1.2) при $u_{1y} = u_{2x}$,

сохраняющую расслоение точечную линеаризацию

$$X = f(x), \quad Y = \varphi(x, y), \tag{1.10}$$

точную линеаризацию нелинейных автономных уравнений

$$y = v(y)z, \quad dt = u(y)dx, \quad u(y(x))v(y(x)) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbf{I} = \{x \mid a \leq x \leq b\}, \tag{1.11}$$

т.е. линеаризацию в узком смысле; линеаризацию

$$y = v(x, y)z, \quad dt = u(x, y)dx, \tag{1.12}$$

соответствующую произвольной точечной симметрии С.Ли с генератором

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{1.13}$$

и, наконец, общую неточечную линеаризацию (1.2), т.е. линеаризацию в широком смысле. Заметим, что если произвести факторизацию согласно (1.4) или (1.5), то класс линеаризуемых в силу преобразования (1.2) уравнений (1.1) сохраняет свою форму при всевозможных преобразованиях типа (1.2). Это позволяет ставить для уравнений (1.1) задачи о преобразовании их в себя или к некоторому заранее заданному (но той же структуры) виду, а также о редукции к каноническим формам. Таким образом, проблема интегрируемости ОДУ приводит к необходимости рассмотрения следующей общей проблемы, а именно проблемы эквивалентности различных классов ОДУ. Соответствующая проблема для линейных уравнений n-го порядка с использованием преобразования КЛ (1.8) была решена в [1,3,4].

2 Линеаризация автономных уравнений 2-го порядка

Линеаризация при помощи преобразования искомой функции применялась в [5], а путем преобразования независимой переменной - в [6]. В [2] построен общий класс нелинейных автономных уравнений 2-го порядка, линеаризуемый при совместном применении преобразований обоих типов.

Теорема 2.1 [2]. *Для того чтобы уравнение*

$$y'' + f(y)y'^2 + b_1\varphi(y)y' + \psi(y) = 0, \quad (') = d/dx, \tag{2.1}$$

могло быть линеаризовано преобразованием (1.11), т.е. приведено к

$$\ddot{z} + b_1\dot{z} + b_0 z + c = 0, \tag{2.2}$$

$(.) = d/dt$, b_1, b_0, $c = const$, *необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в одном из следующих видов*

$$y'' + fy'^2 + b_1\varphi y' + \varphi\exp(-\int f(y)dy)[b_0\int\varphi\exp(\int f(y)dy)dy + \frac{c}{\beta}] = 0, \tag{2.3^1}$$

$$y'' - \left(\frac{2a}{ay+b} + \frac{\varphi^*}{\varphi}\right)y'^2 + b_1\varphi y' + \frac{b_0}{b}\varphi^2 y(ay+b) + \frac{c}{b}\varphi^2(ay+b)^2 = 0, \tag{2.3^2}$$

($(*) = d/dy$, $\beta = const$ - нормирующий множитель), которые приводятся к (2.2) соответственно преобразованиями

$$z = \beta\int\varphi\exp(\int fdy)dy, \quad dt = \varphi(y)dx, \tag{2.4^1}$$

$$z = \frac{y}{ay+b}, \quad dt = \varphi(y)dx. \tag{2.4^2}$$

Пример 1. Найдем условия интегрируемости в конечном виде уравнения

$$y'' + yy' + ky^3 = 0, \quad k = const, \tag{2.5}$$

которое помимо теории однозначных функций, являющихся интегралами нелинейных ОДУ-2 [7], возникает также в некоторых других теоретических и прикладных вопросах [8].

Теорема 2.2. *1) Уравнение (2.5) при всех k разрешимо в квадратурах, т.к. подстановкой*

$$z = y^2, \quad dt = ydx \tag{2.6}$$

линеаризуется: $\ddot{z} + \dot{z} + 2kz = 0$.

2)Для того чтобы уравнение (2.5) интегрировалось в конечном виде через элементарные функции, необходимо и достаточно, чтобы параметр k принимал значения числовых точек последовательности

$$k = \frac{l(l+1)}{2(2l+1)^2}, \quad l \in \mathbf{Z}, \quad \mathbf{k} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1/8}]. \tag{2.7}$$

3)Для $k \neq 1/9$ уравнение (2.5) допускает двумерную алгебру Ли с генераторами

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad G_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \quad [G_1, G_2] = G_1. \tag{2.8}$$

4)Для $k = 1/9$ уравнение (2.5) допускает алгебру Ли, изоморфную $sl(3,\mathrm{R})$.

При интегрировании уравнения (2.5) наряду с методом точной линеаризации (МТЛ) было применено исследование П.Л.Чебышева [9] по интегрированию дифференциальных биномов.

Замечание 1. Сходные результаты были получены в [8] благодаря комбинированию стандартного метода точечных симметрий Ли с т.н. методом скрытых симметрий Ли [10], а также с тестом Пенлеве-Ковалевской. Обобщение уравнения (2.5) содержится в примере 4.

Замечание 2. Пусть динамическая система описывается уравнениями вида

$$\dot{y}_1 = P(y_1, y_2), \quad \dot{y}_2 = Q(y_1, y_2). \tag{2.9}$$

Некоторые специальные случаи (2.9), в том числе классическая система Лотка-Вольтерра, сводятся путем исключения переменных к уравнениям вида (2.3^1) или к уравнениям, эквивалентным (2.3^1).

Пример 2. Линеаризация лиувиллевых систем. Известно, что для них кинетическая и потенциальная энергии имеют вид

$$T = \frac{1}{2}b(q)\sum_{i=1}^{n} a_i(q_i)\dot{q}_i^2, \quad U = \frac{1}{b(q)}\sum_{i=1}^{n} d_i(q_i), \quad b(q) = \sum_{i=1}^{n} b_i(q_i). \tag{2.10}$$

В силу уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1, ..., n, \tag{2.11}$$

а также интеграла энергии $T - U = h$ от (2.10) придем к системе

$$\ddot{q}_i + \left(\frac{1}{2}\frac{a_i^*}{a_i}\dot{q}_i + \frac{\dot{b}}{b}\right)\dot{q}_i - \frac{1}{b^2 a_i}\frac{d}{dq_i}[b_i(h - d_i)] = 0. \tag{2.12}$$

Теорема 2.3. *Лиувиллева система, представленная в лагранжевой форме (2.12), линеаризуется преобразованием*

$$Q_i = \sqrt{2(hb_i - d_i)}, \quad ds_i = -a_i^{-1/2}b^{-1}\frac{d}{dq_i}\sqrt{2(hb_i - d_i)}dt \tag{2.13}$$

к виду

$$Q_i''(s_i) - Q_i(s_i) = 0. \tag{2.14}$$

3 Линеаризация автономных уравнений третьего порядка

Рассмотрим уравнение

$$y''' + f_5(y)y'y'' + f_4(y)y'' + f_3(y)y'^3 + f_2(y)y'^2 + f_1(y)y' + f_0(y) = 0. \tag{3.1}$$

И пусть преобразованием вида (1.11) оно сводится к виду

$$\dddot{z} + b_2\ddot{z} + b_1\dot{z} + b_0 z + c = 0, \quad b_2, \quad b_1, \quad b_0, \quad c = const. \tag{3.2}$$

Отдельные примеры, принадлежащие к классу (3.1), содержатся в [11].

Теорема 3.1. *Для того чтобы уравнение (3.1) могло быть линеаризовано преобразованием (1.11), достаточно, чтобы (3.1) было представимо в одном из следующих видов:*

$$y''' + f(y)y'y'' + \frac{1}{9}\left(3\frac{\varphi^{**}}{\varphi} - 5\frac{\varphi^{*2}}{\varphi^2} - f\frac{\varphi^*}{\varphi} + f^2 + 3f^*\right)y'^3 + b_2\varphi y'' + \frac{1}{3}b_2\varphi(f + \frac{\varphi^*}{\varphi})y'^2$$
$$+ b_1\varphi^2 y' + \varphi^{5/3}(b_0\int\varphi^{4/3}\exp(\frac{1}{3}\int f dy)dy + \frac{c}{\beta})exp(-\frac{1}{3}\int f dy) = 0; \tag{3.3}$$

$$y''' - \left(\frac{6a}{ay+b} + 4\frac{\varphi^*}{\varphi}\right)y'y'' + b_2\varphi y''$$
$$+[6\frac{a^2}{(ay+b)^2} + 6\frac{a}{ay+b}\frac{\varphi^*}{\varphi} + 3\frac{\varphi^{*2}}{\varphi^2} - \frac{\varphi^{**}}{\varphi}]y'^3$$
$$-b_2\varphi\left(\frac{\varphi^*}{\varphi} + 2\frac{a}{ay+b}\right)y'^2 + b_1\varphi^2 y' + \frac{b_0}{b}\varphi^3 y(ay+b) + \frac{c}{b}(ay+b)^2\varphi^3 = 0. \tag{3.4}$$

Уравнения (3.3) и (3.4) приводятся к (3.2) соответственно преобразованиями

$$z_1 = \int\varphi^{4/3}\exp(\frac{1}{3}\int f dy)dy, \quad dt = \varphi(y)dx; \tag{3.5}$$

$$z_2 = \frac{y}{ay+b}, \quad b \neq 0, \quad dt = \varphi(y)dx. \tag{3.6}$$

Пример 3. Случай Эйлера-Пуансо в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Как известно, он описывается системой

$$A\dot{p} - (B-C)qr = 0, \quad B\dot{q} - (C-A)rp = 0, \quad C\dot{r} - (A-B)pq = 0, \quad A, B, C = const. \tag{3.7}$$

Система (3.7) допускает разделение переменных. Исключая переменные q,r, придем к следующему уравнению 3-го порядка

$$y''' - \frac{1}{y}y'y'' - \frac{4(A-B)(C-A)}{BC}y'y^2 = 0, \tag{3.8}$$

где $t \to x, \quad p \to y \quad (.) \to (')$.

Уравнение (3.8) принадлежит к частному случаю класса (3.3). А именно, если в (3.3) положить $f = -\frac{\varphi^*}{\varphi}$, придем к уравнению

$$y''' - \frac{\varphi^*}{\varphi}y'y'' + b_2\varphi y'' + b_1\varphi^2 y' + \varphi^2(b_0\int\varphi dy + \frac{c}{b}) = 0. \tag{3.9}$$

Сделаем дальнейшие упрощения. Если теперь в (3.9) положить $\varphi = y$, $b_2 = b_0 = c = 0$, придем к уравнению (3.8). Преобразованием (2.6) уравнение (3.8) линеаризуется:

$$y''' + by' = 0, \quad b = \frac{4(A-B)(C-A)}{BC} > 0. \tag{3.10}$$

4 Точечная линеаризация неавтономных уравнений 2-го порядка и общий метод точной линеаризации

4.1. Точечная линеаризация. Еще С.Ли описал класс ([12], см. также [13,14]) ОДУ (1.7), линеаризуемый точечной заменой переменных (1.9), а именно приводимых к виду

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 0. \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Общий вид нелинейного уравнения 2-го порядка, приводящегося к линейному виду*

$$\frac{d^2Y}{dX^2} + b_1\frac{dY}{dX} + b_0Y + c = 0, \quad b_1, b_0, c = const, \tag{4.2}$$

точечным преобразованием (1.9), - следующий:

$$(f_x\varphi_y - \varphi_x f_y)y'' + [(f_y\varphi_{yy}) + b_1\varphi_y f_y^2 + (b_0\varphi + c)f_y^3]y'^3 +$$
$$[f_x\varphi_{yy} - \varphi_x f_{yy} + 2(f_y\varphi_{xy} - \varphi_y f_{xy}) + b_1(\varphi_x f_y^2 + 2f_x f_y\varphi_y) + 3(b_0\varphi + c)f_x f_y^2]y'^2 +$$
$$[f_y\varphi_x x - \varphi_y f_x x + 2(f_x\varphi_{xy} - \varphi_x f_{xy}) + b_1(2f_x f_y\varphi_x + f_x^2\varphi_y) + 3(b_0\varphi + c)f_x^2 f_y]y' +$$
$$(f_x\varphi_{xx} - \varphi_x f_{xx}) + b_1\varphi_x f_x^2 + (b_0\varphi + c)f_x^3 = 0. \tag{4.3}$$

Пример 4 (обобщение примера 1).

$$y'' + ayy' + \frac{1}{2}by^3 = 0 \tag{4.4}$$

Уравнение (4.5) при $b = \frac{2}{9}a^2$ линеаризуется в (4.2) подстановкой

$$X = \frac{1}{3}ax - \frac{1}{y}, \quad Y = \frac{1}{6}ax^2 - \frac{x}{y}. \tag{4.5}$$

Для сравнения отметим, что (4.4) при любых a и b линеаризуется неточечной подстановкой (1.11) в $\ddot{z} + a\dot{z} + bz = 0$. Уравнения вида (4.4) встречаются также в теоретической и математической физике (см. [15]).

Специальным случаем преобразования (1.9) является сохраняющее расслоение точечное преобразование (1.10).

Теорема 4.2 [16].*Уравнение 2-го порядка (1.7) допускает 6-мерную группу Ли точечных симметрий, сохраняющих расслоения, тогда и только тогда, когда оно имеет форму*

$$y'' = \frac{1}{2}M_y y'^2 + M_x y' + N, \tag{4.6}$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ удовлетворяют неопределенному уравнению

$$M_{xxy} + (NM_y)_y - M_{xy}M_x - 2N_{yy} = 0. \tag{4.7}$$

Теорема 4.3. *Для того чтобы уравнение (1.7) преобразованием (1.10) приводилось к (4.3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$F = f_2(x,y)y'^2 + f_1(x,y)y' + f_0(x,y), \tag{4.8}$$

где

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2\frac{\partial f_2}{\partial x}, \tag{4.9}$$

$$f_0 = \frac{1}{2}e^{\int f_2 \partial y}\int e^{-\int f_2 \partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{1}{2}f_1^2\right)\partial y. \tag{4.10}$$

Теорема 4.4. *Для того чтобы уравнение (1.7) могло быть линеаризовано к виду (4.1) преобразованием (1.10), необходимо, чтобы новая независимая переменная X была дробно-линейной функцией от старой переменной, т.е.*

$$X = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc = 1. \tag{4.11}$$

4.2. Общий метод точной линеаризации. Рассмотренные в пп.2,4 методы точной линеаризации **автономных** уравнений являются **частными** по отношению к следующему **общему** методу линеаризации **неавтономных** уравнений (линеаризация в широком смысле). Используемое преобразование имеет вид (1.2), v, u_1, u_2 суть, по крайней мере, дважды дифференцируемые функции по обоим аргументам в любой точке (x, y) из некоторой области G, $v(u_1 + u_2 y') \neq 0$ в $\forall (x, y) \in$ G.

Основой метода может служить следующая теорема, являющаяся специализацией теор.1.1 для порядка $n = 2$ и допускающая в качестве целевого уравнения неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами.

Теорема 4.5. *Для того чтобы уравнение Ньютона (1.7) преобразованием (1.2) приводилось к линейному виду (4.2), необходимо и достаточно, чтобы оно допускало коммутативную факторизацию*

$$\left[\frac{1}{u_1 + u_2 y'}D - \frac{v_x + v_y y'}{v(u_1 + u_2 y')} - r_2\right]\left[\frac{1}{u_1 + u_2 y'}D - \frac{v_x + v_y y'}{v(u_1 + u_2 y')} - r_1\right]y + cv = 0, \tag{4.12}$$

или некоммутативную факторизацию:

$$\left[D - \frac{D(u_1 + u_2 y')}{u_1 + u_2 y'} - \frac{v_x + v_y y'}{v} - r_2(u_1 + u_2 y')\right]\left[D - \frac{v_x + v_y y'}{v} - r_1(u_1 + u_2 y')\right]y$$

$$+c(u_1 + u_2 y')^2 v = 0, \quad D = \frac{d}{dx}, \tag{4.13}$$

где r_k, $k = 1, 2$, удовлетворяют характеристическому уравнению

$$r^2 + b_1 r + b_0 = 0. \tag{4.14}$$

5 Полулинейные уравнения, соответствующие нелинейным эволюционным уравнениям диффузионного типа

Поиск автомодельных и, в частности, инвариантных решений является одним из важнейших источников появления нелинейных ОДУ.

Важным классом нелинейных уравнений является т.н. класс **полулинейных** уравнений, представимых в виде суммы линейного дифференциального выражения с постоянными коэффициентами и нелинейного члена.

Уравнением Колмогорова-Петровского-Пискунова (КПП) называется нелинейное уравнение диффузии вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \quad k = \mathrm{const}, \tag{5.1}$$

где нелинейная функция $F(u)$ удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(1) = 0, \quad F'(0) = \alpha > 0, \quad F'(u) < \alpha, \quad 0 < u < 1, \quad (') = d/du. \tag{5.2}$$

Оно рассматривалось в [17] в связи с задачей нахождения инвариантных решений типа **бегущей волны** $u(x,t) = u(\tau)$, $\tau = ax + bt$.

5.1. Групповые свойства полулинейного уравнения КПП. Найдем точечные симметрии полулинейного ОДУ, соответствующего (5.1) и которое представим в виде

$$y'' + b_1 y' + \Phi(y) = 0 \tag{5.3}$$

Теорема 5.1. *Для того чтобы уравнение (5.3) допускало точечную симметрию (однопараметрическую группу Ли) с генератором (1.13), необходимо и достаточно, чтобы* $\Phi(y)$ *и* $X \neq \frac{\partial}{\partial x}$ *приняли один из следующих видов соответственно:*

1)
$$\Phi(y) = b_0 F(y) = r_1 r_2 \left[y^* + \frac{s}{r_1 r_2} y^{*(2r_2 - r_1)/r_1} \right],$$

$$X = e^{(r_1 - r_2)x} \left[\frac{\partial}{\partial x} + r_1 y^* \frac{\partial}{\partial y} \right];$$

2)
$$\Phi(y) = b_0 F(y) = r_1 r_2 \left[y^* + \frac{s}{r_1 r_2} y^{*(2r_1 - r_2)/r_2} \right],$$

$$X = e^{(r_2 - r_1)x} \left[\frac{\partial}{\partial x} + r_2 y^* \frac{\partial}{\partial y} \right],$$

где $y^* = y + q/(r_1 r_2)$

3)
$$\Phi(y) = q + s\exp(2b_1^2 y/q), \quad q \neq 0$$

$$X = e^{b_1 x} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{q}{b_1} \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad b_0 = 0; \quad b_1 \neq 0;$$

4)
$$\Phi(y) = s(y+q)^{-1}, \quad X = e^{-b_1 x} \left(\frac{\partial}{\partial x} - b_1 (y+q) \frac{\partial}{\partial y} \right);$$

5)
$$\Phi(y) = b_0 F(y) = b_0 \left[\left(y + \frac{q}{b_0} \right) + \frac{s}{b_0} \left(y + \frac{q}{b_0} \right)^{-3} \right], \quad b_1 = 0, \quad b_0 \neq 0;$$

$$X_{1,2} = \exp(\mp 2\sqrt{-b_0} x) \left[\frac{\partial}{\partial x} + \left(\mp \frac{q}{\sqrt{-b_0}} \mp \sqrt{-b_0} y \right) \frac{\partial}{\partial y} \right].$$

6)
$$\Phi(y) = b_0 y + \frac{1}{4k} (b_0^2 - \frac{36}{625} b_1^4) + k y^2,$$

$$X=\exp(\frac{b_1}{5}x)\{\frac{\partial}{\partial x}-[\frac{2}{5}b_1y-\frac{1}{5k}b_1(b_0-\frac{6}{25}b_1^2)]\frac{\partial}{\partial y}\},$$

где r_1 *and* r_2 *удовлетворяют уравнению* (4.14).

Заметим, что в случаях 1)-4) и 6), если обозначить генератор трансляции через $X_2=\frac{\partial}{\partial x}$, а другой допускаемый генератор - через X_1, то получим двумерные алгебры Ли соответственно с коммутаторами:

1) $[X_1,X_2]=(r_2-r_1)X_1$; 2) $[X_1,X_2]=(r_1-r_2)X_1$; 3) $[X_1,X_2]=-b_1X_1$;
4) $[X_1,X_2]=b_1X_1$; 6) $[X_1,X_2]=-\frac{1}{5}b_1X_1$.

В случае 5), который привел к специальному случаю уравнения Ермакова (см. [18]), алгебра Ли симметрий является трехмерной. Обозначим оператор трансляции через X_3, а пару других допускаемых симметрий - соответственно через X_1, X_2. Ненулевые коммутаторы таковы:
5)$[X_1,X_3]=-2\sqrt{-b_0}X_1$; $[X_2,X_3]=-2\sqrt{-b_0}X_2$; $[X_1,X_2]=-2\sqrt{-b_0}(X_1+X_2)$. Заметим, что случай 6) был пропущен в [19,20].

Недостаток места не позволяет остановиться на методе факторизации [20,21] построения точных решений для найденных полулинейных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант N 94-01-01589.

Литература

[1] Л.М. Беркович. Факторизация и преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений. Саратов; Изд-во Саратов. ун-та, 1989.
[2] Л.М. Беркович. *Прикл. Матем. Мех.*, **43** (1979), N 4, С.629-638.
[3] Л.М. Беркович. *Успехи Матем. Наук*, **41** (1986), N 1, С.183-184.
[4] L.M. Berkovich.*Arch. Math. (Brno)*, **24** (1988), N 1, P.25-42.
[5] Paul Painleve. *Acta Math.*, **25** (1902), P.1-85.
[6] С.А. Чаплыгин. Избранные труды, М.,Наука, 1976, С.367-384.
[7] В.В. Голубев. Лекции по аналитической теории диф. уравнений, М.-Л., 1970.
[8] R.L. Lemmer, and P.G.L. Leach. *J.Phys.A: Math. Gen.*,**26** (1993), P.5017-5024.
[9] П.Л. Чебышев. Полное собрание соч., 1947, Т.2, С.66.
[10] B. Abraham-Shrauner, and Guo Ann. *J.Phys. A: Math. Gen.*, **25** (1992), P.5597-5608.
[11] B.V. Dasarathy, and P. Srinivasan. *AIAA J.*, **6** (1968), N 4, P.736-737.
[12] S. Lie. Gesammelte Abhandlungen, **5**, Leipzig-Khristiania, 1924.
[13] W. Sarlet, F.M. Mahoned, and P.G.L. Leach. *J.Phys. A: Math. Gen.*, **20** (1987), P.277-292.
[14] Н.Х. Ибрагимов. *Успехи Матем. Наук*, 47 (1992), N 4, С.83-144.
[15] В.И. Фущич, Р.З. Жданов, Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения. Киев; Наукова Думка, 1992.
[16] L. Hsu, and N. Kamran. *Proc. London Math. Soc.*,**58** (1989), N 3, P.387-416.
[17] A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovskii, and N.S. Piskunov. *Bull. Univ. Moscow, Ser. Intern. A. Math. Mech.*, **1** (1937/38), N 6, C.1-26.
[18] Л.М. Беркович, Н.Х. Розов. *Дифференц. Уравн.*, **8** (1972), N 11, 2076-2079.
[19] Л.М. Беркович. *Докл. Рос. АН* **322** (1992), N 4, С.635-640.
[20] L.M. Berkovich. *Lie groups and their applications* **1** (1994), N 1, P.27-37.
[21] Л.М. Беркович. *Докл. Рос. АН* **322** (1992), N 5, С.823-827.

Поступила в редакцию
30.10.95